Gaudeamus
PRIRUČNICI ZA MATURU

Snježana Šišić . Damir Šišić

Matematika

priručnik za pripremu ispita na državnoj maturi
osnovna i viša razina

PROFIL Klett

Snježana Šišić • Damir Šišić

Matematika

priručnik za pripremu ispita na državnoj maturi

osnovna i viša razina

PROFIL Klett

Izdavač
Profil Klett d.o.o
Zagreb, Petra Hektorovića 2

Za izdavača
Dalibor Greganić

Direktorica uredništva
Petra Stipaničev Glamuzina

Urednik
Zlatko Klanac, prof.

Izvršna urednica
Suzana Šijan, prof.

Recenzentica
Kristina Penzar, prof.

Lektorica
Lidija Bistrički, prof.

Likovno-gra ička urednica
Marina Hrupec
Studio 2M

Prijelom
Heroina

Zahvala
Zahvaljujemo profesorima i učenicima V. gimnazije u Zagrebu na podršci i suradnji tijekom rada na *Priručniku*.

CIP zapis dostupan u računalnom katalogu
Nacionalne i sveučilišne knjižnice u Zagrebu pod brojem 755353

ISBN 978-953-12-1227-4

1. izdanje 2011.
Zagreb, Hrvatska

© Sva prava pridržana. Nijedan dio ovog priručnika ne može biti objavljen ili pretisnut bez prethodne suglasnosti izdavača i vlasnika autorskih prava.

EUROPEAN
EDUCATIONAL
PUBLISHERS
GROUP

Član smo
Europskog udruženja
izdavača udžbenika.

Snježana Šišić, prof.
Damir Šišić, prof. savjetnik

Matematika

priručnik za pripremu ispita na državnoj maturi

osnovna i viša razina

Gaudeamus
PRIRUČNICI ZA MATURU

PROFIL Klett

Sadržaj

Predgovor 10
UVOD 11
1. BROJEVI I ALGEBRA 19
1.1. Skupovi brojeva 20
1.1.1. Skupovi prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva 20
Pravila o redoslijedu računskih operacija 23
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 23
Zadaci višestrukog izbora 24
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 25
Rješenja 29
1.1.2. Potencije i korijeni 31
Potencije 31
Znanstveni zapis realnog broja 33
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 33
Zadaci višestrukog izbora 35
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 37
Rješenja 38
Korijeni 39
Racionalizacija nazivnika 40
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 41
Zadaci višestrukog izbora 42
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 44
Rješenja 45
1.1.3. Omjeri i postoci 46
Omjeri 46
Postoci 50
Jednostavni i složeni kamatni račun 52
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 54
Zadaci višestrukog izbora 57
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 59
Rješenja 62
1.1.4. Uređaj u skupu realnih brojeva 64
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 66
Zadaci višestrukog izbora 67
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 68
Rješenja 68
1.1.5. Mjerne jedinice 69
Mjere za duljinu, površinu i obujam (volumen) 69
Mjere za vrijeme 69
Mjere za kut 69
Veliki i mali brojevi 70
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 71
Zadaci višestrukog izbora 72
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 72
Rješenja 73
1.1.6. Apsolutna vrijednost 74
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 75
Zadaci višestrukog izbora 76
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 76
Rješenja 77
1.1.7. Skup kompleksnih brojeva 78
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 84
Zadaci višestrukog izbora 85
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 87
Rješenja 88
1.2. Algebarski izrazi i algebarski razlomci 90
1.2.1. Algebarski izrazi 90
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 91

Rastavljanje algebarskih izraza na faktore 92
Zadaci višestrukog izbora 94
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 95
Rješenja 97
1.2.2. Algebarski razlomci 98
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 99
Zadaci višestrukog izbora 100
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 102
Rješenja 103
1.2.3. Binomni poučak 104
Zadaci višestrukog izbora 108
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 109
Rješenja 110
1.2.4. Polinomi 111
Zadaci višestrukog izbora 114
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 115
Rješenja 116

2. FUNKCIJE, JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE 117
2.1. Pojam funkcije 118
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 123
Zadaci višestrukog izbora 125
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 128
Rješenja 131
2.2. Linearna funkcija 133
2.2.1. Linearna funkcija 133
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 138
Zadaci višestrukog izbora 142
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 144
Rješenja 147
2.2.2. Linearna jednadžba 149
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 151
Zadaci višestrukog izbora 152
Sustavi jednadžbi 154
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 156
Zadaci višestrukog izbora 157
Problemski zadaci 158
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 160
Zadaci višestrukog izbora 161
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 162
Rješenja 165
2.2.3. Linearna nejednadžba 167
Sustavi nejednadžbi 168
Nejednadžbe koje se svode na linearne 169
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 171
Zadaci višestrukog izbora 171
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 173
Rješenja 173
2.3. Funkcija apsolutne vrijednosti 174
2.3.1. Funkcija apsolutne vrijednosti 174
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 177
Zadaci višestrukog izbora 178
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 180
Rješenja 181
2.3.2. Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnom vrijednosti 185
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 188
Zadaci višestrukog izbora 189
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 189
Rješenja 190

2.4. Kvadratna funkcija 191
2.4.1. Kvadratna funkcija 191
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 200
Zadaci višestrukog izbora 204
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 206
Rješenja 209
2.4.2. Kvadratna jednadžba 215
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 219
Zadaci višestrukog izbora 220
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 222
Rješenja 224
2.4.3. Kvadratna nejednadžba 225
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 228
Zadaci višestrukog izbora 229
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 230
Rješenja 231
2.4.4. Funkcija drugog korijena 232
Zadaci višestrukog izbora 235
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 236
Rješenja 237
2.4.5. Iracionalna jednadžba i nejednadžba 239
Iracionalna jednadžba 239
Iracionalna nejednadžba 240
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 241
Zadaci višestrukog izbora 241
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 242
Rješenja 243
2.5. Eksponencijalna i logaritamska funkcija 244
2.5.1. Eksponencijalna funkcija 244
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 248
Zadaci višestrukog izbora 249
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 250
Rješenja 253
2.5.2. Logaritamska funkcija 257
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 262
Zadaci višestrukog izbora 263
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 264
Rješenja 267
2.5.3. Eksponencijalna jednadžba 270
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 272
Zadaci višestrukog izbora 272
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 273
Rješenja 274
2.5.4. Logaritamska jednadžba 275
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 279
Zadaci višestrukog izbora 280
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 281
Rješenja 282
2.5.5. Eksponencijalna i logaritamska nejednadžba 283
Eksponencijalna nejednadžba 283
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 284
Zadaci višestrukog izbora 284
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 285
Rješenja 286
Logaritamska nejednadžba 287
Zadaci višestrukog izbora 289
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 290
Rješenja 291
2.6. Trigonometrijske funkcije 292
2.6.1. Trigonometrijske funkcije 292
Brojevna kružnica 292
Funkcije sinus i kosinus 294
Funkcije tangens i kotangens 306

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 313
Zadaci višestrukog izbora 314
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 317
Rješenja 320
2.6.2. Trigonometrijski identiteti 326
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 330
Zadaci višestrukog izbora 331
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 332
Rješenja 333
2.6.3. Trigonometrijske jednadžbe 334
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 343
Zadaci višestrukog izbora 344
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 345
Rješenja 347
2.6.4. Trigonometrijske nejednadžbe 348
Zadaci višestrukog izbora 350
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 350
Rješenja 351
2.7. Domena i slaganje funkcija. Inverzna funkcija 352
2.7.1. Domena funkcije 352
Zadaci višestrukog izbora 354
2.7.2. Slaganje (kompozicija) funkcija 357
Zadaci višestrukog izbora 359
2.7.3. Inverzna funkcija 360
Primjeri inverznih funkcija 361
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 364
Zadaci višestrukog izbora 365
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 367
Rješenja 372

3. NIZOVI 379
3.1. Pojam niza 380
Primjeri 380
3.2. Aritmetički niz 382
3.3. Geometrijski niz 384
3.4. Beskonačni geometrijski red 386
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 387
Zadaci višestrukog izbora 388
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 390
Rješenja 394

4. GEOMETRIJA 395
4.1 Elementarna geometrija likova u ravnini 396
4.1.1. Trokut 397
Trigonometrija pravokutnog trokuta 397
Poučci o sukladnosti trokuta 400
Poučci o sličnosti trokuta 400
Raznostranični trokut 401
Kut elevacije i kut depresije 402
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 403
Zadaci višestrukog izbora 407
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 411
Rješenja 417
4.1.2. Četverokut i mnogokut 418
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 423
Zadaci višestrukog izbora 425
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 428
Rješenja 431
4.1.3. Kružnica i krug 432
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 435
Zadaci višestrukog izbora 436
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 438
Rješenja 440

4.2. Uvod u geometriju prostora 441
Međusobni položaj dvaju pravaca 441
Međusobni položaj dviju ravnina 441
Međusobni položaj pravca i ravnine 441
Okomitost 442
Ortogonalna projekcija 442
Udaljenost 443
Kut 443
Zadaci višestrukog izbora 444
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 448
Rješenja 449
4.3. Geometrijska tijela 451
4.3.1. Prizma 451
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 453
Zadaci višestrukog izbora 454
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 457
Rješenja 460
4.3.2. Piramida 461
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 465
Zadaci višestrukog izbora 465
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 467
Rješenja 468
4.3.3. Valjak 468
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 470
Zadaci višestrukog izbora 470
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 472
Rješenja 473
4.3.4. Stožac 474
Zadaci višestrukog izbora 476
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 477
Rješenja 478
4.3.5. Kugla 479
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 481
Zadaci višestrukog izbora 481
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 482
Rješenja 483
4.3.6. Rotacijska tijela 484
Zadaci višestrukog izbora 485
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 486
Rješenja 486

5. ANALITIČKA GEOMETRIJA 487
5.1. Koordinatni sustav na pravcu i u ravnini 488
Udaljenost točaka na brojevnom pravcu 488
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 492
Zadaci višestrukog izbora 494
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 495
Rješenja 497
5.2. Vektori 499
Pravilo paralelograma 499
Pravilo trokuta 500
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 505
Zadaci višestrukog izbora 506
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 507
Rješenja 509
5.3. Pravac 510
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 515
Zadaci višestrukog izbora 518
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 523
Rješenja 525

5.4. Krivulje drugog reda 528
5.4.1. Kružnica 528
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 534
Zadaci višestrukog izbora 535
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 537
Rješenja 539
5.4.2. Elipsa 540
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 545
Zadaci višestrukog izbora 546
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 547
Rješenja 549
5.4.3. Hiperbola 550
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 554
Zadaci višestrukog izbora 554
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 555
Rješenja 556
5.4.4. Parabola 557
Zadaci višestrukog izbora 559
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 560
Rješenja 560
5.4.5. Krivulje drugog reda – dodatak 561
Zadaci višestrukog izbora 563
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 563
Rješenja 564

6. DERIVACIJE 565
6.1. Derivacije funkcija 566
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 572
Zadaci višestrukog izbora 572
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 574
Rješenja 575
6.2. Primjena derivacija 576
Zadaci višestrukog izbora 580
Intervali monotonosti 581
Ekstremi funkcije 582
Intervali konveksnosti i konkavnosti 584
Postupak za crtanje grafa funkcije 586
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima 594
Zadaci višestrukog izbora 594
Zadaci kratkog ili produženog odgovora 597
Rješenja 601

PRIMJERI ISPITA 605
Osnovna razina 606
Viša razina 612
Državna matura 2010. – ljetni rok 626

TABLICE FORMULA 633

Predgovor

Državna matura je ozbiljan ispit koji će učenicima gimnazija i ostalih srednjih škola omogućiti upis na visoka učilišta. Za uspješno polaganje bilo kojeg ispita potrebna je dobra priprema.

Priručnik za pripremu ispita iz matematike na državnoj maturi namijenjen je svim gimnazijalcima i učenicima koji polažu državnu maturu. Također će biti koristan nastavnicima matematike i svima koji žele ponoviti svoje znanje srednjoškolske matematike.

Matematika nije u svim školama zastupljena jednakom satnicom. U gimnazijama postoje programi matematike koji su zastupljeni s tri sata tjedno sve četiri godine, a u nekima čak i po 6, odnosno 7 sati tjedno. U nekim strukovnim školama matematika se sluša samo prve dvije godine. Zbog te je činjenice jednom dijelu srednjoškolaca potrebno na kvalitetniji način izložiti pojedine nastavne sadržaje koji su predviđeni programom. Učenicima koji su matematiku učili kao nastavni predmet kroz sve četiri godine s dovoljnim brojem sati, gradivo će biti dobro poznato, no neke će dijelove gradiva moći upoznati i detaljnije jer su objašnjenja potkrijepljena primjerima.

Ova knjiga zamišljena je kao pomoć pri svladavanju sadržaja za državnu maturu. Podijeljena je na šest cjelina koje se podudaraju sa sadržajima i obrazovnim ishodima ***Ispitnoga kataloga za državnu maturu*:**

1. Brojevi i algebra
2. Funkcije, jednadžbe i nejednadžbe
3. Nizovi
4. Geometrija
5. Analitička geometrija
6. Derivacije.

Svaka cjelina sadrži:

– formule koje su dio ispita na državnoj maturi

– kratki podsjetnik vezan uz određeno gradivo

– nekoliko karakterističnih i u potpunosti riješenih primjera

– zadatke koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima s rješenjima

– zadatke višestrukog izbora s rješenjima

– zadatke kratkog ili produženog odgovora s rješenjima

– zadatke modeliranja koji se nalaze unutar skupina zadataka određenog gradiva s rješenjima.

Unutar nekih cjelina dane su mentalne mape (grozd) kako bi se određeni pojam kategorizirao (npr. pojam potencije u 1.1.2.) ili olakšao za razumijevanje, odnosno kako bi predstavljao „dijagram tijeka“ rješavanja određene vrste zadataka (npr. rastavljanje na faktore u 1.2.1.).

Pri rješavanju zadataka učenici rade uobičajene pogreške na koje je posebno upozoreno.

Nakon svih cjelina dani su probni ispiti znanja, posebno za osnovnu i višu razinu, te završni probni ispit znanja po uzoru na ispit iz matematike na državnoj maturi. U ispitima smo vodili računa o udjelu područja ispitivanja i tipovima zadataka, odnosno bodovanju.

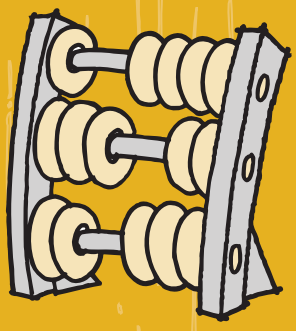
Na kraju, dane su tablice s formulama za osnovnu i višu razinu!

Posebnu zahvalnost želimo iskazati kolegici Kristini Penzar, profesorici matematike koja je pažljivo pregledala sadržaj ovog priručnika i upozorila nas na učinjene pogreške.

Dragi učenici, nadamo se da će vam ovaj priručnik pomoći da se kvalitetno pripremite za polaganje ispita iz matematike. S pripremama svakako počnite na vrijeme.

Želimo vam puno uspjeha!

Autori
Snježana i Damir Šišić



UVOD

Ispit iz matematike

Ispit iz matematike može se polagati na dvjema razinama zahtjevnosti – na višoj i osnovnoj razini. Na višoj razini ispit traje 180 minuta, a na osnovnoj 150 minuta. Ispit sadrži zadatke zatvorenog i otvorenog tipa. Zadaci zatvorenoga tipa su zadaci višestrukog izbora. Učenik zaokružuje slovo ispred jednoga od četiriju ponuđenih odgovora.

Zadaci otvorenoga tipa su zadaci kratkih odgovora i zadaci produženih odgovora. U zadacima kratkih odgovora učenik odgovara na postavljeno pitanje, dok u zadacima produženih odgovora učenik prikazuje postupak rješavanja i odgovara na postavljeno pitanje.

Za polaganje ispita učenici rabe uobičajen pribor za pisanje i brisanje, geometrijski pribor (trokut, šestar), džepno računalo (znanstveni kalkulator) i tablice (formule) koje će biti priložene uz ispit.

OBRAZOVNI ISHODI

Za svako područje ispitivanja određeni su posebni ciljevi ispita, odnosno konkretni opisi onoga što pristupnik mora znati, razumjeti i moći učiniti kako bi postigao uspjeh na ispitu.

Obrazovni ishodi za osnovnu i višu razinu ispita prikazani su, radi bolje preglednosti, u sljedećoj tablici. U njoj su detaljno razrađeni sadržaji koji će se ispitivati, te obrazovni ishodi vezani uz pojedine sadržaje. Obrazovni sadržaji i obrazovni ishodi koji se **ne ispituju** na osnovnoj razini označeni su crvenom bojom.

OBRAZOVNI ISHODI ZA OSNOVNU I VIŠU RAZINU ISPITA

1. BROJEVI I ALGEBRA	
Sadržaji	**Obrazovni ishodi**
skupovi ***N***, ***Z***, ***Q***, ***R*** i ***C***	• razlikovati skupove ***N***, ***Z***, ***Q***, ***R*** i ***C*** (poznavati termine: prirodan, cijeli, racionalan, iracionalan, realan i kompleksan broj te razlikovati navedene brojeve) • uspoređivati brojeve • prepoznati i rabiti oznake intervala: $\langle a,b\rangle$, $[a,b\rangle$, $\langle a,b]$, $[a,b]$ • zapisati skupove realnih brojeva intervalima i prikazivati ih na brojevnome pravcu • rabiti zapis kompleksnih brojeva u standardnome i trigonometrijskome obliku
elementarno računanje	• zbrajati, oduzimati, množiti, dijeliti, korjenovati, potencirati, određivati apsolutne vrijednosti • zaokruživati brojeve • rabiti džepno računalo
postoci i omjeri	• rabiti postotke • rabiti omjere

algebarski izrazi i algebarski razlomci	• provoditi operacije s potencijama i korijenima • zbrajati, oduzimati i množiti jednostavnije algebarske izraze • zbrajati, oduzimati i množiti algebarske izraze • rabiti formule za kvadrat i kub binoma, razliku kvadrata i razliku i zbroj kubova • zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti jednostavnije algebarske razlomke • zbrajati, oduzimati, množiti i dijeliti algebarske razlomke • iz zadane formule izraziti jednu veličinu pomoću drugih • primijeniti binomni poučak
mjerne jedinice	• računati s jedinicama za duljinu, površinu, obujam, vrijeme, masu i novac • pretvarati mjerne jedinice • rabiti mjerne jedinice u geometriji i u zadacima s tekstom

2. FUNKCIJE	
Sadržaji	**Obrazovni ishodi**
pojam funkcije, zadavanje i operacije s njima	• rabiti funkcije zadane tablično, grafički, algebarski i riječima • izvoditi operacije s funkcijama (zbrajanje, oduzimanje, množenje, dijeljenje, komponiranje)
linearna i kvadratna funkcija, funkcija apsolutne vrijednosti, funkcija drugoga korijena, polinomi i racionalne funkcije, eksponencijalna funkcija s bazom 10, eksponencijalna i logaritamska funkcija, trigonometrijske funkcije	• odrediti domenu funkcije • odrediti sliku funkcije • izračunati funkcijske vrijednosti • prikazati funkcije grafički • prikazati funkcije tablično • interpretirati graf funkcije • odrediti nultočke funkcije • odrediti sjecišta grafa s koordinatnim osima • iz zadanih svojstava, elemenata ili grafa odrediti funkciju • odrediti i primijeniti rast/pad funkcije • odrediti tijek funkcije • razlikovati parne i neparne funkcije • za kvadratnu funkciju: – interpretirati ulogu vodećega koeficijenta i diskriminante – odrediti minimum/maksimum funkcije, odnosno tjeme parabole • za polinome i racionalne funkcije: – crtati grafove polinoma (najviše 3. stupnja) – crtati grafove racionalnih funkcija (polinomi najviše 2. stupnja u brojniku i nazivniku)

	• za ekponencijalne i logaritamske funkcije: – rabiti osnovne eksponencijalne i logaritamske identitete • za trigonometrijske funkcije: – definirati trigonometrijske funkcije na brojevnoj kružnici – odrediti temeljni period i primijeniti svojstvo periodičnosti trigonometrijskih funkcija – primijeniti osnovne trigonometrijske identitete: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$ – primijeniti adicijske formule – primijeniti formule pretvorbe zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak i obrnuto – prepoznati, odnosno nacrtati grafove funkcija oblika: $f(x) = A \sin(Bx + C) + D$ $f(x) = A \cos(Bx + C) + D$
nizovi	• prepoznati zadani niz • prepoznati aritmetički niz • rabeći definiciju i svojstva aritmetičkoga niza odrediti opći član te zbroj prvih *n*-članova • prepoznati geometrijski niz • rabeći definiciju i svojstva geometrijskoga niza odrediti opći član te zbroj prvih *n*-članova i zbroj reda
derivacija funkcije	• derivirati konstantnu funkciju, funkciju potenciranja i trigonometrijske funkcije • derivirati zbroj, razliku, umnožak, kvocijent i kompoziciju funkcija • odrediti tangentu na graf funkcije u točki • rabiti derivaciju funkcije kod ispitivanja tijeka funkcije

3. JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE	
Sadržaji	**Obrazovni ishodi**
linearne jednadžbe i nejednadžbe	• rješavati linearne jednadžbe • rješavati linearne nejednadžbe
kvadratne jednadžbe i nejednadžbe	• rješavati kvadratne jednadžbe • rješavati kvadratne nejednadžbe • rabiti Viètеove formule

jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima i s $\sqrt{}$	• rješavati jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnim vrijednostima, primjerice: $\lvert x-3\rvert+x=5$, $\lvert 2x+3\rvert\geq 5$ • rješavati jednadžbe i nejednadžbe s $\sqrt{}$, primjerice: $\sqrt{x^2-4}=1$
jednostavnije polinomske i racionalne jednadžbe i nejednadžbe	• rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se mogu faktorizirati • rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne, primjerice: bikvadratne jednadžbe
jednostavnije eksponencijalne jednadžbe, eksponencijalne i logaritamske jednadžbe i nejednadžbe	• rješavati jednadžbe/nejednadžbe s potencijama jednakih baza, primjerice: jednostavnije: $10^{x+1}=\frac{1}{10}$, $3\cdot 10^x=300$ složenije: $2^{2x+1}=\sqrt{8}$, $0.5^x>32$ • rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se mogu riješiti izravnom primjenom logaritmiranja, primjerice: $4^x<5$ • rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se mogu riješiti izravnom primjenom definicije logaritma, primjerice: $\log_7 x=3$ • rješavati jednadžbe/nejednadžbe u kojima se rabe osnovna svojstva računanja s eksponentima i logaritmima, primjerice: $\log_2(x+3)+\log_2(x+2)-1=0$ • rješavati jednadžbe/nejednadžbe koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne, primjerice: $9^x-5\cdot 3^x+4=0$
trigonometrijske jednadžbe	• odrediti opće rješenje trigonometrijske jednadžbe ili rješenja iz zadanog intervala rabeći definicije trigonometrijskih funkcija, primjerice: $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=0.5$ • odrediti opće rješenje trigonometrijske jednadžbe ili rješenja iz zadanog intervala rabeći trigonometrijske identitete, primjerice: $2\sin 2x=\cos x$ • rješavati jednadžbe koje se supstitucijom mogu svesti na kvadratne, primjerice: $2\,\mathrm{tg}^2 x-\mathrm{tg}\,x-1=0$
jednostavniji sustavi linearnih i/ili kvadratnih jednadžbi, sustavi navedenih jednadžbi i nejednadžbi	• rješavati sustave algebarski i grafički • interpretirati grafički prikaz jednadžbama

4. GEOMETRIJA	
Elementarna geometrija	
Sadržaji	**Obrazovni ishodi**
elementarna geometrija likova u ravnini	• odrediti mjeru kuta • razlikovati vrste trokuta • rabiti pojmove sukladnosti i sličnosti • rabiti poučke o sukladnosti trokuta • rabiti poučke o sličnosti trokuta • rabiti koeficijent sličnosti • rabiti Pitagorin poučak i njegov obrat • rabiti osnovna svojstva paralelograma, trapeza i pravilnih mnogokuta • rabiti osnovna svojstva kružnice i kruga • odrediti elemente kružnice i kruga (središte i polumjer, kružni luk, kružni isječak, obodni i središnji kut, tetiva i tangenta) i rabiti njihova svojstva • rabiti poučak o obodnom i središnjem kutu i Talesov poučak • odrediti opseg i površinu
odnosi među geometrijskim objektima u prostoru	• prepoznati međusobni položaj dvaju pravaca i ravnina u prostoru • odrediti probodište pravca i ravnine • odrediti ortogonalnu projekciju točke i dužine • odrediti kut pravca i ravnine i kut dviju ravnina
prizma, piramida, valjak, stožac, kugla	• skicirati geometrijska tijela i prepoznati tijelo iz mreže • prepoznati elemente tijela – osnovku (bazu), vrh, visinu, pobočke (strane) i plašt • odrediti oplošje i obujam
Trigonometrija	
trigonometrija pravokutnoga trokuta, trigonometrija raznostraničnoga trokuta	• rabiti definicije sinusa, kosinusa i tangensa kuta u pravokutnome trokutu • rabiti poučak o sinusima i kosinusima • primijeniti trigonometriju u planimetriji i stereometriji

5. ANALITIČKA GEOMETRIJA	
koordinatni sustav na pravcu i u ravnini	• prikazati točke u koordinatnome sustavu • očitati koordinate točaka u koordinatnome sustavu • izračunati udaljenost točaka • izračunati koordinate polovišta dužine

vektori	• zbrajati vektore, množiti vektore skalarom i skalarno množiti vektore • rabiti koordinatni prikaz vektora • odrediti duljinu vektora • odrediti kut među vektorima
jednadžba pravca	• rabiti eksplicitni i implicitni oblik jednadžbe pravca • odrediti jednadžbu pravca zadanoga točkom i koeficijentom smjera • odrediti jednadžbu pravca zadanoga dvjema točkama • odrediti kut između dvaju pravaca • rabiti uvjet usporednosti i okomitosti pravaca • izračunati udaljenost točke od pravca
krivulje drugoga reda	• odrediti jednadžbu kružnice iz zadanih elemenata i obrnuto • odrediti jednadžbu elipse iz njezinih elemenata i obrnuto • odrediti jednadžbu hiperbole iz njezinih elemenata i obrnuto te rabiti pojam i jednadžbe asimptota • odrediti jednadžbu parabole iz njezinih elemenata i obrnuto • odrediti odnos između krivulje drugoga reda i pravca • odrediti jednadžbu tangente u točki krivulje • rabiti uvjet dodira pravca i kružnice

6. MODELIRANJE	
Sadržaji	**Obrazovni ishodi**
sva područja ispitivanja	• modelirati situacije rabeći: – brojeve – algebru – geometriju – funkcije – jednadžbe – nejednadžbe

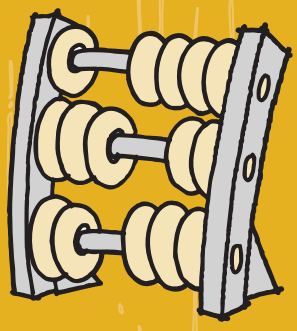
STRUKTURA ISPITA

Udjeli područja ispitivanja na obje razine prikazani su u sljedećoj tablici.

PODRUČJE ISPITIVANJA	BODOVNI UDIO	
	osnovna razina	viša razina
Brojevi i algebra	45%	20%
Funkcije	10%	25%
Jednadžbe i nejednadžbe	15%	20%
Geometrija	15%	25%
Modeliranje	15%	10%
UKUPNO	100%	100%

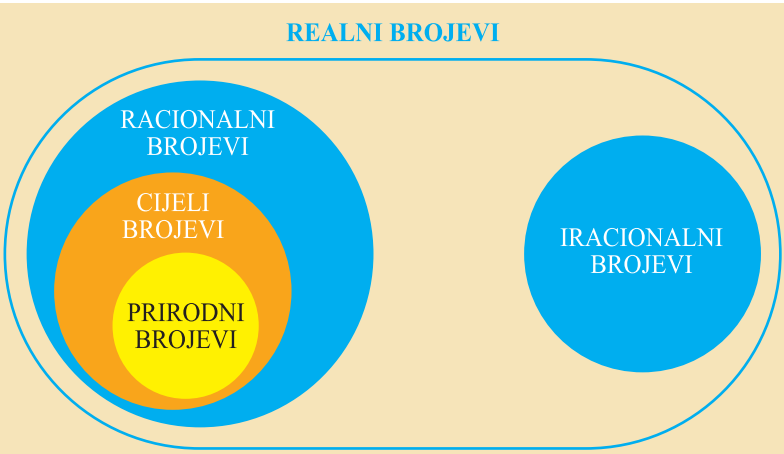
Struktura ispita na obje razine je ovakva:

ISPITNA CJELINA	TIP ZADATAKA	osnovna razina		viša razina	
		broj zadataka	bodovanje	broj zadataka	bodovanje
1.	Zadaci višestrukog izbora	16	20	15	20
2.	Zadaci kratkih odgovora	12	20	13	26
3.	Zadaci produženih odgovora	–	–	2	14
UKUPNO		28	40	30	60



1. BROJEVI I ALGEBRA

1.1. Skupovi brojeva



1.1.1. Skupovi prirodnih, cijelih, racionalnih i realnih brojeva

Skup prirodnih brojeva obilježavamo sa $\boldsymbol{N}$.
$\boldsymbol{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$
Ako prirodne brojeve zbrajamo ili množimo, rezultat će biti prirodan broj.
To svojstvo naziva se zatvorenost skupa $\boldsymbol{N}$ na računske operacije zbrajanja i množenja.

Pri tome za $a, b, c \in \boldsymbol{N}$ vrijede ova svojstva:

komutacija (zamjena)	$a + b = b + a, \quad ab = ba$
asocijacija (grupiranje)	$(a + b) + c = a + (b + c), \quad (ab)c = a(bc)$
distributivnost	$(a + b)c = ac + bc$
neutralni element za množenje	$a \cdot 1 = a.$

Primjer 1: Izračunajmo:
$71-\{-86+97-[84+37-99+(-3-15+29)]-71\}.$

Rješenje: $71-\{-86+97-[84+37-99+(-3-15+29)]-71\} =$

$= 71-\{11-[22+11]-71\} =$

$= 71-\{11-22-11-71\}$

$= 71+22+71 =$

$= 164$

Razlika dvaju prirodnih brojeva $a - b$ nije nužno prirodan broj. Općenito je to cijeli broj. Skup cijelih brojeva označavamo sa $\boldsymbol{Z}$.
$\boldsymbol{Z} = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Skup $\boldsymbol{Z}$ je zatvoren na računske operacije zbrajanja, množenja i oduzimanja. Sva svojstva koja vrijede u skupu $\boldsymbol{N}$, prenose se u skup $\boldsymbol{Z}$, no s negativnim brojevima dolaze i nova svojstva za $a, b, c \in \boldsymbol{Z}$:

neutralni element za zbrajanje $\quad a + 0 = a,$

suprotni broj za zbrajanje $\quad a + (-a) = 0.$

Primjer 2: Izračunajmo: $-31-\{78-56+[-32-5-(7-8+2)-3]+4-5\}.$

Rješenje:
$$\begin{aligned}
&-31-\{78-56+[-32-5-(7-8+2)-3]+4-5\} = \\
&= -31-\{22+[-37-1-3]-1\} = \\
&= -31-\{21-41\} = \\
&= -31+20 = -11
\end{aligned}$$

Količnik cijelih brojeva, $a : b$, nije uvijek cijeli broj. Općenito je to racionalan broj (razlomak). Skup racionalnih brojeva označavamo sa $\boldsymbol{Q}$.

$$\boldsymbol{Q} = \left\{\frac{m}{n} : m \in \boldsymbol{Z},\ n \in \boldsymbol{N}\right\}$$

Skup $\boldsymbol{Q}$ je zatvoren na računske operacije zbrajanja, množenja, oduzimanja i dijeljenja. Sva dosadašnja svojstva računskih operacija vrijede i u skupu $\boldsymbol{Q}$, ali za $a \in \boldsymbol{Q}$ vrijedi i

inverzni (recipročni) element za množenje $a \cdot \frac{1}{a} = a \cdot a^{-1} = 1.$

Između svaka dva racionalna broja postoji još bar jedan racionalan broj (**gustoća skupa $\boldsymbol{Q}$**).

Primjer 3: Izračunajmo: $\frac{5}{3} - \frac{13}{8} : 1.5 + \frac{5}{12}.$

Rješenje:
$$\begin{aligned}
&\frac{5}{3} - \frac{13}{8} : 1.5 + \frac{5}{12} = \\
&= \frac{5}{3} - \frac{13}{8} : \frac{3}{2} + \frac{5}{12} = \\
&= \frac{5}{3} - \frac{13}{8} \cdot \frac{2}{3} + \frac{5}{12} = \\
&= \frac{5}{3} - \frac{13}{12} + \frac{5}{12} = \\
&= \frac{5}{3} - \frac{8}{12} = \\
&= \frac{5}{3} - \frac{2}{3} = 1
\end{aligned}$$

Korijen racionalnog broja ne možemo uvijek prikazati kao razlomak. Takve brojeve nazivamo **iracionalni brojevi**. U skupu iracionalnih brojeva osim nekih korijena su i transcedentni brojevi: π, e,... Skup iracionalnih brojeva nije zatvoren na računske operacije zbrajanja, oduzimanja, množenja i dijeljenja. Unija racionalnih i iracionalnih brojeva daje **skup realnih brojeva**. Ta dva skupa nemaju zajedničkih elemenata.

Skup realnih brojeva označavamo sa $\boldsymbol{R}$. Vrijedi: $\boldsymbol{R} = \boldsymbol{Q} \cup \boldsymbol{I}$.

Skup $\boldsymbol{R}$ je zatvoren na računske operacije zbrajanja, množenja, oduzimanja, dijeljenja i korjenovanja. Sva dosadašnja svojstva prenose se u skup $\boldsymbol{R}$.

Primjer 4: Izračunajmo: $\dfrac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) : 0.25}{\frac{37}{300} : 0.0925} + 12.5 \cdot 0.64.$

Rješenje:

$$\frac{\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right) : 0.25}{\frac{37}{300} : 0.0925} + 12.5 \cdot 0.64 =$$

$$= \frac{1 : \frac{1}{4}}{\frac{37}{300} : \frac{925}{10\,000}} + \frac{125}{10} \cdot \frac{64}{100} =$$

$$= \frac{1 \cdot 4}{\frac{37}{300} \cdot \frac{400}{37}} + \frac{25}{2} \cdot \frac{16}{25} =$$

$$= \frac{4}{\frac{4}{3}} + 8 = 3 + 8 = 11$$

Kvadrat realnog broja ne može biti negativan broj, ali kvadrat kompleksnog broja može.

Skup kompleksnih brojeva označavamo sa $\boldsymbol{C}$. Za operacije zbrajanja i množenja vrijede svojstva komutativnosti, asocijativnosti i distributivnosti.

Primjer 5: Prikažimo $\sqrt{-16}$ kao kompleksan broj.

Rješenje: $\sqrt{-16} = \sqrt{16} \cdot \sqrt{-1} = 4i$

Pri računanju, u bilo kojem skupu brojeva, treba voditi računa o redoslijedu računskih operacija.

Mnoge od ovih zadataka možemo izračunati pomoću džepnog računala ili kalkulatora. Znanstveni kalkulatori „vode računa“ o redoslijedu računskih operacija.

Pravila o redoslijedu računskih operacija

1. Najprije pojednostavimo izraze u zgradama, a ako ima više zagrada, rješavamo najprije zagrade unutar kojih više nema zagrada.
2. Potenciramo i korjenujemo, pa množimo i dijelimo redoslijedom kako je zapisano.
3. Na kraju zbrajamo i oduzimamo onim redom kako je naznačeno.

$$1-2\cdot 3=\cancel{-1\cdot 3=-3}$$

$$1-2\cdot 3=1-6=-5$$

Primjer 6: Zapišimo decimalne brojeve $0.\dot{3}$, $0.\dot{2}\dot{3}$, $0.2\dot{3}$ kao racionalne brojeve.

Rješenje: a) $0.\dot{3}=0.33333...=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ b) $0.\dot{2}\dot{3}=0.232323...=\frac{23}{99}$

c) $0.2\dot{3}=0.233333333...=0.2+0.033333...=$

$$=\frac{2}{10}+\frac{3}{90}=\frac{7}{30} \quad \text{ili} \quad \frac{23-2}{90}=\frac{21}{90}=\frac{7}{30}$$

Primjer 7: Zaokružimo broj 3246.23537 na:

a) deseticu b) jedinicu c) jednu decimalu (desetinku)
d) na dvije decimale (stotinku) e) tri decimale (tisućinku).

Rješenje: a) 3 250 b) 3 246 c) 3 246.2
d) 3 246.24 e) 3 246.235

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Odredite tri racionalna broja između $\frac{1}{9}$ i $\frac{1}{7}$.

2. (NI 2006.) Neka je $n \geq 9$ prirodan broj. U ovisnosti o n odredite koji je od sljedećih brojeva najveći:

$$a=\frac{9}{n}, \quad b=\frac{n}{9}, \quad c=\frac{n+1}{9}, \quad d=\frac{9}{n-1}.$$

3. (IK 2006.) Izračunajte: $0.5-\frac{7}{2}$.

4. (IK 2007.) $\frac{0.05}{0.1}$.

5. (NI 2008.) $\frac{-7+5\cdot 9}{7:2-1}=$

6. (NI 2009.) Koju vrijednost ima razlomak $\frac{231}{630}$?

a) $\frac{11}{90}$ b) $\frac{7}{30}$ c) $\frac{11}{30}$ d) $\frac{7}{10}$

7. (NI 2009.) Koji od brojeva pripada skupu iracionalnih brojeva?

a) 4. 33 b) $-\sqrt{16}$ c) $-\frac{4}{7}$ d) $\sqrt{5}$

8. (NI 2009.) Izračunajte vrijednost izraza $\frac{1+3\cdot(1.5-1)}{0.1-2\frac{3}{5}}$.

9. (NI 2009.) Koja je vrijednost razlomka $\frac{0.001^2}{100\cdot 0.1}$?

10. (IK 2009.) Izračunajte vrijednost izraza $\frac{1+4.5\cdot\frac{1}{3}}{(2:0.1-4)\cdot 0.125}$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Skup prirodnih brojeva označavamo slovom:

a) $\boldsymbol{N}$ b) $\boldsymbol{Z}$ c) $\boldsymbol{Q}$ d) $\boldsymbol{R}$.

2. Svaki iracionalan broj moguće je zapisati u obliku $\frac{m}{n}$, gdje je $m\in\boldsymbol{Z}$ i $n\in\boldsymbol{N}$.

a) DA b) NE

3. Koji od sljedećih brojeva nije racionalan?

a) $-\frac{3}{7}$ b) $\sqrt{\frac{25}{27}}$ c) $4.\dot{3}$ d) $\sqrt{\frac{5}{125}}$

4. Izraz $\left(\frac{\frac{1}{8}+2\cdot\frac{9}{4}}{4+\frac{1}{8}}\right)\cdot\left(\frac{11}{37}\right)$ iznosi:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\frac{1}{3}$ c) 37 d) 11.

5. Ako je $a : b = 5 : 2$, i $b : c = 4 : 7$, onda je omjer $\frac{a-c}{a+c} : \frac{b-c}{b+c}$ jednak:

a) $\frac{5}{4}$ b) $-\frac{11}{17}$ c) $-\frac{4}{5}$ d) $\frac{13}{19}$.

6. Na testu iz matematike Igor je točno riješio 24 od 30 mogućih zadataka, a Matea 16 od 24. Tko je bolje riješio test?

a) Igor b) Matea c) Jednako dobro su riješili test.

7. Majka je ispekla kolač. Sin je pojeo 1/3 kolača, kći je pojela 1/5 kolača, a 1/4 kolača pojeo je otac. Koliki je komad kolača ostao?

a) Ništa nije ostalo. b) 1/12 c) 13/60 d) 1/15

8. Koliko je $\frac{0.0918}{0.18}$?

a) 0.051 b) 5.1 c) 51 d) 0.51

9. Koji je broj racionalan?

a) $\sqrt{-25}$ b) $\sqrt{9-4}$ c) $\sqrt{4-9}$ d) $\sqrt{4}-\sqrt{9}$

10. Izračunajte: $\left(\frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{2}}+4^2}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}+4^{-2}}\right)^{-1}\cdot(-4)^0$.

a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{8}$ d) 8

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Ako je *n* prirodan broj, sa _____ obilježavamo neparan prirodan broj.

2. Zakon komutacije za množenje racionalnih brojeva glasi _____

_____ .

3. Svojstvo skupa racionalnih brojeva da se između svaka dva racionalna broja nalazi beskonačno mnogo racionalnih brojeva nazivamo _____

_____ .

4. Nakon što je objavljeno kako u igri loto premija iznosi 7 000 000 000 kuna, u ponedjeljak je prodano 201 609 listića, u utorak 123 619, u srijedu 196 918, u četvrtak 242 687, a u petak 251 009. Koliko je listića lota prodano tih pet dana?

5. Izračunajte.

a) $4-\{-3-[1-(10-9)]\}$ b) $10-15:3+(6-3)^3\cdot(7-2^2)$

c) $(16:4-1)-81:9:3+2^2$ d) $(6-2\cdot 2)^3+3^2:(4^2-13)\cdot 1^4$

e) $2\cdot 3^2-4\cdot 2^3+5\cdot 4^2$ f) $(-2)^3+(-3)^3:(-9)+(-5)$

g) $20:5-7+3\cdot 9$ h) $19+[(15-5+2)-8+(8+4-9)-7]-19$

6. Izračunajte.

a) $-\left[\left(\frac{8}{5}+\frac{11}{30}-\frac{8}{15}\right)-\left(\frac{17}{10}-\frac{7}{20}\right)\right]+\frac{5}{12}$

b) $\left(8\frac{2}{3}-5\frac{1}{6}\right)+\left(10\frac{2}{7}-8\frac{5}{9}\right)$

c) $\left(-1\frac{3}{4}\right)\cdot\left[\left(4\frac{1}{2}\right)+\left(3\frac{2}{3}\right)\right]$

d) $\left[\frac{1}{2}+\left(-\frac{3}{7}\right)\right]^3-\left[\left(-\frac{2}{9}\right)\cdot\left(-\frac{3^2}{11}\right)\right]$

e) $\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{2}-\frac{7}{5}+1\right)+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{30}+\frac{1}{20}\right)\cdot\frac{4}{5}-\frac{2}{5}\right]\cdot\frac{10}{7}$

f) $\left\{\left(-\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right)^2:\left[\frac{3}{5}:\left(2-\frac{1}{5}\right)\right]^4\right\}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^3+3$

7. Izračunajte.

a) $\left[\left(\frac{2}{3}-\frac{8}{15}\right)\cdot 5\frac{1}{7}-2\right]:\left[\left(0.75+\frac{1}{4}\right):\frac{2}{3}+0.8\right]$

b) $\dfrac{4\left(\frac{3}{4}-\frac{5}{8}\right)-\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}-\frac{3}{5}\right)}$

c) $\left[\left(2.5-3\frac{1}{3}\right)\cdot 1.2\right]:\left(0.75-\frac{2}{3}\right)$

d) $\left\{\frac{15}{12}-\frac{10}{6}\cdot\left[\frac{5}{14}+\frac{5}{21}-\frac{1}{30}:\left(1-\frac{13}{20}\right)^2-1\right]\right\}\cdot\frac{16}{5}$

8. Izračunajte.

a) $\left(\frac{1+0.96}{1-0.96}-1\right):\left(\frac{1+0.96}{1-0.96}+1\right)$

b) $\frac{(-0.1)^{-3}}{-0.2^2}-\left(\frac{2^{-1}}{3}\right)^{-1}\cdot 0.1^{-2}\cdot 0.01^{-1}$

c) $\left\{\left(2-\frac{3}{2}\right)^3+\left[\left(\frac{1}{3}-0.4\right)\cdot\left(-\frac{1}{3}+1.5\right)+\frac{1}{30}\right]:\frac{1}{9}\right\}:\left[\left(\frac{2}{5}+1.4\cdot\frac{3}{7}\right)^2-0.45\right]$

d) $\dfrac{1+\frac{1}{3}:\left(1+\frac{1}{18}-\frac{2}{12}\right)-\frac{1}{4}}{\frac{4}{9}\cdot\left(\frac{5}{14}-\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{56}\right)+\frac{10}{28}}$

e) $\dfrac{-\frac{1}{9}\left\{0.5-\left[-\frac{33}{32}\left(-\frac{7}{11}+1\right)^2:\frac{1}{11}\right]^2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\right)\right\}^2}{0.25-\frac{1}{3}}$

f) $\dfrac{\left[\left(3.75\cdot\frac{8}{45}\right)^3-\left(\frac{7}{8}:1.75\right)^3\right]:\left(\frac{4}{9}+\frac{2}{3}\cdot 0.5+0.25\right)}{\left\{\left[\left(0.625-\frac{1}{8}\right)^4-\left(\frac{2}{7}\cdot\frac{14}{3}-1\right)^4\right]:\left(0.25+\frac{1}{9}\right)\right\}:\frac{15}{18}}$

9. Napišite četiri racionalna broja između brojeva $\frac{1}{11}$ i $\frac{1}{9}$.

10. Recipročna vrijednost broja $-\frac{2}{3}$ je _____ .

11. Ivana povremeno pomaže u restoranu „Bundek“. Ponedjeljkom radi $3\frac{1}{2}$ sata, utorkom $4\frac{1}{4}$ sata, srijedom $2\frac{3}{4}$ sata, četvrtkom $6\frac{1}{2}$ sati, subotom $7\frac{4}{7}$ sati, a petak i nedjelja su joj slobodni dani. Koliko sati radi tijekom tjedna?

12. Ostavština gospodina Mrtvića iznosi 825 350 kuna. Polovinu iznosa ostavio je svojoj supruzi, a ostatak će se u jednakim dijelovima raspodijeliti na njihovo petoro djece. Koliko će novaca dobiti svako dijete?

13. Vlasnik trgovine alatima kupuje čekiće po 40 kuna, a prodaje ih za 70 kuna. Libele kupuje po cijeni od 110 kuna, a prodaje ih po cijeni od 190 kuna. Koliko je novaca zaradio ako je prodao 27 čekića i 16 libela?

14. Ako su 2/3 poslovne zgrade iznajmljene trgovinama, a 1/5 odvjetničkim uredima, koji se dio zgrade koristi u neke druge svrhe (prikažite u obliku potpuno skraćenog razlomka)?

15. U nekom poduzeću zaposleno je 868 ljudi. Na određeni dan $\frac{1}{31}$ zaposlenika bila je odsutna zbog obaveza, a $\frac{1}{14}$ zbog bolesti. Koliko zaposlenika taj dan nije bilo u poduzeću?

16. Dario i Sven igraju križić-kružić. Nakon odigranih prvih 8 partija, 6 partija je dobio Sven, a u odigranih sljedećih 7 partija, Dario je dobio 5 partija. Tko bolje igra križić-kružić?

17. Gradski proračun iznosi 72 000 000 kuna. Ako je 0.16 od proračuna namijenjeno za zdravstveno osiguranje građana, 0.22 od proračuna za policijsku zaštitu, 0.09 od proračuna za školstvo, 0.38 od proračuna za socijalnu skrb i 0.15 od proračuna za ostale troškove, koliki je proračun (u kunama) namijenjen za:

a) zdravstveno osiguranje
b) policijsku zaštitu
c) školstvo
d) socijalnu skrb
e) ostale troškove?

18. Helikopter je na nadmorskoj visini od 355 metara, a podmornica je 82 metra pod morem točno ispod helikoptera. Kolika je njihova udaljenost?

19. Dionica čija je vrijednost početkom tjedna bila 43 kune u utorak je porasla za 2 kune, u srijedu pala za 5 kuna, u četvrtak pala za još 1 kunu, u petak porasla za 4 kune, a u subotu porasla za još 3 kune. Skicirajte rast i pad vrijednosti dionice u koordinatnom sustavu tako da na osi x obilježite dane u tjednu, a na osi y vrijednosti dionica (možete uzeti početak y-osi 35).

a) U kojem periodu je vrijednost dionice najviše rasla?
b) U kojem periodu je vrijednost dionice najviše pala?
c) Kada je vrijednost dionice bila najmanja i koliko je iznosila?
d) Kada je vrijednost dionice bila najveća i koliko je iznosila?

20. U nekom gradu mjerene su temperature zraka tijekom dana. Ujutro u 6 sati izmjerena je temperatura od 26.2 °C, dva sata kasnije temperatura je pala za 2.6 °C, nakon tri sata porasla je za 4.8 °C, u idućem satu porasla je za još 1.8 °C, a tijekom sljedeća 4 sata pala je za 3.4 °C. Nacrtajte graf promjene temperature u ovisnosti o vremenu, te očitajte rezultate sa slike.

a) U kojem razdoblju je temperatura najviše rasla? Za koliko Celzijevih stupnjeva je temperatura porasla?
b) Kolika je temperatura na kraju mjerenja?
c) Kolika je razlika početne i konačne temperature?
d) Kolika je najniža temperatura i u koliko je sati postignuta?
e) Kolika je bila najviša temperatura i u koje je vrijeme postignuta?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. Bilo koji broj između $\frac{1}{9}$ i $\frac{1}{7}$, na primjer:

- $0.12,\ 0.13,\ 0.14$, jer je $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$, a $\frac{1}{7} = 0.\dot{1}42857\dot{}$
- $\frac{15}{126} = \frac{5}{42}, \frac{16}{126} = \frac{8}{63}, \frac{7}{126}$, jer je $\frac{1}{9} = \frac{14}{126}$, a $\frac{1}{7} = \frac{18}{126}$.

Bilo koji drugi brojevi između $\frac{1}{9}$ i $\frac{1}{7}$, na primjer $\frac{1}{8}, \frac{4}{30}, \frac{16}{125}$.

2. Za $n = 9$, najveći broj je d. Za $n > 9$, najveći broj je c. **3.** -3 **4.** 0.5 **5.** $\frac{76}{5}$

6. c **7.** d **8.** -1 **9.** 10^{-7} **10.** $\frac{5}{4}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** b **3.** b **4.** b **5.** b **6.** a **7.** c **8.** d **9.** d **10.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $2n-1$ **2.** $a \cdot b = b \cdot a,\ a, b \in Q$ **3.** gustoća skupa Q **4.** 1 015 842

5. a) 7 b) 86 c) 4 d) 11 e) 66 f) -10 g) 24 h) 0

6. a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{659}{126}$ c) $-\frac{343}{24}$ d) $-\frac{5\,477}{30\,184}$ e) $\frac{3}{2}$ f) $\frac{16}{5}$

7. a) $-\frac{4}{7}$ b) $\frac{10}{7}$ c) -12 d) $\frac{3\,356}{441}$

8. a) $\frac{24}{25}$ b) $-35\,000$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{9}{4}$ e) $\frac{1}{3}$ f) 1

9. $\frac{1}{9} \approx 0.1111\ldots$, $\frac{1}{11} \approx 0.0909\ldots \Rightarrow \frac{1}{11}, 0.0919, 0.0929, 0.0939, 0.0949, \frac{1}{9}$

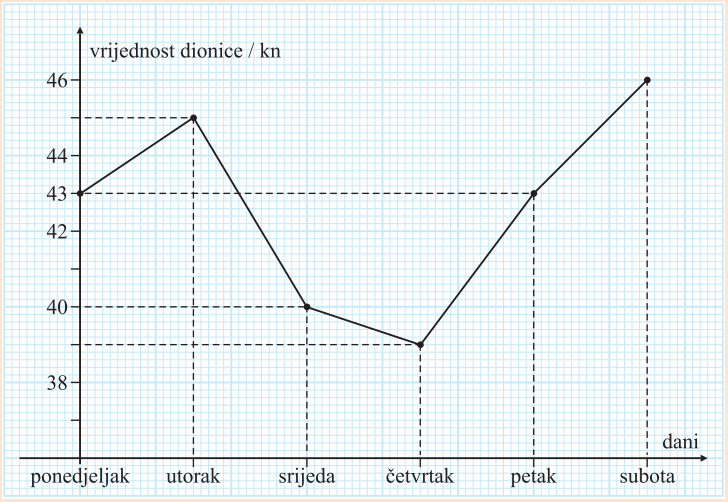
10. $-\frac{3}{2}$ **11.** 24 sata i 34 minute **12.** Svako dijete dobit će 82 535 kuna.

13. Zaradio je 2 090 kuna. **14.** $\frac{2}{15}$ **15.** Taj dan 90 ljudi nije bilo na poslu. **16.** Sven bolje igra.

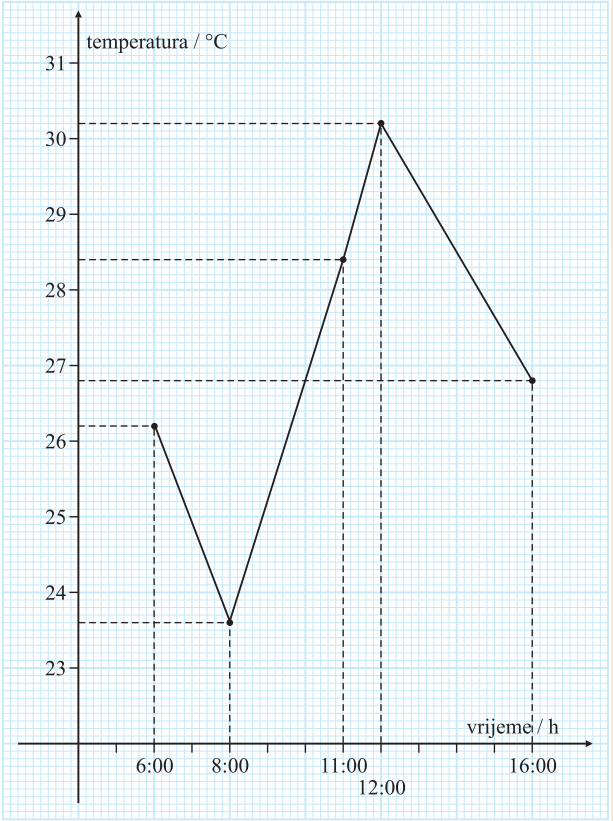
17. a) 11 520 000 kuna b) 15 840 000 kuna c) 6 480 000 kuna
d) 27 360 000 kuna e) 10 800 000 kuna

18. 437 m

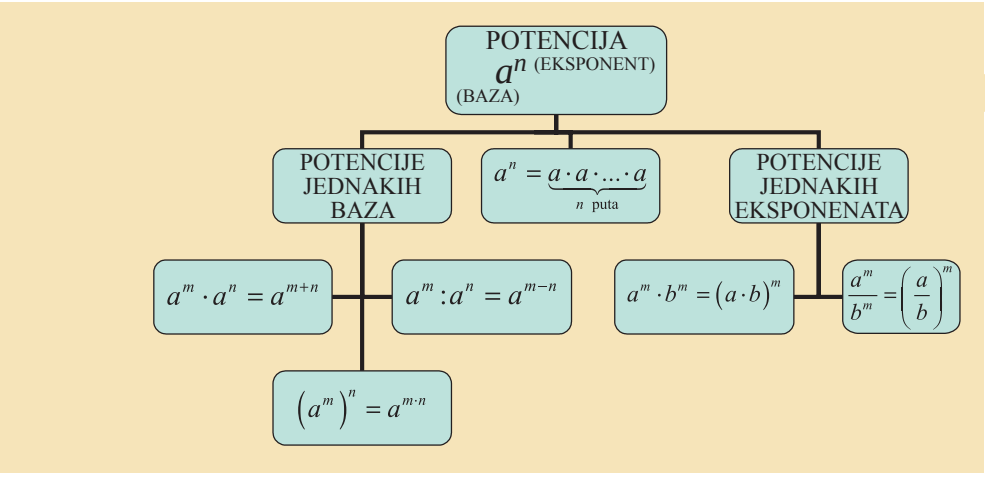
19. a) Od četvrtka na petak. b) Od utorka na srijedu.
c) U četvrtak, 39 kuna. d) U subotu, 46 kuna.



20. a) Između 8 i 12 sati, za 6.6 °C. b) 26.8 °C c) 0.6 °C
d) U 8 sati, 23.6 °C. e) U 12 sati 30.2 °C.



1.1.2. Potencije i korijeni



Potencije

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0), \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \ (a \neq 0), \quad \sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$$

~~$2^3 \cdot 5^3 = 10^6$~~

$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$ ✓

Primjer 1: $2^3 \cdot 2^4 = 2^{3+4} = 2^7$ $\qquad 2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2$

$2^6 : 2^2 = 2^{6-2} = 2^4$ $\qquad 6^2 : 3^2 = (6 : 3)^2 = 2^2$

$(2^3)^2 = 2^{3 \cdot 2} = 2^6$

Primjer 2: Izračunajmo: $\left(-\frac{x^2 y^{-3}}{x^{-1}}\right)^{-3}$.

Rješenje: $\left(-\frac{x^2 y^{-3}}{x^{-1}}\right)^{-3} = \frac{-x^{-6} y^9}{x^3} = -x^{-6-3} y^9 = -x^{-9} y^9$

Primjer 3: Izračunajmo: $\frac{a^{x+1}}{b^{x-2}} : \left(\frac{a^{2x-1}}{b^{x+2}} \cdot \frac{a^{3x}}{b^6}\right)$.

Rješenje: $\frac{a^{x+1}}{b^{x-2}} : \left(\frac{a^{2x-1}}{b^{x+2}} \cdot \frac{a^{3x}}{b^6}\right) = \frac{a^{x+1}}{b^{x-2}} : \frac{a^{2x-1+3x}}{b^{x+2+6}} =$

$$= \frac{a^{x+1}}{b^{x-2}} \cdot \frac{b^{x+8}}{a^{5x-1}} = \frac{a^{x+1-(5x-1)}}{b^{x-2-(x+8)}} = \frac{a^{-4x+2}}{b^{-10}} = a^{2-4x} b^{10}$$

Primjer 4: Koliko je $\left[6:\left(4\cdot 5^2-7\cdot 13-2^3\right)\right]^2$?

Rješenje: $\left[6:\left(4\cdot 5^2-7\cdot 13-2^3\right)\right]^2=\left[6:\left(100-91-8\right)\right]^2=$

$=\left[6:1\right]^2=36$

Primjer 5: Izračunajmo: $\dfrac{4a^3}{ab^{-4}}:\dfrac{2a^{-2}}{b^{-3}}$.

Rješenje: $\dfrac{4a^3}{ab^{-4}}:\dfrac{2a^{-2}}{b^{-3}}=\dfrac{^{2}\cancel{4}a^2}{b^{-4}}\cdot\dfrac{b^{-3}}{\cancel{2}^{1}a^{-2}}=$

$=2a^{2-(-2)}b^{-3-(-4)}=2a^4b$

Primjer 6: Izračunajmo: $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\cdot 6^{-3}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}\cdot 2.5^{-2}\right]\cdot\left(-\dfrac{1}{2^3}\right)^2$.

Rješenje: $\left[\left(\dfrac{1}{3}\right)^{-3}\cdot 6^{-3}+\left(\dfrac{1}{5}\right)^{-2}\cdot 2.5^{-2}\right]\cdot\left(-\dfrac{1}{2^3}\right)^2=$

$=\left[\left(\dfrac{1}{3}\cdot 6\right)^{-3}+\left(\dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{5}{2}\right)^{-2}\right]\cdot\left(-\dfrac{1}{8}\right)^2=$

$=\left(2^{-3}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}\right)\cdot\dfrac{1}{2^6}=\left(2^{-3}+\dfrac{1}{2^{-2}}\right)\cdot\dfrac{1}{2^6}=$

$=2^{-3-6}+\dfrac{1}{2^{-2+6}}=2^{-9}+2^{-4}=$

$=\dfrac{1}{512}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{33}{512}$

Primjer 7: Izračunajmo: $\left(9x^2y^3-12x^4y^4\right):3x^2y-\left(2+3x^2y\right)\cdot y^2$.

Rješenje: $\left(9x^2y^3-12x^4y^4\right):3x^2y-\left(2+3x^2y\right)\cdot y^2=$

$=3x^{2-2}y^{3-1}-4x^{4-2}y^{4-1}-2y^2-3x^2y^{1+2}=$

$=3y^2-4x^2y^3-2y^2-3x^2y^3=$

$=y^2-7x^2y^3$

Primjer 8: Koji je broj veći: 9^{60} ili 27^{40}?

Rješenje: $9^{60}=\left(3^2\right)^{60}=3^{120}\qquad 27^{40}=\left(3^3\right)^{40}=3^{120}$

$\Rightarrow 9^{60}=27^{40}$

Znanstveni (standardni) zapis realnog broja

Svaki se pozitivan realan broj x može napisati u standardnom zapisu $x = a \cdot 10^n$, gdje je $a \in \boldsymbol{R}$, $1 \le a < 10$, $n \in \boldsymbol{Z}$.

Primjer 9: a) Zapišimo zadane brojeve u standardnom obliku.

$25\,600 = 2.56 \cdot 10^4$

$0.000032 = 3.2 \cdot 10^{-5}$

b) Zapišimo zadane brojeve u decimalnom obliku.

$6.5 \cdot 10^3 = 6\,500$

$2.17 \cdot 10^{-4} = 0.000217$

c) Preračunajmo 250 kg u dag, mg, dg i g.

a) 25 000 dag

b) 250 000 000 mg

c) 2 500 000 dg

d) 250 000 g

Primjer 10: Mikroskop pokazuje staničnu jezgru promjera 9 mm. Koliki je stvarni promjer stanične jezgre ako je povećanje 1:1 500?

Rješenje: $9 \text{ mm} : D = 1\,500 : 1$ (D ... promjer)

$$D = \frac{9}{1\,500} \text{ mm} = 0.006 \text{ mm} = 6 \cdot 10^{-3} \text{ mm} =$$

$$= 6 \cdot 10^{-3} \cdot 10^{-3} \text{ m} = 6 \cdot 10^{-6} \text{ m} = 6 \text{ µm}$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) $5 \cdot 5^n$ jednako je:

a) 25^n b) 10^n c) 5^{n+1} d) 25^{n+1}.

2. (NI 2009.) Koja je vrijednost razlomka $\frac{0.01^2}{100 \cdot 0.1}$?

a) 10^{-5} b) 10^{-7} c) 10^{-6} d) 10^{-4}

3. (IK 2006.) Pojednostavnite $\left(\frac{x^{-3}}{y}\right)^{-2} \cdot \frac{x^3}{y^2}$.

4. (IK 2006.) Broj $(-2)^4$ jednak je:

a) –16 b) – 8 c) 8 d) 16.

5. (NI 2006.) $5 \cdot 3^n - 3^{n+1}$ jednako je:

a) $2 \cdot 3^n$ b) $4 \cdot 3^n$ c) $8 \cdot 3^n$ d) $12 \cdot 3^n$.

6. (NI 2008.) Za $n = 3$ vrijednost izraza $2\,000 \cdot \left(1 + \frac{5}{100}\right)^n$ jednaka je:

a) 9 261 000 000 b) 432 000 c) 2 315.25 d) 2 000.25.

7. (NI 2006.) Masa Jupitera približno je jednaka $2 \cdot 10^{27}$ kg, a masa Zemlje $6 \cdot 10^{24}$ kg. Koliko je puta masa Jupitera veća od mase Zemlje?

a) $3 \cdot 10^3$ b) $3 \cdot 10^{-3}$ c) $\frac{1}{3} \cdot 10^3$ d) $\frac{1}{3} \cdot 10^{-3}$

8. (IK 2006.) Broj 0.00234 jednak je:

a) $2.34 \cdot 10^{-6}$ b) $2.34 \cdot 10^{-5}$ c) $2.34 \cdot 10^{-4}$ d) $2.34 \cdot 10^{-3}$.

9. (IK 2006.) Broj 345 jednak je:

a) $3.45 \cdot 10^{-3}$ b) $3.45 \cdot 10^{-2}$ c) $3.45 \cdot 10^2$ d) $3.45 \cdot 10^3$.

10. (NI 2007.) $100\ \text{m}^2$ jednako je:

a) $10^6\ \text{cm}^2$ b) $10^4\ \text{cm}^2$ c) $10^{-4}\ \text{cm}^2$ d) $10^{-6}\ \text{cm}^2$.

11. (NI 2008.) Jedna astronomska jedinica iznosi $1.49 \cdot 10^{11}$ m. To je:

a) 149 milijardi km b) 14.9 milijardi km
c) 149 milijuna km d) 14.9 milijuna km.

12. (IK 2008.) U jednoj tableti je $5.2 \cdot 10^7$ dobrih bakterija. Dijete od 10 godina smije popiti najviše dvije takve tablete tri puta na dan. Koliko najviše tih dobrih bakterija dijete smije unijeti u organizam u jednome danu?

a) $5.2 \cdot 10^8$ b) $1.04 \cdot 10^8$ c) $1.56 \cdot 10^8$ d) $3.12 \cdot 10^8$

13. (NI 2008.) Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza. Omjer nikla prema željezu je 1:19. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g, njezin promjer je 20.5 mm, a gustoća slitine je $6.912\ \text{g/cm}^3$.

a) Koliko je grama željeza potrebno za izradu jedne kovanice od 50 lipa? (Rezultat ne zaokružujte.)

b) Odredite debljinu kovanice od 50 lipa. (Gustoća je omjer mase i obujma, $\rho = \frac{m}{V}$.)

14. (NI 2009.) Svemirska sonda putuje prema planeti udaljenoj $4 \cdot 10^9$ km od Zemlje. Nakon što je prošla četvrtinu puta, izgubila je vezu s bazom na Zemlji. Veza je ponovno uspostavljena na udaljenosti $1.3 \cdot 10^9$ km od Zemlje. Koliko je kilometara sonda preletjela bez kontakta s bazom?

a) $3 \cdot 10^8$ km b) $3 \cdot 10^7$ km c) 130 km d) 13 km

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Izračunajte: $\left(\dfrac{8^{-1}+2\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{2^{-3}+\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}}\right)^{-1}\cdot\left(\dfrac{1}{37}\right)^{-1}$.

a) 27 b) 41 c) 37 d) 33

2. Izračunajte: $2\cdot\left(\dfrac{2^{-1}-2^{-2}}{2^{-1}+2^{-2}}:\dfrac{3^{-1}-3^{-2}}{3^{-1}+3^{-2}}\right)^{-1}$.

a) 2 b) 3^{-1} c) 3 d) 2^{-2}

3. Ako je $a^5=\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}\left(\frac{1}{8}\right)^{3}}{2^{-2}\cdot 4^{-2}\cdot 8^{-1}}$, onda je $\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{-a}$ jednako:

a) 36 b) 48 c) $-\dfrac{1}{48}$ d) $\dfrac{1}{36}$.

4. Kolika je vrijednost izraza $\left[\dfrac{\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}\right)^{-1}}\right]^{-1}:\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{64}\right)^{-1}\right]^{-1}$?

a) $\dfrac{13}{36}$ b) $\dfrac{36}{13}$ c) $\dfrac{13\ 312}{3\ 969}$ d) $\dfrac{52}{18}$

5. Izračunajte: $\left(\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}+4\left(\frac{1}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{2}{3}\right)^{2}+3^{-2}}\right)^{-1}:\left(\dfrac{\frac{2}{3}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2}}{3^{-1}+2^{-1}}\right)^{3}$.

a) 3 b) $\dfrac{1}{3}$ c) 9 d) $\dfrac{1}{9}$

6. Vrijednost izraza $\dfrac{1\ 245\ 005\cdot 10^4}{50\cdot 10}\cdot\dfrac{1}{499^2}$ je:

a) 499 b) 1 000 c) 0 d) 10^2.

7. Izračunajte: $\left[\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-3}}\right]^{-1}\cdot\left[\frac{\left(\frac{4}{3}\right)^{-4}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-3}}{\left(\frac{4}{3}\right)^{-3}+\left(\frac{3}{4}\right)^{-4}}\right]^{-1}$.

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{8}{3}$ d) 2

8. Broj $2.15\cdot 10^{-5}$ jednak je:

a) 0.00215 b) 2.15000 c) 0.0000215 d) $-21\,500$.

9. Izračunajte: $\frac{108}{3\,875}\left\{\left[3(a+b)^2\right]^3+\left[2(a+b)^3\right]^2\right\}$ za $a=2^{-1}$ i $b=3^{-1}$.

a) $\frac{5}{432}$ b) $\frac{25}{432}$ c) $\frac{125}{432}$ d) $\frac{625}{432}$

10. Vrijednost izraza $\frac{2^{-1}+2^{-1}+2^{-3}}{2^{-1}+2^{-1}-2^{-3}}:\frac{3^{-1}+3^{-1}+3^{-3}}{3^{-1}+3^{-1}-3^{-3}}$ jednaka je:

a) $\frac{133}{153}$ b) $\frac{153}{133}$ c) $\frac{77}{65}$ d) $\frac{65}{77}$.

11. Vrijednost izraza $37\cdot\left(\frac{8^{-1}+\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}{\left(\frac{1}{4}\right)^{-1}+2^{-3}}\right):\left(\frac{33}{37}\right)^{-1}$ jednaka je:

a) 13 b) 14 c) 15 d) 16.

12. Broj $x=\left(2^{-3}\right)^{-2}$ zadovoljava uvjet:

a) $x>30$ b) $0<x<1$ c) $1<x<15$ d) $x\le 0$.

13. Na geografskoj karti udaljenost između Osijeka i Našica iznosi 10 cm. U kojem je omjeru izrađena karta ako se zna da je stvarna udaljenost 50 km?

a) 1 : 5 000 b) 1 : 50 000 c) 1 : 500 000 d) 1 : 5 000 000

14. Ako je brzina svjetlosti $3\cdot 10^8$ m/s, odredite udaljenost Plutona od Sunca. Poznato je da svjetlost putuje od Sunca do Plutona 5 sati 28 minuta i 20 sekundi.

a) $5.91\cdot 10^{10}$ m b) $5.91\cdot 10^{11}$ m c) $5.91\cdot 10^{12}$ m d) $5.91\cdot 10^{13}$ m

15. Odredite masu (u kg) aluminijske kuglice polumjera 5 mm.
($\rho_{\text{aluminij}} = 2.7$ g/cm^3, $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$ obujam kugle).

a) 1.41 kg b) 0.141 kg c) 0.0141 kg d) 0.00141 kg

16. Ako je geografska karta izrađena u omjeru 1 : 500 000, a znamo da je udaljenost od Zagreba do Karlovca 50 km, kolika je udaljenost tih gradova na karti? (Izraziti u cm).

a) 0.1 cm b) 1 cm c) 10 cm d) 5 cm

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Izračunajte.

1. $\dfrac{5^{-10} \cdot 2^{-5} \cdot \left(\frac{1}{25}\right)^{-2}}{\left(\frac{1}{10}\right)^{8} \cdot 4}$

2. $\dfrac{\left(\frac{3}{4}\right)^{2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} \cdot (-3)^{0}}{1 - (-2)^{-4}}$

3. $\dfrac{0.01^{-2} \cdot 1000^{4} \cdot 0.1^{-1}}{3 \cdot 100^{8}}$

4. $\dfrac{2 \cdot \left(-\frac{3}{4}\right)^{2} - 3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{3} - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right)^{2}} \cdot (-11)$

5. $\dfrac{15x^{12}y^{9}z^{3}}{16a^{3}} : \dfrac{60x^{5}y^{-5}z^{5}}{4a^{7}}$

6. $2^{12} \cdot \dfrac{1}{4} \cdot (0.25)^{5}$

7. $\left(-\dfrac{5}{24}a^{3}b^{8}\right) : \left(-\dfrac{25}{12}a^{2}b^{5}\right)$

8. $\dfrac{25 \cdot 3^{-2} + 9 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^{-2}}{5^{0} + \left(\frac{1}{5}\right)^{0} \left(\frac{1}{12}\right)^{-1}}$

9. $\dfrac{12x^{7}y^{9}z^{3}}{9a^{7}} : \dfrac{36x^{12}y^{-5}z^{2}}{18a^{3}}$

10. $\left(-\dfrac{19}{9}\right)^{3x} \cdot \left(-\dfrac{171}{2}\right)^{3x} \cdot \left(\dfrac{2}{19}\right)^{3x}$

11. $3 \cdot (-1)^{2345} + 2 \cdot (-1)^{5234} - (-1)^{4523} + 4 \cdot (-1)^{3524}$

12. $(-2)^{4} \cdot \left[-2 \cdot (-2)^{4} - (-2)^{3} + 2(-2)^{2}\right]$

13. $\dfrac{2^{n+2} \cdot 7^{n} - 2^{n} \cdot 7^{n+2}}{5 \cdot 14^{n+1}}$

14. Izračunajte na najjednostavniji način, ne koristeći kalkulator.
$(24.45)^4 : (8.15)^4 - (57.52)^4 : (28.76)^4$

15. Napišite u obliku potencije s bazom 3.
$3 \cdot 9^6 + 5 \cdot 27^4 + 81^3$

16. Koji je broj veći: 4^{60} ili 8^{40} ?

17. Izračunajte. $\left(a^3\right)^0 + 4 \cdot \left(-b^0\right)^2 + \left(2a+3\right)^0$

18. Izračunajte. $\left(\frac{a^{-1}x^3}{b^{-3}y^4}\right)^{-2} : \left(\frac{ax^{-3}}{by^{-2}}\right)^{-4}$

19. Izračunajte. $\left(-a^2\right)^6 + \left(-a^2\right)^3 \cdot \left(-a^3\right)^2 + \left(-a^4\right)^3 + \left(-a^3\right)^4$

20. Koliko znamenaka ima cjelobrojni dio izraza $\left(\frac{41}{2}\right)^2 \cdot \frac{2^{20}}{10^7} \cdot \frac{5}{2}$?

21. Izračunajte: $\frac{0.25^{-2} \cdot 8^4 \cdot 0.5^{-1}}{5 \cdot 4^8}$.

22. Znamo da je jedan kvadratni metar približno $3.861022 \cdot 10^{-7}$ kvadratnih milja. Napišite tu veličinu kao decimalan broj.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. c **2.** a **3.** x^9 **4.** d **5.** a **6.** c **7.** b **8.** d **9.** c
10. b **11.** c **12.** d **13.** a) 3.4675 g b) 0.15999 cm **14.** a

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** c **3.** a **4.** b **5.** d **6.** d **7.** d **8.** c
9. c **10.** b **11.** a **12.** a **13.** c **14.** c **15.** d **16.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. 50 **2.** –3 **3.** $\frac{10}{3}$ **4.** –15 **5.** $\frac{x^7y^{14}a^4}{16z^2}$ **6.** 1
7. $\frac{ab^3}{10}$ **8.** $\frac{250}{117}$ **9.** $\frac{2y^{14}z}{3a^4x^5}$ **10.** 19^{3x} **11.** 4 **12.** –256
13. $-\frac{9}{14}$ **14.** 65 **15.** 3^{14} **16.** Jednaki su. **17.** 6 **18.** $\frac{a^6y^{16}}{x^{18}b^{10}}$
19. 0 **20.** 3 znamenke **21.** $\frac{2}{5}$ **22.** 0.000 000 386 102 2

Korijeni

Kvadratni (drugi) korijen pozitivnog broja a je pozitivan broj $\sqrt{a}$ za koji vrijedi $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$. Za bilo koji realni broj vrijedi $\left(\sqrt{a}\right)^2 = |a|$.

***n*-ti korijen** pozitivnog realnog broja a je pozitivan broj kojemu je n-ta potencija jednaka broju a.

Za pozitivan broj a, broj $(-a)^{\frac{1}{n}}$ postoji samo ako je n neparan broj.

Svaki korijen možemo zapisati kao potenciju s racionalnim eksponentom:

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}.$$

Primjer 1:

a) $\sqrt{25} = 5$, jer je $5^2 = 25$

b) $81^{\frac{1}{2}} = \left(9^{\not 2}\right)^{\frac{1}{\not 2}} = 9$

c) $-81^{\frac{1}{2}} = -\left(9^{\not 2}\right)^{\frac{1}{\not 2}} = -9$

d) $(-81)^{\frac{1}{2}}$ ne postoji u $\boldsymbol{R}$

e) $\sqrt[\not 3]{\sqrt{x^{\not 9^3}}} = \sqrt{x^3} = \sqrt{x^2 \cdot x} = \sqrt{x^2} \cdot \sqrt{x} = x$

f) $\sqrt[3]{\sqrt{x^9}} = \left(\left(x^{\not 9^3}\right)^{\frac{1}{\not 2}}\right)^{\frac{1}{\not 3^1}} = x^{\frac{3}{2}}$

g) $\sqrt{3 \cdot \sqrt[3]{9}} = \sqrt{\sqrt[3]{3^3 \cdot 3^2}} = \sqrt[6]{3^5}$

Kvadrat realnog broja ne može biti negativan!

$$\cancel{\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b}$$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Primjer 2: Izračunajmo: $\sqrt{\sqrt[3]{x^8}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}$.

Rješenje: $\sqrt{\sqrt[3]{x^8}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}} = \sqrt[6]{x^8} \cdot \sqrt[6]{x} = \sqrt[6]{x^9} = \sqrt{x^3} = x\sqrt{x}$

Primjer 3: Izračunajmo: $3\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a}} + \sqrt{a \cdot \sqrt[6]{a^3}} - 2\sqrt[6]{a^3 \cdot \sqrt{a^3}}$.

Rješenje:

$$3\sqrt[3]{a^2 \cdot \sqrt[4]{a}} + \sqrt{a \cdot \sqrt[6]{a^3}} - 2\sqrt[6]{a^3 \cdot \sqrt{a^3}} =$$

$$= 3\sqrt[12]{\left(a^2\right)^4 a} + \sqrt[12]{a^6 a^3} - 2\sqrt[12]{\left(a^3\right)^2 a^3} =$$

$$= 3\sqrt[12]{a^9} + \sqrt[12]{a^9} - 2\sqrt[12]{a^9} = 2\sqrt[4]{a^3}$$

Primjer 4: Izračunajmo: $\left[\left(625^{0.75}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$.

Rješenje: $\left[\left(625^{0.75}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left[\left(625^{\frac{3}{4}\left(-\frac{2}{3}\right)}\right)\cdot\left(2^{3}\right)^{-\frac{2}{3}}\right]^{-\frac{1}{2}}=$

$=\left[\left(25^{2}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}=\left(5^{-2}\cdot 2^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}=10$

Primjer 5: Izračunajmo: $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+5\sqrt{27}\right)\sqrt{6}$.

Rješenje: $\left(2\sqrt{2}-3\sqrt{3}+5\sqrt{27}\right)\sqrt{6}=2\cdot 2\sqrt{3}-3\cdot 3\sqrt{2}+5\cdot 3\cdot 3\sqrt{2}=$

$=4\sqrt{3}-9\sqrt{2}+45\sqrt{2}=4\sqrt{3}+36\sqrt{2}$

Primjer 6: Izračunajmo: $(a+1)\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2+a}}$.

Rješenje: $(a+1)\sqrt{\frac{1}{a}-\frac{1}{a^2+a}}=(a+1)\sqrt{\frac{a+1-1}{a(a+1)}}=$

$=\sqrt{(a+1)^{2}\cdot\frac{\cancel{a}}{\cancel{a}\,(a+1)}}=\sqrt{a+1}$

Racionalizacija nazivnika

Razlomak s korijenom u nazivniku postupkom racionalizacije nazivnika svodimo u oblik razlomka s racionalnim nazivnikom.

Primjer 7: a) $\frac{6}{\sqrt{2}}=\frac{6}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\cancel{6}^{3}\sqrt{2}}{\cancel{2}^{1}}=3\sqrt{2}$

b) $\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}=\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}+2\sqrt{5}}\cdot\frac{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}{5\sqrt{2}-2\sqrt{5}}=\frac{50-20\sqrt{10}+20}{\left(5\sqrt{2}\right)^{2}-\left(2\sqrt{5}\right)^{2}}=$

$=\frac{70-20\sqrt{10}}{50-20}=\frac{10\left(7-2\sqrt{10}\right)}{30}=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$

c) $\frac{2}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}}=\frac{2}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{49}}\cdot\frac{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}}=$

$=\frac{2\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}\right)}{5-7}=-\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{7}\right)$

Primjer 8: Izračunajmo: $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$.

Rješenje: $\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}}\cdot\sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{4-2}}=$

$$=\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}+2}{2}=\sqrt{2}+1$$

Primjer 9: Racionalizirajmo nazivnik: $\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2^5}}$.

Rješenje: Pojednostavnimo najprije:

$$\sqrt[6]{2^5}=\sqrt[6]{2^2}\cdot\sqrt[6]{2^3}=\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{2}.$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2^5}}=\frac{1}{\sqrt[3]{2}\left(1+\sqrt{2}\right)}\cdot\frac{\sqrt[3]{2}^2\left(1-\sqrt{2}\right)}{\sqrt[3]{2}^2\left(1-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{2}^2\left(1-\sqrt{2}\right)}{\sqrt[3]{2}^3\left(1-2\right)}=$$

$$=-\frac{\sqrt[3]{4}\left(1-\sqrt{2}\right)}{2}$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2008.) Ako je $x=\sqrt[3]{\sqrt{2}+1}-\sqrt[3]{\sqrt{2}-1}$, onda je:

a) $x^3+2x-3=0$ b) $x^3-2x+3=0$

c) $x^3-3x+2=0$ d) $x^3+3x-2=0$.

2. (IK 2008.) Koji od navedenih brojeva nije jednak $\frac{1}{3}$?

a) $\left(\sqrt{3}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{1}{9}\right)^{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{27}}$ d) 3^{-1}

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Broj $\left\{\left[2^{-1}:\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}\cdot 8\right]\right\}^{\frac{1}{4}}$ jednak je:

a) 4 b) -4 c) $\frac{1}{2}$ d) 2.

2. Vrijednost izraza $\left(\frac{1}{3}\right)^{-10}\cdot 27^{-3}+(0.2)^{-4}\cdot 25^{-2}+\left(64^{-\frac{1}{9}}\right)^{-3}$ je:

a) 0.2 b) 8 c) 12 d) 3.5.

3. Vrijednost izraza $3^{-1}\cdot 2^{-\frac{1}{3}}\left(2^{\frac{1}{2}}+2^{-\frac{1}{2}}\right)^2$ jednaka je:

a) $2^{\frac{1}{3}}$ b) $\frac{3}{4}4^{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{3}{2}2^{\frac{1}{3}}$ d) $\frac{3}{2}4^{\frac{1}{3}}$.

4. $\left(\frac{0.1^2}{80}\right)^{\frac{1}{3}}$ je:

a) 0.2 b) 0.5 c) 0.05 d) 0.25.

5. 20% od $\left(\frac{1}{2}-\frac{2}{5}\right)\left(16+\frac{36}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$ iznosi:

a) 0.05 b) 0.01 c) 0.5 d) 0.1.

6. Vrijednost izraza $\frac{1}{\left(2-\sqrt{3}\right)^3}$ jednaka je:

a) $24\sqrt{3}$ b) 56 c) $15-3\sqrt{3}$ d) $26+15\sqrt{3}$.

7. Izraz $(a+1)^{-1}(b+1)^{-1}$ za $a=\left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$, $b=\left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ ima vrijednost:

a) 1 b) $\frac{1}{6}$ c) 0 d) 6.

8. Izraz $\sqrt[3]{a^5\sqrt[7]{a^3}}$ jednak je:

a) $a^{\frac{5}{21}}$ b) $a^{\frac{38}{21}}$ c) $a^{\frac{44}{21}}$ d) $a^{\frac{5}{7}}$.

9. Broj $\sqrt[3]{\frac{0.008}{0.001}}$ je:

a) 0.2 b) 20 c) 0.02 d) 2.

10. Broj $\left(0.0625\right)^{-\frac{3}{4}}$ je:

a) 4 b) 8 c) $\frac{1}{8}$ d) $\sqrt[3]{2}$.

11. Pojednostavnite izraz $\sqrt[5]{a^3\cdot\sqrt[6]{a^5}}:\sqrt[4]{a\cdot\sqrt[3]{a^2}}$.

a) $\sqrt[20]{a}$ b) $\sqrt[20]{a^3}$ c) $\sqrt[20]{a^7}$ d) $\sqrt[20]{a^{11}}$.

12. Svedite na jedan korijen izraz $\sqrt[3]{x^2\sqrt{x}}$.

a) $\sqrt[6]{x^5}$ b) $\sqrt[5]{x^6}$ c) $\sqrt[6]{x}$ d) $\sqrt[5]{x}$.

13. Racionalizacijom nazivnika u izrazu $\frac{5}{2\sqrt{3}+3\sqrt{2}}$ dobiva se:

a) $\frac{5}{6}\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$ b) $\frac{5}{3}\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$

c) $3\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ d) $\frac{6}{5}\left(3\sqrt{2}-2\sqrt{3}\right)$.

14. Vrijednost izraza $\left(a^{-\frac{3}{2}}b\left(ab^{-2}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(a^{-1}\right)^{-\frac{2}{3}}\right)^3$ za $a=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $b=\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ jednaka je:

a) $\frac{1}{2}$ b) $\sqrt[3]{2}$ c) 1 d) $\sqrt{2}$.

15. Izraz $\frac{\left(a\sqrt[3]{a^2b}\right)^3}{\left(\sqrt[5]{a^4}\right)^3}$ iznosi:

a) ab b) $\sqrt[5]{a^{13}b^5}$ c) $\sqrt[5]{b^3}$ d) $a\sqrt[5]{b^3}$.

16. Racionalizirajte: $\frac{3+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$.

a) $\sqrt{3}$ b) $\sqrt{2}$ c) $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ d) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$

17. Racionalizirajte: $\frac{6}{\sqrt[6]{9}-\sqrt[3]{-3}}$.

a) $\sqrt[3]{9}$ b) $\sqrt[3]{3}$ c) $\sqrt[6]{9}$ d) $\sqrt[6]{3}$

18. Pojednostavnite izraz: $\frac{7}{3-\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}+\frac{1}{2-\sqrt{3}}$.

a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{3}$ c) 3 d) 5

19. Racionalizirajte: $\frac{5}{\sqrt{6}-1}$.

a) $\sqrt{6}$ b) $\sqrt{6}+1$ c) $5\sqrt{6}$ d) 5

20. Racionalizirajte: $\frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}}}$.

a) $\frac{\sqrt[4]{2}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ c) $\sqrt[4]{2}$ d) $\sqrt{2\sqrt{2}}$

21. Racionalizirajte: $\frac{14}{\sqrt[5]{7}}$.

a) $2\sqrt[5]{2\ 401}$ b) $2\sqrt[5]{7}$ c) $14\sqrt[5]{7}$ d) $14\sqrt[5]{2\ 401}$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Izračunajte.

1. $\frac{\left(7-\sqrt{79}\right)\left(3-\sqrt{10}\right)^2\left(19+6\sqrt{10}\right)}{\left(9-\sqrt{79}\right)\left(8+\sqrt{79}\right)}$

2. $\left(\sqrt{x\cdot\sqrt[3]{x^2}}:\sqrt{x\cdot\sqrt{x}}\right)\cdot\sqrt[3]{x\cdot\sqrt[4]{x}}$

3. $\frac{27^{\frac{1}{3}}+16^{-\frac{3}{4}}}{2\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot(-3)^0+9^{\frac{3}{2}}}$

4. $\left(a^{-\frac{3}{4}}\cdot a^{\frac{3}{2}}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot a\cdot\sqrt[4]{a}$

5. $\left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75}\cdot 125^{-\frac{2}{3}}-\left(1\frac{11}{25}\right)^{1.5}$

6. $\sqrt[4]{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt{2}}}:\sqrt{2\cdot\sqrt[3]{2\cdot\sqrt[4]{2}}}$

7. $\left(\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}-\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2}}\right)^2$

8. $\sqrt[3]{a^2\cdot\sqrt[4]{a^2}}+\sqrt[4]{a^3\cdot\sqrt[3]{a}}-\sqrt[6]{a^3\cdot\sqrt{a^4}}$

9. $\left[\left(81^{0.75}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot\left(8^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}\right]^{-\frac{1}{2}}$

10. $\sqrt[4]{\sqrt[3]{x^2}}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{x^9}}$

11. $81^{0.5}+\left(\frac{1}{81}\right)^{-0.75}$

12. $\left(\sqrt{6}-3\sqrt{3}+\sqrt{2}-\sqrt{8}\right)\sqrt{6}$

Racionalizirajte nazivnik.

13. $\frac{1}{\sqrt{4\cdot\sqrt[3]{4^2}}}$

14. $\frac{1}{\sqrt[3]{9\cdot\sqrt[4]{3}}}$

15. $\sqrt{\dfrac{3-\sqrt{3}}{3+\sqrt{3}}}$

16. $\dfrac{2\sqrt{11}-4\sqrt{5}}{2\sqrt{11}+4\sqrt{5}}$

17. $\dfrac{b}{\sqrt[3]{ab^2}}$

18. $\dfrac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$

19. Pojednostavnite izraze.

a) $\dfrac{13}{4-\sqrt{3}}-\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$

b) $3\sqrt{125}+5\sqrt{20}-2\sqrt{45}$

c) $\left(7\dfrac{\sqrt{42}}{\sqrt{7}}+\dfrac{6\sqrt{18}}{\sqrt{3}}-2\sqrt{30}\sqrt{5}\right)\dfrac{2-\sqrt{6}}{\sqrt{54}-9}$

d) $\dfrac{\sqrt{19}-17}{17-\sqrt{19}}$

Djelomično korjenujte.

20. $\sqrt{960}$

21. $\sqrt{4x^3}$

22. $\sqrt{a^{11}b^{13}c^{17}d^{14}}$

23. Zadane brojeve poredajte po veličini bez korištenja kalkulatora:
$4\sqrt{3},\ 3\sqrt{6},\ 5\sqrt{2},\ 3\sqrt{5}$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. d **2.** b

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c	**2.** b	**3.** b	**4.** c	**5.** d	**6.** d	**7.** b
8. b	**9.** d	**10.** b	**11.** c	**12.** a	**13.** a	**14.** c
15. b	**16.** a	**17.** a	**18.** d	**19.** b	**20.** a	**21.** a

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. -1	**2.** $\sqrt{x}$	**3.** $\dfrac{25}{344}$	**4.** a	**5.** $-\dfrac{176}{125}$	**6.** $\left(\sqrt[3]{2}\right)^{-1}$
7. 1	**8.** $\sqrt[6]{a^5}$	**9.** 6	**10.** $x\sqrt[3]{x^2}$	**11.** 36	**12.** $6-9\sqrt{2}-2\sqrt{3}$
13. $\dfrac{\sqrt[3]{2}}{4}$	**14.** $\dfrac{\sqrt[4]{3}}{3}$	**15.** $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{2}$	**16.** $\dfrac{4\sqrt{55}-31}{9}$	**17.** $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}}{a}$	**18.** $\sqrt[3]{2}-1$
19. a) 2	b) $19\sqrt{5}$	c) 2	d) -1	**20.** $8\sqrt{15}$	**21.** $2x\sqrt{x}$
22. $a^5b^6c^8d^7\sqrt{abc}$	**23.** $3\sqrt{5},\ 4\sqrt{3},\ 5\sqrt{2},\ 3\sqrt{6}$				

1.1.3. Omjeri i postoci

Omjeri

Dvije veličine možemo uspoređivati tako da odredimo za koliko je jedna veličina veća od druge (što saznajemo oduzimanjem) ili tako da odredimo koliko je puta jedna veličina veća od druge (što saznajemo dijeljenjem). Dijeljenjem dviju veličina dobivamo omjer.

Jednakost dvaju omjera nazivamo razmjer ili proporcija.

Primjer 1: Antun je visok 185 cm, a Marko 180 cm.
Antun je 5 cm viši od Marka (185 – 180 = 5), a omjer njihovih visina je 185 : 180 = 37 : 36.

Primjer 2: Ako znamo da je Marko visok 180 cm i da je omjer Antunove i Markove visine 37 : 36, izračunajmo koliko je visok Antun.

Rješenje: a ... Antunova visina u cm
m ... Markova visina u cm

$$a : m = 37 : 36 \quad \Rightarrow \quad \frac{a}{180} = \frac{37}{36} \quad \Rightarrow \quad a = 185 \text{ cm}$$

Antun je visok 185 cm.

Omjer njihovih visina, $\frac{37}{36}$, nazivamo koeficijent proporcionalnosti.

Primjer 3: Tijekom ljetovanja Ratko je za 6 dana prešao 2 100 km, a Mirjana za 5 dana 1 300 km. Tko je dnevno prelazio više kilometara?

Rješenje: Ratko je prelazio $\frac{2\,100}{6} = 350$ km/dan,
a Mirjana $\frac{1\,300}{5} = 260$ km/dan.
Više kilometara dnevno prelazio je Ratko.

Veličina y je razmjerna ili proporcionalna veličini x uz koeficijent proporcionalnosti (stalnu veličinu) a, $(a > 0)$, ako je $y = ax$.

Primjer 4: Za 20 kolačića s čokoladnim komadićima potrebno je:

- 90 g maslaca
- pola žličice praška za pecivo
- 200 g smeđeg šećera
- 175 g brašna
- pola žličice ekstrakta vanilije
- 1 jaje
- 60 g sjeckanih oraha
- prstohvat soli
- 90 g „čokoladnih gumbića”(ili krupnije sjeckane čokolade za kuhanje).

a) Koliko je brašna potrebno za 50 kolačića?

Rješenje: Omjer kolačića je $20 : 50 = 2 : 5$,
znači da će u istom omjeru biti i količina brašna $\frac{2}{5} = \frac{175}{b}$.
Jednostavnim računom dobivamo da je za 50 kolačića potrebno 437.5 g brašna.

b) Koliko kolačića možemo ispeći s 250 g maslaca?

Rješenje: $\frac{90}{250} = \frac{20}{k} \Rightarrow k = 55.5$ Možemo ispeći 55 kolačića.

c) Koliko šećera sadrži jedan kolačić?

Rješenje: $\frac{200}{s} = \frac{20}{1} \Rightarrow s = 10$ Jedan kolačić sadrži 10 g šećera.

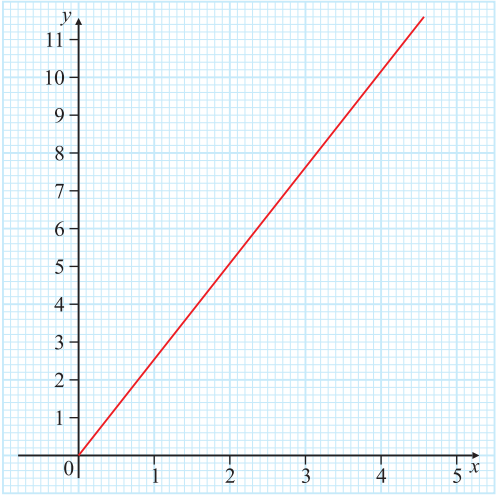
d) „Čokoladni gumbići“ pakirani su u vrećice po 175 g. Koliko kolačića možemo napraviti koristeći tu količinu čokoladnih gumbića?

Rješenje: $\frac{175}{90} = \frac{k}{20} \Rightarrow k = 38.8$ Možemo napraviti 38 kolačića.

Proporcionalne veličine možemo prikazati grafički. Grafički prikaz proporcionalnih veličina x i y je polupravac $y = ax$ (za $a > 0$) u prvom kvadrantu koordinatnog sustava.

Primjer 5: Grafički prikažimo preračunavanje inča (engleske mjere za duljinu) u centimetre ako znamo da je 1 inč = 2.54 cm.

Rješenje: Prikazujemo funkciju $y = 2.54x$.



Iz grafa je teško pročitati koliko centimetara iznose 3 ili 5 inča, pa to možemo prikazati i tablicom.
Za izračunavanje bilo koje vrijednosti koristimo gornji omjer.

inč	1	2	3	7	11	15
cm	2.54	5.08	7.62	17.78	27.34	38.1

Primjer 6: U jednoj mjenjačnici može se kupiti 1 GBP (britanska funta, £) za 8.0734 HRK (hrvatskih kuna), odnosno 1 EUR (euro, €) za 7.2475 HRK. Koliko se britanskih funti može kupiti za 8 000 eura?

Rješenje: Prvo ćemo izračunati koliko je 8 000 € u kunama.

$$\begin{array}{cc} \downarrow 1 \text{ euro} & 8\,000 \text{ euro} \downarrow \\ 7.2475 \text{ kune} & x \text{ kuna} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{7.2475} = \frac{8\,000}{x} \Rightarrow x = 57\,980 \text{ kuna}$$

A sada izračunajmo koliko £ možemo kupiti za 57 980 kuna.

$$\begin{array}{cc} \downarrow 1 \text{ GBP} & x \text{ GBP} \downarrow \\ 8.0734 \text{ kune} & 57\,980 \text{ kuna} \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{8.0734} = \frac{x}{57\,980} \Rightarrow x = 7\,181.60874 \text{ GBP}$$

Za 8 000 € možemo kupiti 7 181.6 £.

Primjer 7: Svježe gljive sadrže 90% vode, a sušene 12 %. Koliko se sušenih gljiva dobiva sušenjem 264 kg svježih?

Rješenje: Ovdje moramo razlikovati dvije veličine: vodu i suhu tvar u svježim i suhim gljivama. Tako u 1 kg svježih gljiva ima 10 dag suhe tvari, a u 1 kg suhih gljiva ima 88 dag suhe tvari.

$$\begin{array}{cc} \downarrow 1 \text{ kg svježih gljiva} & 0.1 \text{ kg suhe tvari} \\ 264 \text{ kg svježih gljiva} & s \text{ kg suhe tvari} \downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{264} = \frac{0.1}{s} \Rightarrow s = 26.4 \text{ kg suhe tvari}$$

$$\begin{array}{cc} \downarrow 1 \text{ kg suhih gljiva} & 0.88 \text{ kg suhe tvari} \\ s \text{ kg suhih gljiva} & 26.4 \text{ kg suhe tvari} \downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{s} = \frac{0.88}{26.4} \Rightarrow s = 30 \text{ kg suhih gljiva}$$

Ova dva primjera (6. i 7.), naizgled potpuno različita, rješavaju se istom metodom odnosno istim načinom razmišljanja jer postotak je također omjer, ali s konstantnim nazivnikom (100).

Ako se jedna veličina poveća određeni broj puta, toliko se puta smanji druga veličine. Jednako tako, ako se jedna veličina smanji određeni broj puta, druga se toliko puta poveća. Takve veličine zovemo **obrnuto razmjerne ili obrnuto proporcionalne veličine**. Koeficijent obrnute proporcionalnosti je a, ($a > 0$) i vrijedi $xy = a$, tj. umnožak obrnuto proporcionalnih veličina je stalna veličina.

Primjer 8: Promjer prednjih kotača na dječjim kolicima je 45 cm. Koliki je promjer zadnjih kotača ako znamo da ako se prednji okrenu 100 puta, zadnji se okrenu 90 puta?

Rješenje: Vidimo da su veličine obrnuto proporcionalne, jer se za isto vrijeme kotači manjeg promjera okrenu više puta od onih većeg promjera.

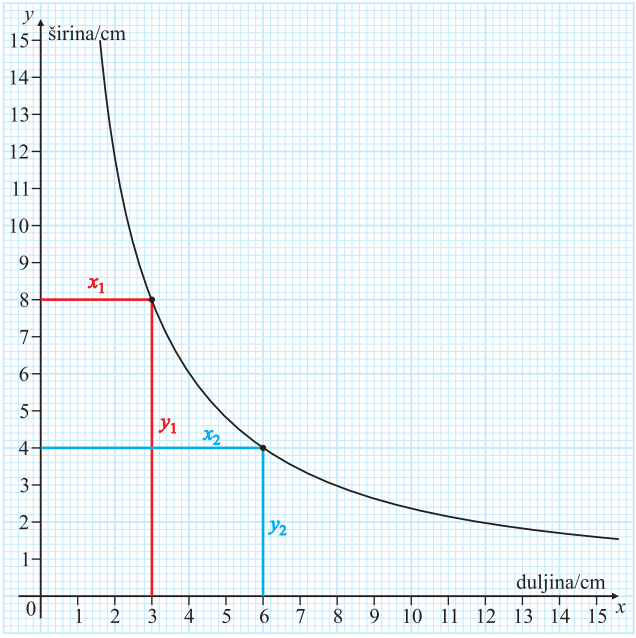
$$\frac{p}{45} = \frac{100}{90} \Rightarrow p = 50$$

Promjer zadnjih kotača je 50 cm.

Obrnuto proporcionalne veličine možemo prikazati grafički. Grafički prikaz obrnuto proporcionalnih veličina x i y je dio hiperbole $y = \frac{a}{x}$, za $a > 0$, u prvom kvadrantu koordinatnog sustava.

Primjer 9: Površina pravokutnika je 24 cm^2. Grafički prikažimo ovisnost duljine i širine pravokutnika te površine. Duljinu stranice prikazujemo na x-osi, a širinu stranice na y-osi koordinatnog sustava.

Rješenje: $P = xy \Rightarrow xy = 24 \Rightarrow y = \frac{24}{x}$



Na grafu možemo očitati cjelobrojne duljine i širine stranica, a ostale možemo izračunati.

Za izračunavanje bilo koje vrijednosti koristimo konstantu umnoška: $xy = 24$, za $x_1 = 3 \Rightarrow y_1 = 8$ ili za $x_2 = 6.4 \Rightarrow y_2 = 3.75$.

Primjer 10: Ako 30 radnika završi neki posao za 27 dana, za koliko će dana taj isti posao završiti 18 radnika?

Rješenje: U slučaju manjeg broja radnika završavanje posla dulje će trajati. Zaključujemo da su veličine obrnuto proporcionalne:

$$\Rightarrow \frac{18}{30} = \frac{27}{d} \Rightarrow d = 45.$$

Isti će posao 18 radnika raditi 45 dana.

Primjer 11: Neki posao 27 radnika može završiti za 18 dana. Posao je započelo 27 radnika, ali uprava je nakon 3 dana zaposlila još tri radnika kako bi ranije završili posao. Za koliko će dana taj posao biti gotov?

Rješenje: Za 1 dan 27 radnika završi $\frac{1}{18}$ posla.

$\Rightarrow$ Za tri dana završe $\frac{3}{18} = \frac{1}{6}$ posla.

Za jedan dan jedan radnik završi $\frac{1}{18 \cdot 27} = \frac{1}{486}$ posla.

$\Rightarrow$ 30 radnika završe $30 \cdot \frac{1}{486}$ posla.

Označimo sa p dio obavljenog posla, a sa d broj dana za koji će 30 radnika završiti ostatak posla.

$$3 \cdot \frac{1}{18} p + 30 \cdot \frac{1}{486} p \cdot d = p \quad \Rightarrow \quad \frac{5}{81} p \cdot d = \frac{5}{6} p$$

$$\Rightarrow \quad d = 13.5$$

Posao će biti gotov za 13.5 + 3 = 16.5 dana.

Ovaj zadatak možemo riješiti i puno brže koristeći obrnutu proporcionalnost, postavljajući uvjete zadatka ovako:

$$\begin{array}{ll} \downarrow 27 & 18-3=15 \uparrow \\ 30 & d \end{array}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{27}{30} = \frac{d}{15} \quad \Rightarrow \quad d = 13.5$$

Postoci

Postotak je razlomak (omjer) s nazivnikom 100, tj. $\frac{p}{100} = 0.01p = p\,\%$.
Računamo ga po formuli:

$y = \frac{p}{100} \cdot x$, gdje je:

x ... osnovna vrijednost
p ... postotak
y ... postotni iznos.

Postotni iznos proporcionalan je osnovnoj vrijednosti, a koeficijent proporcionalnosti je $\frac{p}{100}$.

Primjer 12: Izračunajmo 9.5% od 700.

Rješenje: $y = \frac{9.5}{100} \cdot 700 = 66.5$

Primjer 13: Skala za ocjenjivanje ispita iz matematike izgleda ovako:

0% – 49%	nedovoljan
50% – 63%	dovoljan
64% – 77%	dobar
78% – 90%	vrlo dobar
91% – 100 %	odličan.

Marko je dobio 20 bodova na ispitu od mogućih 25.

a) Koju ocjenu je dobio iz ispita?

Rješenje: $\frac{20}{25} \cdot 100 = 80\% \Rightarrow$ Dobio je ocjenu vrlo dobar.

b) Koliko mu je bodova nedostajalo za prvu veću ocjenu?

Rješenje: $\frac{91}{100} \cdot 25 = 22.75 \approx 23 \Rightarrow$ Da bi dobio ocjenu odličan, nedostajala su mu 3 boda.

c) Koliko to iznosi u postocima?

Rješenje: Zaključujemo sa skale da je to 11% (11% = 91% – 80%).

d) Koju bi ocjenu dobio da je mogući broj bodova bio 27?

Rješenje: $\frac{20}{27} \cdot 100 = 74\% \Rightarrow$ Dobio bi ocjenu dobar.

e) Koliki bi trebao biti mogući broj bodova da Marko dobije ocjenu odličan?

Rješenje: $\frac{20}{x} \cdot 100 \geq 91\% \Rightarrow x \leq 21.97 \approx 22$

Mogući broj bodova trebao bi biti 22 (ili 21 ili 20).

Razlomke s nazivnikom 1 000 nazivamo **promilima**. Pritom vrijedi:

$1 \text{ promil} = \frac{1}{1\,000} = 1‰$.

Primjer 14: Pri testiranju količine alkohola u krvi 1 ‰ znači 1 mL alkohola u 1 L krvi. Pri tome uzimamo da 1 L krvi ima masu 1 kg.

a) Koliko promila iznosi 40 g alkohola u 7 L krvi?

Rješenje: Masa 40 g odgovara 40 mL $\Rightarrow \frac{40}{7} =$

$= 5.71428 \approx 6‰$

b) Ako čovjek ima 6 L krvi i ustanovi se sadržaj alkohola od 0.8‰, koliko taj čovjek ima mililitara alkohola u krvi?

Rješenje: $\frac{a}{6} = 0.8 \Rightarrow a = 4.8$ mL.

Jednostavni i složeni kamatni račun

Uz godišnju kamatnu stopu p (kamatnjak) i uz uloženu glavnicu C nakon vremena v dobije se kamata k čiji iznos računamo po formuli jednostavnog kamatnog računa:

$$k = p \cdot C \cdot v.$$

Vrijeme štednje izražava se u godinama.

Primjer 15: Ivana uloži 4 000 kuna uz godišnju kamatnu stopu od 8%.

a) Koliko će kamata dobiti za godinu dana?

Rješenje: $k = 4\ 000 \cdot 0.08 \cdot 1 = 320 \Rightarrow$ Za godinu dana dobit će 320 kuna.

b) Koliko će kamata dobiti za tri godine?

Rješenje: $k = 4\ 000 \cdot 0.08 \cdot 3 = 960 \Rightarrow$ Za tri godine dobit će 960 kuna.

c) Koliko godina mora štedjeti da bi dobila 2 500 kuna kamata?

Rješenje: $2\ 500 = 4\ 000 \cdot 0.08 \cdot v \ \Rightarrow v = \dfrac{2\ 500}{320} = 7.8125$

Mora štedjeti 8 godina kako bi dobila 2 500 kuna.

d) Kolika bi trebala biti kamatna stopa da uz isti ulog na godinu dana dobije 500 kuna kamata?

Rješenje: $\cancel{500} = 4\,\cancel{000} \cdot p \cdot 1 \ \Rightarrow p = \dfrac{5}{40} = 0.125 \Rightarrow$

Kamatna stopa bi trebala biti 12.5%.

e) Koliko bi novaca trebala uložiti kako bi za 5 godina uz istu kamatnu stopu dobila 2 000 kuna kamata?

Rješenje: $2\ 000 = C \cdot 0.08 \cdot 5 \ \Rightarrow C = \dfrac{2\ 000}{0.4} = 5\ 000 \Rightarrow$

Trebala bi uložiti 5 000 kuna.

f) Koliko će kamata dobiti za 3 mjeseca?

Rješenje: Tri mjeseca moramo izraziti u godinama:

$$\Rightarrow \frac{3}{12} = \frac{1}{4} \Rightarrow k = 4\ 000 \cdot 0.08 \cdot \frac{1}{4} = 80$$

Za tri mjeseca dobit će 80 kuna.

g) Koliko će kamata dobiti za 52 dana?

Rješenje: Dane moramo izraziti u godinama:

$$\Rightarrow \frac{52}{360} = \frac{13}{90} \Rightarrow k = 4\ 000 \cdot 0.08 \cdot \frac{13}{90} = 46.\dot{2}$$

Za 52 dana dobit će 46 kuna.

Oročava li se novac na duži rok, po isteku jedne godine kamate se pripisuju glavnici pa se u sljedećim vremenskim intervalima uvećava i sama kamata. Glavnica C_0 oročena na n godina uz interes (kamatnu stopu) $p\%$ porast će na svotu:

$$C_n = C_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$$

po formuli složenog kamatnog računa.

Primjer 16: Maja oroči 4 000 kuna uz godišnju kamatnu stopu od 8%.

a) Koliko će kamata dobiti za tri godine?

Rješenje: $C_3 = 4\ 000\left(1+\frac{8}{100}\right)^3 = 5\ 038.848$

Za tri godine dobit će 1 038.85 kuna kamata. (Usporedite rješenje s rješenjem primjera 15. b)

b) Koliko godina mora štedjeti da bi dobila 2 500 kuna?

Rješenje: $6\ 500 = 4\ 000\left(1+\frac{8}{100}\right)^n \Rightarrow 1.625 = 1.08^n \Rightarrow$

$\Rightarrow \log 1.625 = n \log 1.08 \Rightarrow n = 6.308$

Mora štedjeti 7 godina kako bi dobila 2 500 kuna kamata. (Usporedite rješenje s rješenjem primjera 15. c)

c) Koliko bi novaca trebala uložiti kako bi za 5 godina uz istu kamatnu stopu dobila 2 000 kuna kamata?

Rješenje: $C + 2\ 000 = C\left(1+\frac{8}{100}\right)^5 \Rightarrow C + 2\ 000 = C \cdot 1.469328 \,/:C$

$1+\frac{2\ 000}{C} = 1.469328 \Rightarrow \frac{2\ 000}{C} = 0.469328 \Rightarrow$

$\Rightarrow C = 4\ 261.412$

Trebala bi uložiti 4 261.41 kunu. (Usporedite rješenje s rješenjem primjera 15. e)

Primjer 17: Nakon koliko godina će glavnica oročena uz 7% interesa utrostručiti vrijednost?

Rješenje: $3C_0 = C_0\left(1+\frac{7}{100}\right)^n \,/:C_0$

$3 = 1.07^n \Rightarrow \log 3 = n \log 1.07 \Rightarrow n = 16.23757$

Glavnica će se utrostručiti nakon 17 godina.

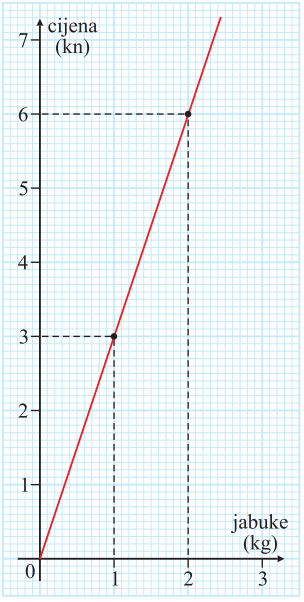
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

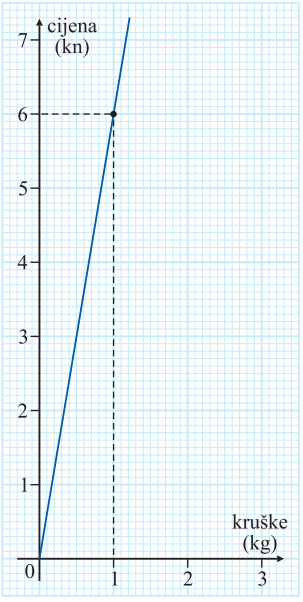
1. (IK 2006.) Na kutiji mlijeka piše: „Mala čaša mlijeka sadrži 120 mg kalcija što čini 15% dnevne potrebe za kalcijem“. Kolika je dnevna potreba za kalcijem?

a) 8 mg b) 18 mg c) 800 mg d) 1 800 mg

2. (IK 2006.) Sljedeća dva grafa prikazuju ovisnost cijene jabuka, odnosno krušaka o masi. Kolika je razlika u cijeni 1 kg krušaka i 1 kg jabuka?

a) 1 kn b) 2.50 kn c) 3 kn d) 3.50 kn





3. (IK 2006.) Liječnici rabe *tjelesni indeks* (*TI*) kako bi odredili pretilost. Tjelesni indeks dobiva se tako da se masa (u kg) podijeli s kvadratom visine (u m).

a) Koliki je tjelesni indeks osobe kojoj je masa 65 kg i koja je visoka 169 cm? Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.

b) Osoba visoka 177 cm ima tjelesni indeks 21 (kad zaokružimo na najbliži cijeli broj). Odredite u kojem je intervalu masa osobe!

4. (NI 2007.) Ruksak je stajao 300 kn. Damir ga je kupio na sniženju i platio 240 kn. Sniženje je:

a) 40% b) 30% c) 20% d) 10%.

5. (NI 2007.) Ana je pročitala $\frac{13}{17}$ knjige, Nina $\frac{7}{9}$, a Petra 77% iste knjige. Tko je pročitao najviše, a tko najmanje?

6. (NI 2007.) Cijena mandarina proporcionalna je njihovoj masi. Dopunite tablicu.

masa	3 kg		2.5 kg
cijena	13.5 kn	56.25 kn	

7. (NI 2008.) Na telefonskoj kartici od 50 impulsa iskorišteno ih je 82%. Koliko je impulsa neiskorišteno?

a) 18 b) 10% c) 9 d) 8%

8. (NI 2008.) Koliko je 23% od 4356?

9. (NI 2008.) Za 13 m^3 vode treba platiti 127.27 kn. Koliko treba platiti 10 m^3 vode?

10. (NI 2008.) Za brojeve a i b vrijedi $a : b = 3 : 4$, $a + b = 21$. Odredite a.

11. Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza. Omjer nikla prema željezu je 1 : 9. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g.

a) Koliko je grama željeza potrebno za izradu jedne kovanice od 50 lipa? (Rezultat ne zaokružujte.)

b) Odredite debljinu kovanice od 50 lipa. (Gustoća je omjer mase i obujma, $\rho = \frac{m}{V}$.)

12. (NI 2008.) Broj a je za 3 veći od pozitivnoga broja b. Njihov je omjer 5 : 3. Tada je a jednak:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{15}{2}$ d) $\frac{21}{2}$.

13. (IK 2008.) Cijena iznajmljivanja bicikla je najprije povećana 25% pa snižena 22%. Što treba učiniti s cijenom da postane jednaka početnoj?

a) Povećati je 3%. b) Sniziti je 3%.

c) Povećati je 2.56%. d) Sniziti je 2.56%.

14. (IK 2008.) Omjer ugljikohidrata i bjelančevina u sendvičima školske kantine je 20 : 3. Ako sendvič ima 87.6 g ugljikohidrata, koliko ima bjelančevina?

a) 9.733 g b) 13.14 g c) 29.2 g d) 58.4 g

15. (IK 2008.) Plin je poskupio 15%. Koliko treba pojeftiniti da bi mu krajnja cijena bila 5.5% veća od cijene prije poskupljenja?

a) 7.80% b) 8.26% c) 8.96% d) 9.50%

16. (IK 2008.) Marko je pročitao 2/3 knjige, Ana 7/11, Pero 5/6 i Višnja 1/2 iste knjige. Tko je pročitao najviše?

a) Marko b) Ana c) Pero d) Višnja

17. (IK 2008.) Luka je dobio 21 bod od mogućih 35 na ispitu iz matematike. Koliki je postotak ispita riješio?

a) 14% b) 21% c) 40% d) 60%

18. (IK 2008.) 17% od 250 jednako je _____.

19. (IK 2008.) Dnevna potreba odrasle osobe iznosi 250 g ugljikohidrata i 45 g bjelančevina. Kilogram hrane A ima 10 g ugljikohidrata i 160 g bjelančevina, dok kilogram hrane B ima 220 g ugljikohidrata i 20 g bjelančevina. Koliko najmanje kilograma i hrane A i hrane B treba uzeti da se zadovolje dnevne potrebe za ugljikohidratima i bjelančevinama?

20. (NI 2009.) Na CD-u kapaciteta 700 Mb snimljeni su sadržaji od 139 Mb i 435 Mb. Koliki je postotak CD-a iskorišten?

a) 62.14% b) 82% c) 19.28% d) 18%

21. (NI 2009.) Filip je platio 3 kg jabuka 16 kuna i 50 lipa. Koliko će platiti za 8 kg jabuka?

22. (NI 2009.) Nakon sniženja od 40% cijena robe je 105 kn. Kolika je cijena robe prije sniženja? Za koliko je kuna cijena smanjena?

23. (NI 2009.) Ana, Cvita i Ivan zajedno su igrali novčanu nagradnu igru. Dogovorili su se oko podjele nagrade ukoliko je osvoje: Ana će dobiti dvije petine nagrade, od ostatka trećinu će dobiti Cvita, a sve ostalo pripada Ivanu.

a) Koji će dio nagrade dobiti Cvita? Odgovor napišite u obliku razlomka.

b) Koliki postotak nagrade pripada Ivanu?

24. (NI 2009.) U 100 mL sirupa za snižavanje temperature sadržano je 2.4 g paracetamola. Koliko miligrama paracetamola ima u 5 mL sirupa?

a) 12 mg b) 24 mg c) 120 mg d) 240 mg

25. (NI 2009.) U plesnu se grupu upisalo 120 učenika. Mladići čine 20% grupe. Naknadno su se upisale još dvije djevojke i 18 mladića. Koliki je sada postotak mladića u plesnoj grupi?

a) 20% b) 28% c) 30% d) 38%

26. (NI 2009.) Marija je za sedamnaesti rođendan dobila na dar buket od 17 ruža, bijelih i crvenih. Cijena bijele ruže je 8 kn, a crvene 9 kn. Koliko je u buketu bilo crvenih, a koliko bijelih ruža ako je buket plaćen 142 kn?

27. (IK 2009.) U košari je 89 kuglica – neke su male, a neke velike. Svaka mala kuglica ima masu 2 g, a svaka velika 5 g. Ukupna masa kuglica u košari je 256 g. Koliko je malih kuglica u košari?

a) 115 b) 63 c) 26 d) 25

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Prodajna cijena proizvoda C u jednoj se godini mijenjala ovako: najprije se povećala za 25% u odnosu na prvotnu prodajnu cijenu, zatim se smanjila za 10% u odnosu na promijenjenu prodajnu cijenu i na kraju godine iznosila je 6 300 kn. Kolika je bila prvotna prodajna cijena proizvoda C?

a) 5 000 kn b) 5 200 kn c) 5 400 kn d) 5 600 kn

2. Ako u nekom razredu 3/4 učenika uči engleski, 2/5 njemački, a svaki uči barem jedan jezik, onda je postotak učenika koji uče oba jezika jednak:

a) 30% b) 40% c) 45% d) 15%.

3. 16% od $\dfrac{3+\dfrac{4}{25}+\dfrac{59}{100}}{\left(\dfrac{3}{4}-\dfrac{3}{20}\right):4}$ iznosi:

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8.

4. Osobe C i D dijele iznos od 36 100 kn. Koliko će dobiti osoba D ako osoba C dobiva 10% manje od osobe D?

a) 17 900 kn b) 19 000 kn c) 17 100 kn d) 19 700 kn

5. Ako bi plaću osobe A povećali za 25%, a osobe B za 20%, tada bi im plaće bile jednake. Za koliko je posto plaća osobe A manja od plaće osobe B?

a) 5% b) 4% c) 8% d) 10%

6. U trima sanducima ima ukupno 64.2 kg šećera. U drugom sanduku ima 4/5 od količine u prvom sanduku, a u trećem ima 42.5% od količine u drugom sanduku. Koliko kilograma šećera ima u drugom sanduku?

a) 20 b) 24 c) 28 d) 16

7. Nakon povećanja plaće od 21% zaposlenik je primio 3 025 kn. Njegova je plaća povećana za:

a) 525 kn b) 625 kn c) 725.25 kn d) 756.25 kn

8. Zaradu od 38 000 kn valja podijeliti na tri radnika A, B i C obrnuto razmjerno od broja sati izostanka s posla. Radnik A izostao je 20 sati, B je izostao 12 sati i C 2 sata. Koliku je zaradu dobio radnik B?

a) 4 000 kn b) 5 000 kn c) 6 000 kn d) 7 000 kn

9. Brod je bio na putu tri dana. Prvog je dana prešao $\frac{1}{3}$ puta, drugog dana $\frac{1}{2}$ preostalog puta, a trećeg dana 72 milje. Koliki je put prešao taj brod u ta tri dana?

a) 200 milja b) 216 milja c) 270 milja d) 304 milje

10. Radnik je ukrcavao sanduke 3 sata. Prvog je sata ukrcao $\frac{3}{10}$ od ukupnog broja sanduka, drugog sata 33 sanduka, a trećeg sata 50% ukupnog broja sanduka koje je do tada ukrcao. Koliko je ukupno sanduka taj radnik ukrcao?

a) 70 b) 80 c) 90 d) 100

11. Cijena jednog proizvoda povećala se za 15% i sada iznosi 289.80 kn. Za koliko se povećala početna cijena?

a) 27.80 kn b) 35.80 kn c) 37.80 kn d) 40.80 kn

12. Nakon što je u bačvu uliveno 4 816 L bijelog vina, 14% bačve ostalo je prazno. Koliko litara bijelog vina treba uliti da bačva bude puna?

a) 596 L b) 684 L c) 784 L d) 876 L

13. U kojem omjeru treba pomiješati 5%-tnu i 50%-tnu otopinu neke tvari da dobijemo 25%-tnu otopinu te tvari?

a) 7:5 b) 5:4 c) 3:2 d) 5:6

14. Ako svježe šljive sadrže 80% vode, a suhe 10% vode, koliko se suhih šljiva može dobiti od 160 kg svježih?

a) 20 kg b) 27 kg c) 35.6 kg d) 45 kg

15. Pri proizvodnji nekog proizvoda ima 5% proizvoda s greškom. Koliko proizvoda treba proizvesti da se dobije 61 560 komada bez greške?

a) 64 638 b) 64 800 c) 64 962 d) 65 124

16. Brod je popravljalo 10 radnika radeći 5 dana po 8 sati dnevno. Koliko će radnika obaviti taj posao radeći 8 dana po 10 sati dnevno?

a) 12 b) 14 c) 8 d) 5

17. Radnik A može završiti uređenje vrta za 8 dana, a radnik B može završiti isti taj posao za 12 dana. Koliko dugo su zajedno uređivali vrt ako je radnik B morao sam završiti ostatak posla u 2 dana?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

18. Jedna cijev napuni bazen za 12 sati, a druga za 2.4 sata. Za koliko će sati napuniti bazen obje cijevi zajedno?

a) $\frac{1}{2}$ b) 1 c) $\frac{3}{2}$ d) 2

19. Dvadeset i pet daktilografa napiše 25 000 stranica teksta za 10 dana radeći 8 sati dnevno. Koliko je dana potrebno da 15 daktilografa napiše tekst od 30 000 stranica radeći 10 sati dnevno?

a) 6 dana b) 12 dana c) 16 dana d) 22 dana

20. U jednoj obitelji svaki sin ima dva puta više braće nego sestara, a svaka kći pet puta više braće nego sestara.
Ukupan broj djece (sinova i kćeri) u toj obitelji je:
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9.

21. Dužnik je nakon 2 godine vratio dug zajedno s jednostavnim kamatama u iznosu od 95 200 kn. Koliko iznose jednostavne kamate, ako je godišnji kamatnjak 6?
a) 10 200 kn b) 11 300 kn c) 12 400 kn d) 13 500 kn

22. Uz koji godišnji kamatnjak neka glavnica za 5 godina donese jednostavnih kamata u iznosu od 20% glavnice?
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

23. Uz koji godišnji kamatnjak glavnica od 182 500 kn za 73 dana donese na jednostavnim kamatama 1 460 kn (godina nije prijestupna)?
a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Prodavač je napravio podsjetnik cijena proizvoda (u tablici) po komadu. Dopunite tablicu.

proizvod (komada)	cijena u kunama
2	4.8
3	7.2
4	
5	12
6	
7	16.8
8	

2. Ako pasta za zube od 75 mL stoji 9.5 kuna, a ona od 125 mL 15.5 kune, koja je kupnja povoljnija?

3. Ana pretrči 500 metara za 39 sekundi, a Petra 900 metara za 1 minutu i 11 sekundi. Koja trči brže?

4. Ako 19 kg šećera stoji 107 kuna, koliko stoji 12 kg šećera?

5. Ako je sjena žene visoke 165 cm duga 1.2 m, koliko će u isto vrijeme i na istom mjestu biti dugačka sjena rasvjetnog stupa visine 6 m?

6. Tvornica „Zdrav život“ proizvodi bicikle i tricikle u omjeru 9:7. Koliko svakog proizvoda treba napraviti kako bi proizveli ukupno 640 proizvoda?

7. U dvije dvorane istovremeno se održavaju dva seminara. Na prvom je 87 žena od 139 sudionika, a na drugom su 102 žene od 169 sudionika. Na kojem je seminaru veća zastupljenost muškaraca?

8. Točka T dijeli dužinu $\overline{AB}$ duljine 56 cm u omjeru 3 : 4. Kolike su duljine dužina $\overline{AT}$ i $\overline{BT}$?

9. Tri radnika rade neki posao 6 sati.

a) Koliko sati bi trebalo dvojici radnika za isti posao?

b) Koliko radnika treba raditi kako bi dovršili posao za 4.5 sata?

10. Ako voda istječe iz bazena brzinom 5 m^3/s, bazen će se isprazniti za 14 sati. Koliko vremena treba za pražnjenje bazena ako voda istječe brzinom 7 m^3/s?

11. Četrdeset učenika ide na izlet. Izračunali su da svatko treba dati 128.45 kuna za prijevoz. Koliko bi trebao dati svaki od njih ako im se pridruži još troje učenika?

12. Izračunajte nepoznatu veličinu.

a) 1.2% od 285 iznosi y.

b) 70% od 330 iznosi y.

c) 40% od x iznosi 64.

d) 65% od x iznosi 276.

e) p% od 150 iznosi 45.

f) p% od 95 iznosi 45.6.

13. Cijena štapnog miksera je 450 kuna.

a) Ako se cijena smanji 24%, koliko će mikser koštati?

b) Koliko će mikser koštati ako se cijena poveća 20%?

14. Koliko posto će se promijeniti cijena cipela ako je početna cijena najprije snižena 9%, pa povišena 14%, a nakon toga ponovno snižena 20%?

15. Uz koju će kamatnu stopu neka glavnica donijeti istu kamatu za 1.5 godinu, koju ta ista glavnica donosi za 8 mjeseci uz kamatnu stopu od 7% godišnje?

16. Branko je u banci digao kredit za auto u iznosu od 100 000 kuna uz kamatnu stopu od 12% na 7 godina. Koliko kamata treba isplatiti banci?

17. Ako je u nekoj udruzi 56 žena i one predstavljaju 40% ukupnog članstva, koliko je članova udruge?

18. Darko je kupio novi auto za 9 750 €. Za godinu dana auto izgubi na vrijednosti 28%. Za koliko ga eura može prodati nakon godinu dana?

19. U malom gradu je 1999. godine bilo 180 stanovnika. Do 2004. godine broj stanovnika se povećao 20%. Koliko je stanovnika 2004. godine bilo u malom gradu?

20. Vlasta je smršavila sa 97 kg na 78 kg.

a) Koliko je izgubila na masi u postocima?

b) Nakon mršavljenja mora obnoviti garderobu. Kupila je hlače čija je cijena bila 490 kuna na sniženju od 15%. Koliko je platila hlače?

21. Uspješnica neke knjige stoji 139.5 kuna, a na sajmu knjiga uz sajamski popust stoji 111.6 kuna. Koliki je sajamski popust?

22. Uz koju kamatnu stopu je posuđeno 600$ na godinu dana, ako je kamata 48$?

23. Ivan je posudio 1 800 kuna na 18 mjeseci. Nakon 18 mjeseci mora vratiti 2 340 kuna. Kolika je kamatna stopa?

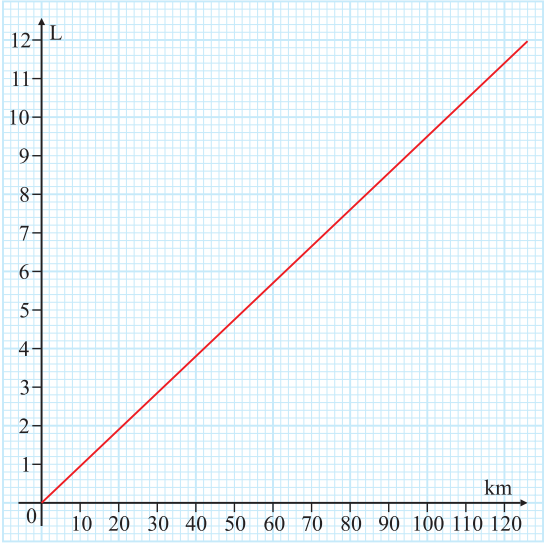
24. Graf prikazuje prosječnu potrošnju goriva automobila u litrama po prijeđenom putu u kilometrima.

a) Kolika je prosječna potrošnja automobila na 100 km?

b) Koliko litara goriva treba tom automobilu da bi prešao 56 km?

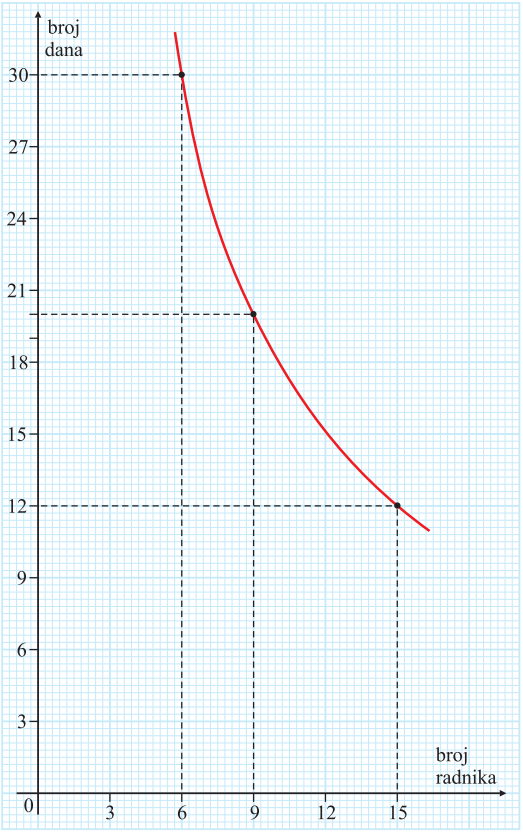
c) Koliko kilometara može prijeći s 3.85 litara goriva? (Rješenje zaokružite na jednu decimalu.)

d) Ako je cijena goriva 7.77 kuna, koliko treba platiti potrošeno gorivo na putu od 180 km?



25. Graf prikazuje povezanost broja radnika i dana za koje oni mogu obaviti neki posao.

a) Za koliko dana 15 radnika može obaviti posao?
b) Koliko je radnika potrebno da se posao obavi za 9 dana?
c) Koliko je dana potrebno ako radi 18 radnika?



26. Na geografskoj karti 5.6 cm predstavlja 490 km u prirodi. Grafom prikažite povezanost veličina i iz grafa očitajte koliko je 3.2 cm na karti kilometara u prirodi.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. c **2.** b **3.** a) 23, b) $64.22 \leq m \leq 67.17$ **4.** c
5. Najviše je pročitala Nina, a najmanje Ana.
6.

masa	3 kg	12.5 kg	2.5 kg
cijena	13.5 kn	56.25 kn	11.25 kg

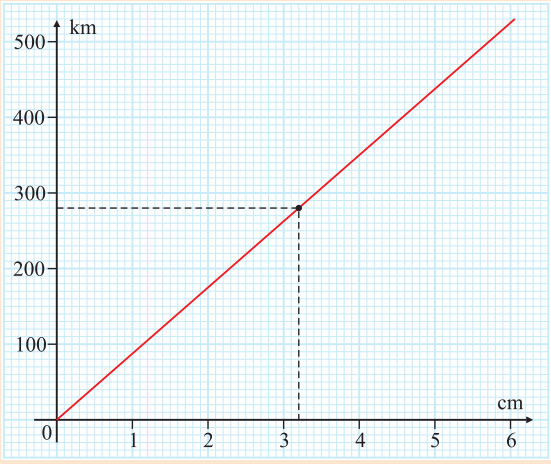
7. c **8.** 1 001.88 **9.** 97.9 kn **10.** $a = 9$, $b = 12$
11. a) 3.4675 g b) 0.15999 cm **12.** c **13.** c **14.** a **15.** a **16.** b
17. d **18.** 42.5 **19.** Hrane A 0.14 kg, a hrane B 1.13 kg. **20.** b **21.** 44 kn
22. Cijena robe prije sniženja je 175 kn, a smanjena je za 70 kn. **23.** a) $\frac{1}{5}$, b) 40% **24.** c
25. c **26.** U buketu je bilo 6 crvenih i 11 bijelih ruža. **27.** b

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d	**2.** d	**3.** b	**4.** b	**5.** b	**6.** b	**7.** a	**8.** b	**9.** b
10. c	**11.** c	**12.** c	**13.** b	**14.** c	**15.** b	**16.** d	**17.** c	**18.** d
19. c	**20.** b	**21.** a	**22.** c	**23.** c				

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. 9.6, 14.4, 19.2.
2. Povoljnije je kupiti pastu u većem pakiranju.
3. Brže trči Ana.
4. 12 kg šećera stajat će 67.58 kuna.
5. Sjena će biti dugačka 436.36 cm.
6. Treba proizvesti 360 bicikala i 280 tricikala.
7. Veća je zastupljenost muškaraca na drugom seminaru.
8. $|\overline{AT}| = 24\,\text{cm}$, $|\overline{BT}| = 32\,\text{cm}$.
9. a) Dvojica radnika obave posao za 9 sati.
b) Da bi obavili posao za 4.5 sata, potrebna su 4 radnika.
10. Potrebno je 10 sati.
11. Svaki učenik bi trebao platiti 119.49 kune.
12. a) 3.42 b) 231 c) 160 d) 424.615 e) 30% f) 48%
13. a) Mikser će koštati 342 kune. b) Mikser će koštati 540 kuna.
14. Početna cijena će se smanjiti 17%.
15. 3.1%
16. Nakon 7 godina Branko treba isplatiti banci 84 000 kuna kamata.
17. Udruga ima 140 članova.
18. Može ga prodati za 7 020 €.
19. U malom gradu je 2004. godine bilo 216 stanovnika.
20. a) Vlasta je smršavila 19.6%. b) Hlače je platila 416.5 kuna.
21. Sajamski popust je 20%.
22. Kamatna stopa je 8%.
23. Kamatna stopa je 20%.
24. a) Na 100 km troši 9.5 litara goriva. b) Za 56 km treba mu 5.32 L goriva.
c) Sa 3.85 L goriva može prijeći 40.5 km. d) Za put od 180 km platit će goriva u vrijednosti 132.87 kuna.
25. a) 15 radnika može obaviti posao za 12 dana.
b) 20 radnika može obaviti posao za 9 dana.
c) 18 radnika će raditi 10 dana.
26. 3.2 cm na karti označuju 280 km u prirodi.



1.1.4. Uređaj u skupu realnih brojeva

Realne brojeve možemo uspoređivati. Dva broja mogu biti ili jednaka ($a = b$) ili različita ($a \neq b$).

Broj a manji je od broja b ako i samo ako je $a - b < 0$.

Ako je broj a na brojevnom pravcu smješten lijevo od broja b, onda je broj a manji od broja b.

Za $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$ $(c,\ d > 0) \Rightarrow ad > bc.$

Svojstva relacije uređaja

Za svaki $a, b, c \in \boldsymbol{R}$ vrijedi:

- ako je $a < b$ i $b < c$, slijedi $a < c$
- ako je $a < b$, onda je $a + c < b + c$
- ako je $a < b$ i $c > 0$, onda je $ac < bc$
- ako je $a < b$ i $c < 0$, onda je $ac > bc$.

Primjer 1: Ako je $0 < a < b$ i $0 < c < d$, onda je $ac < bd$. Dokažimo!

Rješenje: $0 < a < b \,/\cdot c$

$$\underline{0 < c < d \,/\cdot b}$$

$$\left.\begin{array}{l} ac < bc \\ cb < db \end{array}\right\} ac < bc < db \Rightarrow ac < db$$

Skup realnih brojeva x takvih da je:

$x > a$ je otvoreni interval i zapisujemo ga $\langle a,\ +\infty\rangle$

$x < a$ je otvoreni interval i zapisujemo ga $\langle -\infty,\ a\rangle$

$a < x < b$ je otvoreni interval i zapisujemo ga $\langle a,\ b\rangle$

$x \geq a$ je poluotvoreni interval i zapisujemo ga $[a,\ +\infty\rangle$

$x \leq a$ je poluotvoreni interval i zapisujemo ga $\langle -\infty,\ a]$

$a < x \leq b$ je poluotvoreni interval i zapisujemo ga $\langle a,\ b]$

$a \leq x \leq b$ je zatvoreni interval i zapisujemo ga $[a,\ b]$.

Zatvoreni interval još zovemo segment.

Skup A je **podskup** skupa B, $A \subseteq B$, ako je svaki element skupa A ujedno i element skupa B.

Skup A je **pravi podskup** skupa B, $A \subset B$, ako je A podskup od B i ako u skupu B postoji element koji nije element skupa A.

Presjek skupova A i B je skup $A \cap B$ koji sadrži zajedničke elemente ovih dvaju skupova:

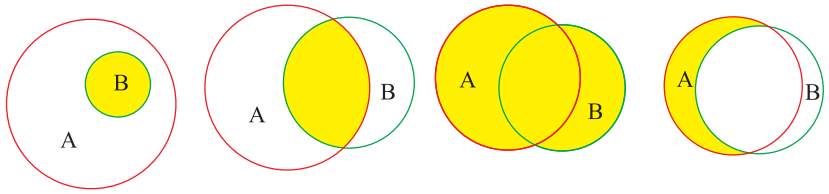
$$A \cap B = \{x : x \in A \ i \ x \in B\}.$$

Unija skupova A i B je skup $A \cup B$ koji sadrži one elemente koji se nalaze u barem jednom od ovih dvaju skupova:

$$A \cup B = \{x : x \in A \ ili \ x \in B\}.$$

Razlika skupova A i B je skup $A \setminus B$ koji sadrži elemente koji se nalaze u skupu A, a ne nalaze se u skupu B:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ i \ x \notin B\}.$$



$B \subseteq A$ $\quad A \cap B$ $\quad A \cup B$ $\quad A \setminus B$

Primjer 2: Odredimo skupove: $A = \{n \in \boldsymbol{N} : n < 8\}$, $B = \{n \in \boldsymbol{Z} : -3 < n < 5\}$, $C = \{n \in \boldsymbol{N} : n = 2k, \ k \in \boldsymbol{N}\}$, a zatim izračunajmo:
$A \cup B, \ A \cap B, \ A \cap C, \ C \cap B, \ A \setminus B, \ B \setminus A.$

Rješenje: $A = \{n \in \boldsymbol{N} : n < 8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$B = \{n \in \boldsymbol{Z} : -3 < n < 5\} = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$C = \{n \in \boldsymbol{N} : n = 2k, \ k \in \boldsymbol{N}\} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\}$

$A \cup B = \{-2, -1, \ 0, \ 1, \ 2, \ 3, \ 4, \ 5, \ 6, \ 7\}$

$A \cap B = \{1, \ 2, \ 3, \ 4\}$

$A \cap C = \{2, \ 4, \ 6\}$

$C \cap B = \{2, \ 4\}$

$A \setminus B = \{5, \ 6, \ 7\}$

$B \setminus A = \{-2, -1, \ 0\}$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\left\langle 2,\ \frac{11}{2}\right]$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

2. (IK 2006.) Skup svih brojeva koji su **manji** od 4, a **veći ili jednaki** 2 zapisujemo:

a) $\langle 2,\ 4\rangle$ b) $[2,\ 4\rangle$ c) $\langle 2,\ 4]$ d) $[2,\ 4]$.

3. (NI 2007.) Koliko je prirodnih brojeva u intervalu $\left[2,\ \frac{19}{3}\right]$?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

4. (NI 2008.) Kojemu intervalu pripadaju brojevi $-\frac{1}{2}$ i 1?

a) $\left\langle -\frac{1}{2},\ 1\right]$ b) $\langle -1,\ 1]$ c) $\left[-1,\ \frac{1}{2}\right]$ d) $\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$

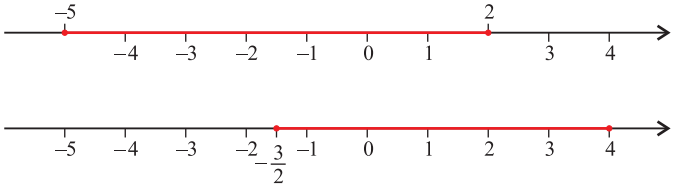
5. (NI 2008.) Rabeći džepno računalo po potrebi, odredite koji je od navedenih brojeva **najveći**.

a) $\sqrt{8}-\sqrt{2}$ b) $14.1\cdot 10^{-1}$ c) $\left|-\frac{7}{5}\right|$ d) $\frac{3}{2}-\frac{1}{12}$

6. (NI 2008.) Rabeći džepno računalo, odredite koji je od navedenih brojeva **najveći**.

a) $\log_5 8$ b) $\sqrt{\sqrt[5]{380}}$ c) $\operatorname{tg}(78°)$ d) 1.22^{2^3}

7. (IK 2008.) Zajednički dio zatvorenih intervala prikazanih na slici sadrži:



a) 5 cijelih brojeva b) 4 cijela broja
c) 3 cijela broja d) 2 cijela broja.

8. (IK 2009.) Koji je od navedenih brojeva najbliži broju 3?

a) π b) $4-\frac{2}{3}$ c) $\sqrt{10}$ d) 1.5^3

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Koji znak odgovara izrazu $-\frac{1}{3}\square-\frac{7}{4}$?

a) $>$ b) $<$ c) $=$

2. Koliko je cijelih brojeva u skupu $A\cup B$, ako su $A=\{n\in \boldsymbol{N}: n<9\}$ i $B=\{n\in \boldsymbol{Z}: -5<n<4\}$?

a) 9 b) 11 c) 13 d) 15

3. Skup svih brojeva $C=\{n\in \boldsymbol{Z}: -3\le n<5\}$ zapisujemo:

a) $\langle -3,\ 5\rangle$ b) $[-3,\ 5]$ c) $[-3,\ 5\rangle$ d) $\langle -3,\ 5]$.

4. Koliko je prirodnih brojeva u skupu $A=\{n\in \boldsymbol{N}: n<8\}$?

a) 6 b) 7 c) 8 d) Ni jedan.

5. Koliko je cijelih brojeva u skupu $B=\{n\in \boldsymbol{Z}: -3<n<5\}$?

a) 3 b) 4 c) 6 d) 7

6. Koliko je prirodnih brojeva u skupu $A\cap B$, ako su $A=\{n\in \boldsymbol{N}: n<8\}$ i $B=\{n\in \boldsymbol{Z}: -3<n<5\}$?

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7

7. Koji je od sljedećih intervala zatvoren?

a) $[-2,\ 4\rangle$ b) $\langle 7,\ +\infty\rangle$ c) $[-5,\ -1]$ d) $\langle 8,\ 11]$

8. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?

a) $[-3,\ 2\rangle\cap\langle -1,\ 4]$ je poluzatvoren interval.

b) Najmanji element skupa $\langle -4,\ 5\rangle\cap \boldsymbol{Z}$ iznosi -4.

c) $\langle -3,\ 2]\cup[-1,\ 4\rangle$ je otvoreni interval.

d) $x<\sqrt{3}$ zapisujemo kao $x\in\langle -\infty,\ \sqrt{3}]$.

9. Koji od navedenih brojeva nije jednak $\frac{1}{5}$?

a) $\left(\sqrt{5}\right)^{-2}$ b) $\left(\frac{1}{25}\right)^{\frac{1}{3}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{125}}$ d) 5^{-1}

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

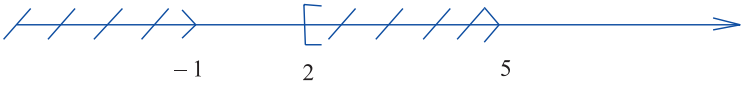
1. Zapišite uobičajenim oznakama interval $-2 \le x < 5$.

2. Ako je na brojevnom pravcu točka X lijevo od točke Y, onda za realne brojeve x i y pridružene tim točkama vrijedi _____ .

3. Koji je broj veći: $\frac{2}{3}$ ili $\frac{3}{4}$?

4. Usporedite brojeve x i y, ako je $x - y = -3$.

5. Zapišite odgovarajućim oznakama za intervale skup koji je istaknut na crtežu.



6. Odredite skupove.

a) $\left\langle -\frac{7}{3}, \frac{1}{7} \right\rangle \cap \boldsymbol{N}$ b) $\left\langle -\frac{7}{3}, \frac{1}{7} \right\rangle \cap \boldsymbol{Z}$ c) $\left\langle -\frac{7}{3}, \frac{1}{7} \right\rangle \cap \boldsymbol{R}$

7. Zapišite uobičajenim oznakama za intervale: „Skup svih realnih brojeva x za koje vrijedi da su manji ili jednaki od 0 ili veći od 5“.

8. Umetnite odgovarajuće znakove ($<$, $>$ ili $=$) između sljedećih brojeva:

a) $|-3| \quad |2|$

b) $|5|-|3| \quad |-(5-3)|$

c) $-2 \quad |-(7-4)|$.

9. Izračunajte x, ako je $\frac{14}{x} = \frac{84}{13}$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. 3 **2.** b **3.** c **4.** b **5.** d **6.** d **7.** b **8.** a **9.** a

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** c **3.** c **4.** b **5.** d **6.** a **7.** c **8.** c **9.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x \in [-2, 5\rangle$ **2.** $x < y$ **3.** $\frac{2}{3} < \frac{3}{4}$ **4.** $y > x$ **5.** $\langle -\infty, -1\rangle \cup [2, 5\rangle$

6. a) $\varnothing$ b) $\{-2, -1, 0\}$ c) $\left\langle -\frac{7}{3}, \frac{1}{7} \right\rangle$ **7.** $\langle -\infty, 0] \cup \langle 5, +\infty\rangle$

8. a) $>$ b) $=$ c) $<$ **9.** $x = \frac{13}{6}$

1.1.5. Mjerne jedinice

Pored osnovne jedinice uvode se još i manje i veće jedinice koje se pišu pomoću predmetaka:

– veće: deka (10), hekto (100), kilo (1 000), ...
– manje: deci (deseti dio, 10^{-1}), centi (stoti dio, 10^{-2}), mili (tisućiti dio, 10^{-3}), ...

Mjere za duljinu, površinu i obujam (volumen)

$$1\ \text{km} = 10\ \text{hm} = 100\ \text{dam} = 1\,000\ \text{m} = 10\,000\ \text{dm} = 100\,000\ \text{cm} = 1\,000\,000\ \text{mm}$$

$$1\ \text{km}^2 = 10^2\ \text{ha} = 100^2\ \text{a} = 1\,000^2\ \text{m}^2 = 10\,000^2\ \text{dm}^2 = 100\,000^2\ \text{cm}^2 = 1\,000\,000^2\ \text{mm}^2$$

hm^2 = hektar (ha)

dam^2 = ar (a)

$$1\ \text{km}^3 = 10^3\ \text{hm}^3 = 100^3\ \text{dam}^3 = 1\,000^3\ \text{m}^3 = 10\,000^3\ \text{dm}^3 = 100\,000^3\ \text{cm}^3 = 1\,000\,000^3\ \text{mm}^3$$

Po metričkom sustavu još se računaju i mjere za tekućine te mjere za masu (osnovna jedinica kilogram).

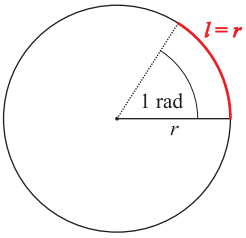
Mjere za vrijeme

Postoje tri jedinice kojima mjerimo vrijeme: godina, dan i sat. Godina je vrijeme za koje Zemlja obiđe oko Sunca, a dan je vrijeme za koje se Zemlja okrene oko svoje osi. Godina ima 12 mjeseci, 365 dana (prijestupna 366 dana). Jedan dan se dijeli na 24 sata, 1 sat na 60 minuta, 1 minuta na 60 sekundi. Vrijeme od 7 dana nazivamo tjedan. Vrijeme od 10 godina desetljeće (decenija), od 100 godina stoljeće, od 1 000 godina tisućljeće (milenij).

Mjere za kut

Mjerenje u stupnjevima: Jedinica kuta je 360-i dio punog kuta i zove se 1 kutni stupanj (1°). Stupanj se dijeli na 60 minuta (60’), a minuta na 60 sekundi (60’’).

Mjerenje u radijanima: Luku kojemu je duljina jednaka polumjeru kružnice pripada središnji kut koji se zove 1 radijan. Radijan je 2π-ti dio punog kuta.



2π radijana $= 360°$

π radijana $= 180°$

$\frac{\pi}{2}$ radijana $= 90°$

$\frac{\pi}{4}$ radijana $= 45°$

$1 \text{ radijan} = \frac{180°}{\pi} \approx 57° 17' 44.806''$

Veliki i mali brojevi

IZNOS	NAZIV	PREDMETAK	NAZIV PREDMETKA
$10^{15} = 1\,000\,000\,000\,000\,000$	bilijarda	P	peta
$10^{12} = 1\,000\,000\,000\,000$	bilijun	T	tera
$10^{9} = 1\,000\,000\,000$	milijarda	G	giga
$10^{6} = 1\,000\,000$	milijun	M	mega
$10^{3} = 1\,000$	tisuća	k	kilo
$10^{2} = 100$	sto	h	hekto
$10^{1} = 10$	deset	da	deka
$10^{0} = 1$	jedan		
$10^{-1} = 0.1$	desetina	d	deci
$10^{-2} = 0.01$	stotina	c	centi
$10^{-3} = 0.001$	tisućina	m	mili
$10^{-6} = 0.000\,001$	milijuntina	μ	mikro
$10^{-9} = 0.000\,000\,001$	milijardina	n	nano
$10^{-12} = 0.000\,000\,000\,001$	bilijuntina	p	piko
$10^{-15} = 0.000\,000\,000\,000\,001$	bilijardina	f	femto

Primjer 1: Preračunajmo 250 m u:
a) cm b) μm c) km d) Gm e) nm.

Rješenje: $1 \text{ m} = 10 \text{ dm} = 10^2 \text{ cm} = 10^3 \text{ mm} = 10^6 \mu\text{m} = 10^9 \text{ nm} = 10^{12} \text{ pm}$
$1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ dam} = 10^{-2} \text{ hm} = 10^{-3} \text{ km} = 10^{-6} \text{ Mm} = 10^{-9} \text{ Gm} = 10^{-12} \text{ Tm}$

a) $250 \text{ m} = 2.5 \cdot 10^2 \text{ m} = 2.5 \cdot 10^4 \text{ cm}$

b) $1 \text{ m} = 10^6 \text{ mm} \Rightarrow 250 \text{ m} = 2.5 \cdot 10^8 \text{ mm}$

c) $1 \text{ m} = 10^{-3} \text{ km} \Rightarrow 250 \text{ m} = 0.25 \text{ km}$

d) $1 \text{ m} = 10^{-9} \text{ Gm} \Rightarrow 250 \text{ m} = 2.5 \cdot 10^{-7} \text{ Gm}$

e) $1 \text{ m} = 10^9 \text{ nm} \Rightarrow 250 \text{ m} = 2.5 \cdot 10^{11} \text{ nm}$

Primjer 2: Preračunajmo.
a) $0.00025\ \text{m}^3$ u cm^3 b) $0.046\ \text{m}^3$ u dm^3 c) $300\ \text{cm}^3$ u dm^3

Rješenje:
a) $0.00025\ \text{m}^3 = 2.5 \cdot 10^{-4}\ \text{m}^3 = 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot (100\ \text{cm})^3 = 250\ \text{cm}^3$
b) $0.046\ \text{m}^3 = 4.6 \cdot 10^{-2}\ \text{m}^3 = 4.6 \cdot 10^{-2} \cdot (10\ \text{dm})^3 = 46\ \text{dm}^3$
c) $300\ \text{cm}^3 = 3 \cdot 10^2\ \text{cm}^3 = 3 \cdot 10^2 \cdot (10^{-1}\ \text{dm})^3 = 0.3\ \text{dm}^3$

Primjer 3: Izrazimo brzinu 36 m/s u km/s.

Rješenje: $36\ \frac{\text{m}}{\text{s}} = 36 \cdot \frac{\frac{1}{1\,000}\ \text{km}}{\frac{1}{3\,600}\ \text{h}} = 36 \cdot \frac{3\,600\ \text{km}}{1\,000\ \text{h}} = 129.6\ \text{km/h}$

Primjer 4: a) Izrazimo 36° 36’ 36” u stupnjevima.

Rješenje: $36^\circ\ 36'\ 36'' = 36^\circ + \left(\frac{36}{60}\right)^\circ + \left(\frac{36}{3\,600}\right)^\circ =$
$= 36^\circ + 0.6^\circ + 0.01^\circ = 36.61^\circ$

b) Izrazimo 73.22° u stupnjevima, minutama i sekundama.

Rješenje: $73.22^\circ = 73^\circ + 0.22 \cdot 60' = 73^\circ + 13.2' =$
$= 73^\circ\ 13' + 0.2 \cdot 60'' = 73^\circ\ 13'\ 12''$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2007.) $100\ \text{m}^2$ jednako je:
a) $10^6\ \text{cm}^2$ b) $10^4\ \text{cm}^2$ c) $10^{-4}\ \text{cm}^2$ d) $10^{-6}\ \text{cm}^2$.

2. (NI 2007.) Za koliko se vremena pri rotaciji oko svoje osi Zemlja okrene za 45°?
a) 3 sata
b) 4 sata i 45 minuta
c) 6 sati
d) 9 sati

3. (IK 2008.) Svjetski rekord u trčanju na 100 m je 9.73 s. Koliko je to km/h?

4. (NI 2008.) 36° 36’ =
a) 36.3° b) 36.36° c) 36.6° d) 36.72°.

5. (IK 2009.) Koliko je 12.5 sati?
a) 12 sati i 5 minuta
b) 12 sati i 15 minuta
c) 12 sati i 30 minuta
d) 12 sati i 50 minuta

6. (NI 2009.) 18º 12’ jednako je:
a) 18.1º b) 18.2 º c) 18.3 º d) 18.6 º.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. 4 500 cm^2 je:

a) 0.45 m^2 b) 4.5 m^2 c) 450 m^2 d) 45 000 m^2.

2. Paralelogram ima površinu 20 cm^2, a visina na osnovicu ima duljinu 4 cm. Duljina osnovice je:

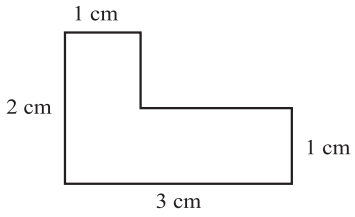
a) 40 mm b) 0.03 m c) 2.5 cm d) 0.5 dm.

3. 326 cm iznosi:

a) 0.326 m b) 3.26 m c) 32.6 m d) 326 m.

4. Opseg lika na slici je:

a) 7 cm b) 1.2 dm c) 100 mm d) 0.20 m.



5. Površina lika iz 4. zadatka je:

a) 6 cm^2 b) 0.1 dm^2 c) 0.0004 m^2 d) 700 mm^2.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Preračunajte 450 kg u: a) dag b) mg c) g.

2. Izrazite obujam od:

a) 0.00123 m^3 u mm^3 b) 3400 μm^3 u cm^3 c) 169 cm^3 u m^3.

3. Izrazite gustoću tvari od 500 g/cm^3 u kg/m^3.

4. Prvi izmjereni svjetski rekord u trčanju na 100 metara za muškarce iznosio je 10.6 sekundi, a postigao ga je 1912. godine Don Lippincott. Kolika je prosječna brzina rekordera izražena u:

a) m/s b) km/h?

Rekord 2009. godine postigao je Usain Bolt – 9.58 sekundi! Kolika je prosječna brzina rekordera Usaina Bolta izražena u:

c) m/s d) km/h?

5. Kolika je cijena kilograma krumpira ako 5.5 kg platimo 10 kuna i 89 lipa?

6. Zlatko trči brzinom od 27 km/h, a Marko brzinom 8 m/s.
a) Koji od njih dvojice trči brže?
b) Koliko u jednoj sekundi pretrči Zlatko?
c) Koliko u jednom satu pretrči Marko?

7. Po tečajnoj listi neke mjenjačnice prodajni tečaj za australski dolar je 4.464003 kn. Koliko dolara možete kupiti za 300 kuna? (Rezultat zaokružite na tri decimale).

8. Pero je u spremnik svog automobila natočio 41 litre goriva za 305.45 kuna. Koliko bi goriva Jakov mogao natočiti u spremnik svog automobila za isti novčani iznos ako je gorivo koje on treba skuplje za 6 lipa po litri?

9. Pravokutnik duljine 20 cm i širine 115 mm treba izrezati iz komada papira površine 0.4 m^2.
a) Izrazite širinu pravokutnika u centimetrima.
b) Kolika je površina pravokutnika u cm^2?
c) Kolika je površina preostalog papira (u cm^2) nakon izrezivanja pravokutnika?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. b **2.** a **3.** 37 km/h **4.** c **5.** c **6.** b

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** d **3.** b **4.** c **5.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. a) 45 000 dag = $4.5 \cdot 10^4$ dag
b) 450 000 000 mg = $4.5 \cdot 10^8$ mg
c) 450 000 g = $4.5 \cdot 10^5$ g
2. a) 1 230 000 mm^3 = $1.23 \cdot 10^6$ mm^3
b) $3.4 \cdot 10^{-9}$ cm^3
c) 0.000 169 m^3 = $1.69 \cdot 10^{-4}$ m^3
3. $5 \cdot 10^5$ kg/m^3
4. a) 9.43 m/s b) 33.96 km/h c) 10.44 m/s d) 37.58 km/h
5. 1.98 kn/kg
6. a) Marko b) 7.5 m c) 28.8 km
7. 67.204 AUD
8. 40.67 L
9. a) 11.5 cm b) 230 cm^2 c) 3 770 cm^2

1.1.6. Apsolutna vrijednost

Za realan broj x apsolutna vrijednost (modul) je broj $|x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$

Svojstva apsolutne vrijednosti (za sve $a, b \in \boldsymbol{R}$)

$$|a| = |-a|, \quad |a+b| \leq |a| + |b|, \quad |a \cdot b| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}, \sqrt{a^2} = |a|$$

Primjer 1: a) $\underbrace{\left|1-\sqrt{2}\right|}_{<0} = -\left(1-\sqrt{2}\right) = \sqrt{2}-1$

b) $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)^2} - \sqrt{\left(\sqrt{3}-1\right)^2} =$

$= \underbrace{\left|1-\sqrt{2}\right|}_{<0} - \underbrace{\left|\sqrt{2}-\sqrt{3}\right|}_{<0} - \underbrace{\left|\sqrt{3}-1\right|}_{>0} =$

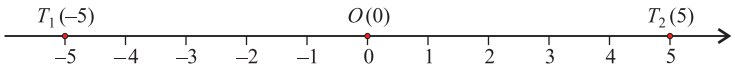
$= \sqrt{2} \cancel{-1} + \sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{3} \cancel{+1} =$

$= 2\left(\sqrt{2}-\sqrt{3}\right)$

Udaljenost točaka $A(a)$ i $B(b)$ brojevnog pravca je $|AB| = d(A,B) = |a-b| = |b-a|$.

Primjer 2: Odredimo na brojevnom pravcu točku $T(x)$ za koju vrijedi $|OT| = 5$.

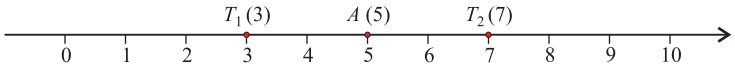
Rješenje: Dvije su takve točke, $T_1(-5)$ i $T_2(5)$ što možemo očitati s brojevnog pravca.



Primjer možemo riješiti ako iz $|OT| = 5$ zaključimo da tražimo točku $T(x)$ za čiju koordinatu vrijedi $|x-0| = |x| = 5$, odnosno $x_1 = 5,\ x_2 = -5$.

Primjer 3: Riješimo jednadžbu $|x-5| = 2$.

Rješenje: Rješavanje ovog zadatka možemo svesti na rješavanje zadatka: „Udaljenost točaka $T(x)$ i $A(5)$ iznosi 2.“ Kao i prošli primjer, vrlo jednostavno rješavamo na brojevnom pravcu.



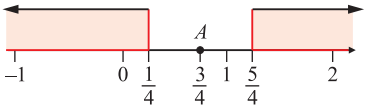
Zaključujemo da to mogu biti točke $T_1(3)$ i $T_2(7)$.

Primjer 4: Riješimo nejednadžbu $|4x-3| \geq 2$.

Rješenje: I ovaj zadatak možemo riješiti „prevođenjem na geometrijski problem“.

$$|4x-3| \geq 2 / : 4 \quad \Rightarrow \quad \left|x-\frac{3}{4}\right| \geq \frac{1}{2} \quad \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ „Odredimo točke $T(x)$ koje su od točke $A\left(\frac{3}{4}\right)$ udaljene za $\frac{1}{2}$ ili više.“



Ili „klasičnim“ rješavanjem.

$$|4x-3| \geq 2$$

$$4x-3 \leq -2 \qquad 4x-3 \geq 2$$

$$4x \leq 1 \qquad 4x \geq 5$$

$$x \leq \frac{1}{4} \qquad x \geq \frac{5}{4}$$

$$x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{4} \right] \cup \left[\frac{5}{4}, +\infty \right\rangle$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Tvrdnja „Realan broj x udaljen je od broja 2 za 5“ zapisuje se izrazom:

a) $|x-2|=5$ b) $|x+2|=5$ c) $|x+5|=2$ d) $|x-5|=2$.

2. (IK 2006.) Ako je $x=-4$, tada je $|x+3|+2$ jednako:

a) -1 b) 1 c) 3 d) 9.

3. (NI 2007.) $1-|-3|=$

a) 4 b) 2 c) -2 d) -4.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Vrijednost izraza $\big||x|-|y-1|-2\big|-\big|3+|x-y|\big|$ za $x=-1,\ y=\frac{1}{2}$ iznosi:

a) -5 b) -3 c) $-\frac{3}{2}$ d) $\frac{1}{2}$.

2. Izračunajte $\big|\sqrt{3}-|-3|\big|$.

a) $\sqrt{3}+3$ b) $\sqrt{3}-3$ c) $3-\sqrt{3}$ d) $-3-\sqrt{3}$

3. Ako je $x<-3$, tada je $\big|1-\big|1-|1+x|\big|\big|$ jednako:

a) $-x-3$ b) $x+1$ c) $3+x$ d) $3-x$.

4. Za koji x vrijedi $|x-2|>3$?

a) $x=5$ b) $x=0$ c) $x=7$ d) $x=2$

5. Vrijednost izraza $|x-2|+|x-3|$ za $x=\sqrt{5}$ je:

a) $2\sqrt{5}-5$ b) $-2\sqrt{5}+5$ c) 1 d) $-2\sqrt{5}+1$.

6. Ako je $f(x)=\sqrt{9x^2-24x+16}-\sqrt{1-4x+4x^2}$, koliko je $f\left(\sqrt{3}\right)$?

a) $5-5\sqrt{3}$ b) $5\sqrt{3}+5$ c) $5\sqrt{3}-5$ d) $\sqrt{3}-3$

7. Kolika je udaljenost točaka $A(-5)$ i $B(6)$?

a) -11 b) 11 c) 1 d) 5

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Za točke $A(6)$ i $B(-2)$ odredite točku C tako da vrijedi $d(A,B)=2\,d(B,C)$.

2. Izračunajte vrijednost izraza $|x-1|+|x+1|$, ako je $x=\sqrt{3}-2$.

3. Ako je na brojevnom pravcu točka $T(x)$ lijevo od točke $S(y)$, onda za realne brojeve x i y vrijedi nejednakost _____ .

4. Izračunajte $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ ako je $f(x)=\dfrac{\big||x-1|-1\big|}{\big||x+2|-3\big|}$.

5. Izračunajte vrijednost izraza $\Big|\big||x|-2\big|-1\Big|-2\Big|$ ako je $x=-5$.

6. Skicirajte na brojevnom pravcu sve točke T za koje vrijedi $|OT|\geq 3$.

7. Izračunajte: $\sqrt{\left(\sqrt{6}-\sqrt{7}\right)^2}$.

8. Riješite jednadžbu $|3-x|=9$.

9. Izračunajte $\sqrt{x^2-6x+9}$ za $x=\frac{7}{5}$.

10. Prikažite na brojevnom pravcu sve točke za koje vrijedi $|x-1|<4$.

11. Odredite koordinatu točke T ako je od točke $A(-2)$ udaljena za 1. Prikažite točku T na pravcu.

12. Ako je $x\in\langle -2,-1\rangle$, koliko je $|3x+7|-|3-7x|$?

13. Koliko je $\sqrt{\left(2-2\sqrt{2}\right)^2}-\sqrt{\left(2\sqrt{2}-9\right)^2}$?

14. Izračunajte $\dfrac{\left|3-\sqrt{12}\right|-\left|1-\sqrt{3}\right|}{\left|\sqrt{12}-4\right|-\left|\sqrt{48}-8\right|}$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a **2.** c **3.** c

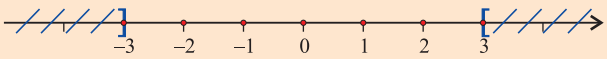
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. b **2.** c **3.** a **4.** c **5.** c **6.** d **7.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $C_1(2)$, $C_2(-6)$ **2.** 2 **3.** $x<y$ **4.** $\frac{1}{3}$ **5.** 0

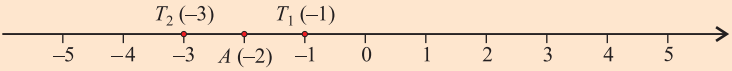
6. $x\in\langle -\infty,-3]\cup[3,\infty\rangle$



7. $\sqrt{7}-\sqrt{6}$ **8.** $x_1=-6$, $x_2=12$ **9.** $\frac{8}{5}$

10.

11.



12. $10x+4$ **13.** $4\sqrt{2}-11$ **14.** $\frac{1}{2}$

1.1.7. Skup kompleksnih brojeva

$$\boldsymbol{C} = \left\{ a + bi;\ a, b \in \boldsymbol{R},\ i^2 = -1 \right\}$$

Kompleksne brojeve $z = a + bi = Re\,(z) + Im\,(z)$ i $w = c + di = Re\,(w) + Im\,(w)$ zbrajamo (oduzimamo) tako da zbrojimo (oduzmemo) posebno realne dijelove, a posebno imaginarne. Množimo tako da svaki član jednog broja množimo svakim članom drugog broja. Dijelimo ih tako da i brojnik i nazivnik množimo s konjugirano-kompleksnim nazivnikom ($\overline{z}$) te tako ukinemo imaginarnu jedinicu iz nazivnika.

$$\overline{z} = a - bi$$

Dva kompleksna broja su jednaka, ako su im jednaki realni dijelovi i ako su im jednaki imaginarni dijelovi.

Potencije imaginarne jedinice:

$$i^1 = i^5 = i^9 = \ldots = i^{4n+1} = i$$
$$i^2 = i^6 = i^{10} = \ldots = i^{4n+2} = -1$$
$$i^3 = i^7 = i^{11} = \ldots = i^{4n+3} = -i$$
$$i^4 = i^8 = i^{12} = \ldots = i^{4n} = 1.$$

Kompleksan broj možemo prikazati u kompleksnoj ravnini, tako da realni dio odredimo na realnoj osi, a imaginarni dio na imaginarnoj osi. Udaljenost kompleksnog broja do ishodišta jednaka je $|z|$. Kompleksan broj $z = a + bi$ možemo prikazati kao uređeni par u kompleksnoj ravnini (a, b).

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

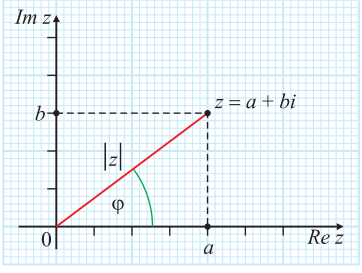
Svaki kompleksan broj može se zapisati u trigonometrijskom obliku

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Kut φ je kut kojeg modul kompleksnog broja z zatvara s pozitivnim dijelom osi x (realne osi kompleksne ravnine). Nazivamo ga još i argument kompleksnog broja z. S obzirom na to da promatramo kut koji se nalazi u prvom punom okretu, postoji ograničenje $0 \le \varphi \le 2\pi$.

$$r = |z|,\ \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}$$

$$\left.\begin{aligned} \sin\varphi = \frac{Im\,(z)}{|z|} \Big/ \cdot|z| &\Rightarrow Im\,(z) = |z|\sin\varphi \\ \cos\varphi = \frac{Re\,(z)}{|z|} \Big/ \cdot|z| &\Rightarrow Re\,(z) = |z|\cos\varphi \end{aligned}\right\} z = |z|\cos\varphi + i|z|\sin\varphi = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Za kompleksne brojeve $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ i $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$ vrijedi:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$$

$$z^n = r^n\left(\cos n\varphi + i\sin n\varphi\right)$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,\ldots,n-1$$

Primjer 1: Neka su $z = 2-3i$ i $w = -4+i$.
Izračunajmo: $z+w,\ z-w,\ zw,\ \overline{z},\ \overline{w},\ |z|,|w|,\ \frac{z}{w}$.

Rješenje: $z+w = 2-4-3i+i = -2-2i$

$$z-w = 2-3i-(-4+i) = 2+4-3i-i = 6-4i$$

$$z\cdot w = (2-3i)\cdot(-4+i) = -8+2i+12i-3i^2 =$$

$$= -8+14i-3(-1) = -5+14i$$

$$\overline{z} = 2+3i,\quad \overline{w} = -4-i$$

$$|z| = \sqrt{2^2+(-3)^2} = \sqrt{13},\ |w| = \sqrt{(-4)^2+1^2} = \sqrt{17}$$

$$\frac{z}{w} = \frac{2-3i}{-4+i} = \frac{2-3i}{-4+i}\cdot\frac{-4-i}{-4-i} = \frac{-8-2i+12i+3i^2}{(-4)^2-i^2} =$$

$$= \frac{-8+10i-3}{16+1} = \frac{-11+10i}{17}$$

Primjer 2: Ako je $z_1 = 3-2i,\ z_2 = 3x-4yi$, a $z_1 = z_2$, odredimo x i y.

Rješenje: $Re(z_1) = Re(z_2)\quad 3 = 3x \quad\Rightarrow\quad x = 1$

$$Im(z_1) = Im(z_2)\quad -2 = -4y \quad\Rightarrow\quad y = \frac{1}{2}$$

Primjer 3: Izračunajmo: $5i^{37}+i^2-8i^5-2i^{26}+i^{17}$.

Rješenje: $5i^{37}+i^2-8i^5-2i^{26}+i^{17} = 5^{4\cdot9+1}+(-1)-8i^{4+1}-2i^{4\cdot6+2}+i^{4\cdot4+1}$

$$= 5\left(i^4\right)^9\cdot i-1-8i^4\cdot i-2\left(i^4\right)^6\cdot i^2+\left(i^4\right)^4\cdot i =$$

$$= 5i-1-8i-2(-1)+i =$$

$$= 1-2i$$

Primjer 4: Odredimo $|z|$ ako je $z=\dfrac{(1+2i)^5}{3i(4-3i)^3}$.

Rješenje: $|z|=\left|\dfrac{(1+2i)^5}{3i(4-3i)^3}\right|=\dfrac{|1+2i|^5}{|3i||4-3i|^3}=\dfrac{\sqrt{1^2+2^2}^5}{\sqrt{3^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2}^3}=$

$$=\frac{\sqrt{5}^5}{3\cdot 5^3}=\frac{5^2\sqrt{5}}{3\cdot 5^3}=\frac{\sqrt{5}}{15}$$

Primjer 5: Realan broj 100 zapišimo kao umnožak dvaju kompleksnih brojeva.

Rješenje: $100=36+64=6^2+8^2=6^2-(8i)^2=(6+8i)(6-8i)$

To naravno nije jedini mogući umnožak, sljedeći bi bio $100=(6i-8)(6i+8)$ i još mnogi.

Primjer 6: Zapišimo kompleksan broj $z=i-\sqrt{3}$ u trigonometrijskom obliku.

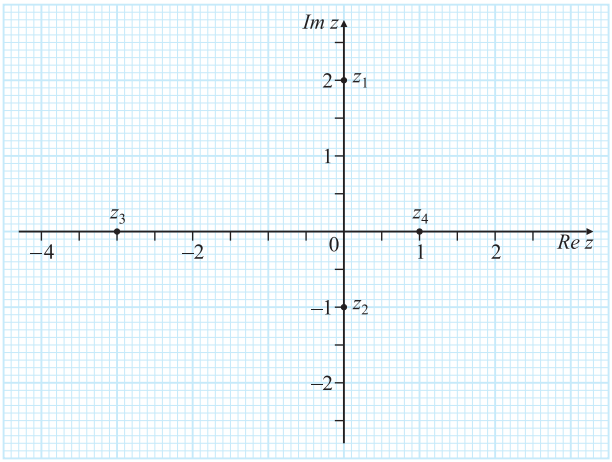
Rješenje: $z=i-\sqrt{3}=-\sqrt{3}+i \Rightarrow$ drugi kvadrant

$$\left.\begin{aligned}\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{3+1}}=\frac{1}{2}&\Rightarrow\varphi=\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\\ \cos\varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}&\Rightarrow\varphi=\frac{5\pi}{6},\frac{7\pi}{6}\end{aligned}\right\}\ \varphi=\frac{5\pi}{6},\ |z|=2\Rightarrow z=2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

Primjer 7: Zapišimo sljedeće kompleksne brojeve u trigonometrijskom obliku:

a) $z_1=2i$ b) $z_2=-i$ c) $z_3=-3$ d) $z_4=1$.

Rješenje:



a) Sa slike vidimo da z_1 s pozitivnim dijelom realne osi zatvara pravi kut i da je $|z_1| = 2$, tako da je trigonometrijski oblik $\Rightarrow z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$.

b) z_2 s pozitivnim dijelom realne osi zatvara kut od 270°, a modul je 1 $\Rightarrow z_2 = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}$.

c) Argument kompleksnog broja z_3 je 180°, a udaljenost od ishodišta je 3 $\Rightarrow z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

d) z_4 se nalazi na pozitivnom dijelu realne osi, tako da je kut $\varphi = 0$, a modul 1 $\Rightarrow z_4 = \cos 0 + i\sin 0$.

Primjer 8: Za zadane kompleksne brojeve $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$ i $z_2 = 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$ izračunajmo umnožak i kvocijent.

Rješenje: a) $z_1 \cdot z_2 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)\cdot 3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right) =$

$$= 6\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6} + \frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= 6\left(\cos\frac{35\pi}{12} + i\sin\frac{35\pi}{12}\right) =$$

$$= 6\left(\cos\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right) + i\sin\left(2\pi + \frac{11\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= 6\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$$

b) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)}{3\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)} =$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6} - \frac{7\pi}{4}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\left(-\frac{7\pi}{12} + 2\pi\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12} + 2\pi\right)\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right).$$

Primjer 9: Izračunajmo: a) $\left(i-\sqrt{3}\right)^{12}$ b) $\sqrt[4]{i-\sqrt{3}}$.

Rješenje: a) Koristeći rezultat iz 6. primjera, saznajemo trigonometrijski oblik kompleksnog broja z.

$$z=\left[2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)\right]^{12}=2^{12}\left(\cos\frac{5\pi}{6}\cdot 12+i\sin\frac{5\pi}{6}\cdot 12\right)=$$

$$=2^{12}\left(\cos 10\pi+i\sin 10\pi\right)$$

Argument kompleksnog broja mora biti u prvom punom okretu, tako da koristeći periodičnost trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus možemo smanjiti kut $10\pi=5\cdot 2\pi$.

$$\left(i-\sqrt{3}\right)^{12}=2^{12}\left(\cos 0+i\sin 0\right)=2^{12}$$

b) $$\sqrt[4]{i-\sqrt{3}}=\sqrt[4]{2\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}=$$

$$=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2k\pi}{4}\right),\quad k=0,1,2,3$$

Dovoljno je napisati rješenje u ovom obliku, ali ako želimo ispisati sva četiri rješenja, dobit ćemo ih uvrštavajući u formulu redom vrijednosti broja k.

$$k=0\quad w_1=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$$

$$k=1\quad w_2=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+2\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{24}+i\sin\frac{17\pi}{24}\right)$$

$$k=2\quad w_3=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+4\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+4\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{29\pi}{24}+i\sin\frac{29\pi}{24}\right)$$

$$k=3\quad w_4=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{6}+6\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{6}+6\pi}{4}\right)=\sqrt[4]{2}\left(\cos\frac{41\pi}{24}+i\sin\frac{41\pi}{24}\right)$$

Primjer 10: Izračunajmo: $\sqrt[6]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}}$.

Rješenje: $\sqrt[6]{\dfrac{1+i}{\sqrt{3}-i}} = \sqrt[6]{\dfrac{\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)}{2\left(\cos\dfrac{11\pi}{6}+i\sin\dfrac{11\pi}{6}\right)}} =$ koristimo formulu za dijeljenje kompleksnih brojeva u trigonometrijskom obliku $=$

$$= \sqrt[6]{2^{-\frac{1}{2}}\left(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}\right)} = \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{6}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{6}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{6}\right) =$$

$$= 2^{-\frac{1}{12}}\left(\cos\frac{5\pi+24k\pi}{72}+i\sin\frac{5\pi+24k\pi}{72}\right),\ k=0,1,2,3,4,5$$

Primjer 11: Riješimo jednadžbu $16z^4+1=0$.

Rješenje: $16z^4=-1 \Rightarrow z^4=-\dfrac{1}{16} \Rightarrow z=\sqrt[4]{-\dfrac{1}{16}}$

$$-\frac{1}{16}=\frac{1}{16}(\cos\pi+i\sin\pi)$$

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{1}{16}}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\pi+2k\pi}{4}\right),\ k=0,1,2,3$$

$k=0$ $\quad z_1=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$k=1$ $\quad z_2=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi+2\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{3\pi}{4}+i\sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$k=2$ $\quad z_3=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi+4\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+4\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{5\pi}{4}+i\sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$k=3$ $\quad z_4=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\pi+6\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi+6\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{7\pi}{4}+i\sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$

Primjer 12: Odredimo skup točaka kompleksne ravnine za koje vrijedi $|z+i|=4$.

Rješenje: Ako ovaj uvjet zapišemo $|z-(-i)|=4$, možemo problem prevesti na geometrijski: „Udaljenost točke z od točke $(-i)$ je 4. Odredimo točku z.“ Točka z ima koordinate (a, b), a točka $(-i)$ koordinate $(0, -1)$.

Točke koje su od točke $(-i)$ udaljene za 4 nalaze se na kružnici sa središtem u $(0, -1)$ i polumjerom 4.

U skupu $\boldsymbol{C}$ općenito vrijedi: skup točaka $|z-z_0|=r$ je kružnica sa središtem u z_0 polumjera r, za $z, z_0 \in \boldsymbol{C}$, $r>0$.

Primjer 13: Riješimo jednadžbu: $z \cdot \overline{z} - i = 2 + z^2$, $z \in \boldsymbol{C}$.

Rješenje: Kako je općenit zapis kompleksnog broja $z = a + bi$, dobivamo:

$$(a+bi)\cdot(a-bi) - i = 2 + (a+bi)^2$$

$$a^2 + b^2 - i = 2 + a^2 + 2abi + (bi)^2$$

$$b^2 - i = 2 + 2abi - b^2$$

$$Re(b^2 - i) = b^2, \quad Re(2 + 2abi - b^2) = 2 - b^2$$

$$Im(b^2 - i) = -1, \quad Im(2 + 2abi - b^2) = 2ab$$

$$b^2 = 2 - b^2$$

$$-1 = 2ab$$

$$2b^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b_{1,2} = \pm 1$$

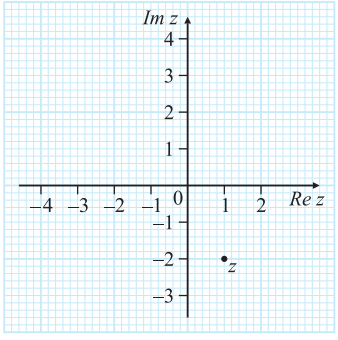
$$b_1 = 1 \quad \Rightarrow \quad -1 = 2a \quad \Rightarrow \quad a_1 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z_1 = -\frac{1}{2} + i$$

$$b_2 = -1 \quad \Rightarrow \quad -1 = -2a \quad \Rightarrow \quad a_2 = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad z_2 = \frac{1}{2} - i$$

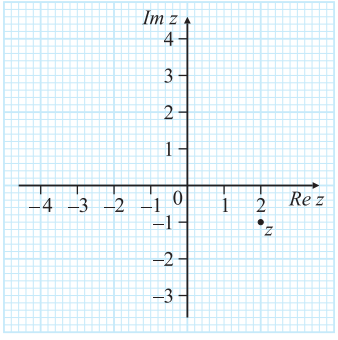
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2007.) Na kojoj je slici prikazan kompleksan broj $-2 + i$?

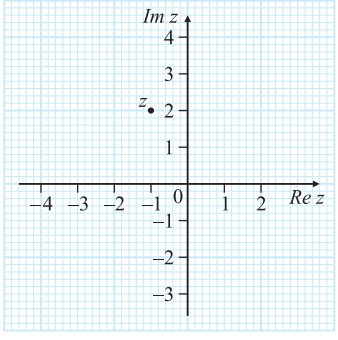
a)



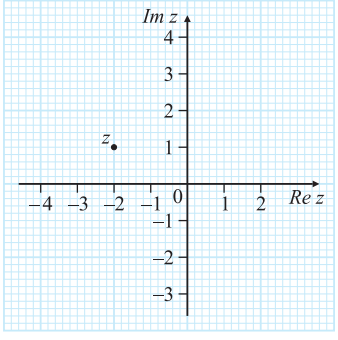
b)



c)



d)



2. (NI 2007.) $\dfrac{6-4i}{1+i}$ jednako je: _____ .

3. (NI 2007.) Svi brojevi koji imaju isti modul kao broj $z = 1 + i\sqrt{3}$ u koordinatnom sustavu nalaze se:

a) u I. kvadrantu
b) na imaginarnoj osi
c) na realnoj osi,
d) na kružnici.

4. Za kompleksan broj $z = -3 + 5i$ odredite $z \cdot \overline{z}$.

5. Odredite $a,\ b \in R$ tako da brojevi $z = a - 2 + (b+3)i$ i $w = \frac{1}{2}a + 3bi$ budu konjugirano-kompleksni.

6. (IK 2008.) Broj $(-1 + 2i)^3$ zapišite u obliku $a + bi$.

7. (NI 2009.) Kompleksan broj $\frac{2+3i}{3-2i}$ jednak je:

a) $-i$ b) i c) $\frac{2}{3} - \frac{3}{2}i$ d) $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}i$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Koliko iznosi $\left(\frac{i^{101}}{i^{303} + i^{202}} \right)^2$?

a) $-\frac{i}{2}$ b) $\frac{i}{2}$ c) 1 d) $-\frac{1}{2}$

2. Realni dio kompleksnog broja $\left(1 + \frac{1}{i} + \frac{1}{i^2} + \frac{1}{i^3} + \frac{1}{i^4} + \frac{1}{i^5} \right)^3$ iznosi:

a) 1 b) –3 c) 2 d) –2.

3. Izračunajte $\sqrt{-15 + 8i}$.

a) $\pm(1 - i)$ b) $\pm\left(2\sqrt{2} - 3i\right)$ c) $\pm(1 + 4i)$ d) $\pm\left(3 + i2\sqrt{2}\right)$

4. Izračunajte $Im\left(\frac{1+2i}{2-3i} \cdot \frac{13}{1+i} \right)$.

a) 11 b) $11i$ c) $\frac{11}{2}i$ d) $\frac{11}{2}$

5. Ako je $z = \frac{\sqrt{2}-1}{1-i}$, onda je imaginarni dio od $\overline{z}$ jednak:

a) $-\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} - 1\right)$ b) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}\left(-\sqrt{2} + 1\right)$ d) $\frac{1}{2}\left(\sqrt{2} + 1\right)$.

6. Koliki je umnožak realnih brojeva x i y za koje vrijedi $\frac{x-1}{3+i} + \frac{y-1}{3-i} = i$?

a) -24 b) 24 c) -3 d) 2

7. Apsolutna vrijednost kompleksnog broja $\frac{1+i}{1-i}+\frac{i-1}{i+1}$ iznosi:

a) 2 b) 1 c) 4 d) $\sqrt{2}$.

8. Kompleksni brojevi z za koje vrijedi $Re\left(\frac{z+1}{z-1}\right)=0$ nalaze se:

a) na kružnici $x^2+y^2+x-y=0$

b) izvan kružnice $x^2+y^2-x+y=0$

c) na kružnici $x^2+y^2=1$

d) unutar kružnice $x^2+y^2-x-y=0$.

9. Kompleksni broj iz prvog kvadranta ima svojstvo da je $Re\,(z)$ četiri puta veći od $Im\,(z)$.
Koliko puta je $Re\,(z^2)$ veći od $Im\,(z^2)$?

a) 1.875 b) 2.55 c) 2.85 d) 4.875

10. Ako je $z=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$, vrijednost izraza $\left(z^2-z\sqrt{2}+1\right)\left(z^2+z\sqrt{2}+1\right)$ jednaka je:

a) -1 b) 0 c) 1 d) i

11. Kompleksni broj z rješenje je jednadžbe $|z|-z=1+2i$:

a) $z=\frac{3}{2}+2i$ b) $z=\frac{3}{2}-2i$ c) $z=\frac{3}{4}+4i$ d) $z=2+\frac{3}{2}i$.

12. Za koji realni broj x je imaginarni dio kompleksnog broja $\frac{1-xi}{1+i}$ jednak 0?

a) 1 b) $\frac{1}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) -1

13. Realni dio kompleksnog broja $z=(2+\sqrt{-16})^3$ je:

a) -85 b) -86 c) -87 d) -88.

14. Izračunajte $\left(2i^{252}-i^{96}+i^{33}\right)^{-4}$.

a) -2^{-4} b) -2^{-3} c) -2^{-2} d) -2^{-1}

15. Izračunajte $2^{-50}\cdot\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)^{50}$.

a) -1 b) 1 c) $-i$ d) i

16. Odredite sve parametre $a\in\boldsymbol{R}$, $a\geq 0$ takve da je broj $\left(\sqrt{a}-i\sqrt{a}\right)^8$ realan.

a) $a\in\boldsymbol{R}$, $a\geq 0$ b) $a=\frac{1}{16}$

c) $a=-\frac{1}{16}$ d) Ne postoji takav a.

17. Odredite parametar $a \in \boldsymbol{R},\ a \geq 0$ takav da je $\left(\sqrt{a}+i\sqrt{a}\right)^8 = 16.$

a) $a \in \boldsymbol{R},\ \ a \geq 0$ b) $a = 1$
c) $a = 2$ d) Ne postoji takav a. e)

18. Odredite realan parametar $b \in \boldsymbol{R},\ b \geq 0$ takav da je $\left|z_2 z_1 - z_2 \overline{z}_1\right| = 8b$, ako je $z_1 = -1+4\sqrt{-1},\ z_2 = -1-bi.$

a) Ne postoji takav b. b) $b = 1$
c) $b \in \langle 0, 1 \rangle$ d) $b = \frac{1}{8}$

19. Rješenje jednadžbe $|z| + \overline{z} = 4 - 2i$ je:

a) $z = \frac{3}{2} + 2i$ b) $z = \frac{3}{2} - 2i$ c) $z = \frac{3}{4} + 4i$ d) $z = 2 + \frac{3}{2}i.$

20. Odredite $Re\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^9.$

a) –1 b) 1 c) – 0.5 d) 0.5

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. i^{245} iznosi _____ .

2. Realni dio kompleksnog broja $\frac{7-4i}{3}$ iznosi _____ .

3. Izračunajte $z + \overline{z}.$

4. Izračunajte $z \cdot \overline{z}.$

5. Izračunajte $2i^{39} + i^3 + 12i^{91} - 4i^{30} + i^{18}.$

6. Odredite vrijednost izraza $\frac{\overline{z}-3}{z+5}$ ako je $z = 5 - 2i.$

7. Kojim kompleksnim brojem treba pomnožiti $z_1 = 3 + i$ da bi umnožak bio $z = 16 + 2i$?

8. Odredite vrijednost realnih parametara m i n tako da kompleksni brojevi $z_1 = (2m-n) - i(n-4)$ i $z_2 = (8m-1) + i(4m+3)$ budu konjugirano-kompleksni.

9. Odredite vrijednost parametara x i y: $(x+1) + i(y-3) = (1+i)(5+3i).$

10. Odredite imaginarni dio kompleksnog broja $z = \frac{5i}{2+i\sqrt{3}}.$

11. Izračunajte $|z|$ ako je $z = \frac{2-i}{(3+i)^2}.$

12. Izračunajte: $\left(\frac{i^{26}-i^{36}}{i^{6}-i^{16}}\right)^{66}$.

13. Odredite realne brojeve x i y iz jednakosti $3x+2yi-(1-i)i=-4-5i$.

14. Izračunajte: $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}\right)^{12}$.

15. Riješite jednadžbu: $81z^{4}-1=0$.

16. Ako je apsolutna vrijednost broja $z=a+bi$ jednaka 2, koliko je $|a+bi|^{5}$?

17. Ako je $z=3-2i$, koliko iznosi $Im\frac{(z-\overline{z})^{4}}{16\overline{z}(z-3+2\overline{z})}$?

18. Riješite jednadžbu: $z\cdot\overline{z}+zi=4-2i$.

19. Koliko je $\left(\frac{3-i}{2+i}\right)^{4}$?

20. Ako je $z_1=1+i$, odredite $Re\left(\frac{z^{2}+3\overline{z}+i^{1985}}{|z|^{2}-z}\right)$.

21. Je li kompleksan broj $z=-3\left(\cos\frac{\pi}{12}+i\sin\frac{\pi}{12}\right)$ zapisan u trigonometrijskom obliku?

22. Zadan je kompleksan broj $z=-16+16i$.

a) Zapišite broj u trigonometrijskom obliku. b) Izračunajte z^{13}.

c) Izračunajte $\sqrt[4]{z}$.

23. Zadani su kompleksni brojevi $z=\frac{3}{2}-\frac{3}{2}i$ i $w=-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}i\sqrt{3}$.

a) Zapišite oba broja u trigonometrijskom obliku b) Izračunajte $z^{16}:w^{12}$.

c) Izračunajte $z^{-20}\cdot w^{15}$. d) Odredite $\sqrt{\frac{z}{w}}$.

24. Odredite $z=\sqrt[8]{3-i\sqrt{3}}$. Izračunajte samo one korijene za koje vrijedi da je $\varphi\le\frac{\pi}{4}$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. d **2.** a **3.** d **4.** 34 **5.** $a=4, b=-\frac{3}{4}$ **6.** c **7.** d

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. b **2.** d **3.** c **4.** d **5.** a **6.** a **7.** a **8.** c **9.** a **10.** b
11. b **12.** d **13.** d **14.** c **15.** d **16.** a **17.** b **18.** a **19.** a **20.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. i **2.** $\frac{7}{3}$ **3.** $2Re(z)$ **4.** $\left(Re(z)\right)^2+\left(Im(z)\right)^2$ **5.** $3-15i$; **6.** $\frac{2+3i}{13}$

7. $z_2=5-i$ **8.** $m=-\frac{3}{5},\ n=\frac{23}{5}$ **9.** $x=1,\ y=11$ **10.** $\frac{10}{7}$ **11.** $\frac{\sqrt{5}}{10}$

12. 1 **13.** $x=-1, y=-2$ **14.** 1 **15.** $\sqrt[4]{\frac{1}{81}}=\frac{1}{3}\left(\cos\frac{k\pi}{2}+i\sin\frac{k\pi}{2}\right)$, $k=0,\ 1,\ 2,\ 3$

16. 32 **17.** $-\frac{36}{65}$ **18.** $z_1=-2+i,\ z_2=-2$ **19.** -4 **20.** $\frac{3}{2}$ **21.** Ne

22. a) $z=16\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ b) $z^{13}=2^{\frac{117}{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=2^{58}(1-i)$

c) $\sqrt[4]{z}=\sqrt[4]{2^{\frac{9}{2}}}\left(\cos\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{3\pi}{4}+2k\pi}{4}\right)$

$k=0\ldots\sqrt[4]{z}=2^{\frac{9}{8}}\left(\cos\frac{3\pi}{16}+i\sin\frac{3\pi}{16}\right)$

$k=1\ldots\sqrt[4]{z}=2^{\frac{9}{8}}\left(\cos\frac{11\pi}{16}+i\sin\frac{11\pi}{16}\right)$

$k=2\ldots\sqrt[4]{z}=2^{\frac{9}{8}}\left(\cos\frac{19\pi}{16}+i\sin\frac{19\pi}{16}\right)$

$k=3\ldots\sqrt[4]{z}=2^{\frac{9}{8}}\left(\cos\frac{27\pi}{16}+i\sin\frac{27\pi}{16}\right)$

23. a) $z=\frac{3\sqrt{2}}{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),\ w=\frac{4}{3}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$

b) $z^{16}:w^{12}=\left[\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^{16}(\cos 0+i\sin 0)\right]:\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{12}(\cos 0+i\sin 0)\right]=\frac{3^{28}}{2^{32}}$

c) $z^{-20}\cdot w^{15}=\left[\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^{-20}(\cos\pi+i\sin\pi)\right]\cdot\left[\left(\frac{4}{3}\right)^{15}(\cos 0+i\sin 0)\right]=-\frac{2^{40}}{3^5}$

d) $\sqrt{\frac{z}{w}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}\left(\cos\frac{\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{2}+i\sin\frac{\frac{5\pi}{12}+2k\pi}{2}\right)$

$k=0\ldots\sqrt{\frac{z}{w}}=\frac{3}{4}\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{5\pi}{24}+i\sin\frac{5\pi}{24}\right)$

$k=1\ldots\sqrt{\frac{z}{w}}=\frac{3}{4}\sqrt[4]{8}\left(\cos\frac{29\pi}{24}+i\sin\frac{29\pi}{24}\right)$

24. $z=\sqrt{2\sqrt{3}\left(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6}\right)}=\sqrt[8]{2\sqrt{3}}\left(\cos\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{8}+i\sin\frac{\frac{11\pi}{6}+2k\pi}{8}\right)$

$k=0\ldots z=\sqrt[16]{12}\left(\cos\frac{11\pi}{48}+i\sin\frac{11\pi}{48}\right)$

1.2. Algebarski izrazi i algebarski razlomci

1.2.1. Algebarski izrazi

Kvadrat binoma	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Kub binoma	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$
Razlika kvadrata	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Zbroj kubova	$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
Razlika kubova	$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$(a-b)^2 = (b-a)^2$ ✓ ~~$(a-b)^2 = a^2 - b^2$~~

$a-b = -(b-a)$ ✓ ~~$a-b = -(a-b)$~~

$-a-b = -(a+b)$ ✓ ~~$-a-b = -(a-b)$~~

Primjer 1: Izračunajmo: $\left(\frac{1}{4}a + 2b^3\right)^2$.

Rješenje: $\left(\frac{1}{4}a + 2b^3\right)^2 = \left(\frac{1}{4}a\right)^2 + \cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{4}_{\,2}}a \cdot {}^{1}\cancel{2}b^3 + \left(2b^3\right)^2 =$

$= \frac{1}{16}a^2 + ab^3 + 4b^6$

Primjer 2: Nadopunimo:

$$\left(\frac{3}{5}a^2b + \square\right)^3 = \frac{27}{125}a^6\square + \square\, a^5b^4 + 5a^4\square + \frac{125}{27}a^3b^6.$$

Rješenje: Vidimo da je $\frac{125}{27}a^3b^6$ kub izraza $\frac{5}{3}ab^2$, dakle:

$$\left(\frac{3}{5}a^2b + \boxed{\frac{5}{3}ab^2}\right)^3 = \frac{27}{125}a^6\boxed{b^3} + \boxed{3\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\frac{5}{3}}a^5b^4 + 5a^4\boxed{b^5} + \frac{125}{27}a^3b^6 =$$

$$= \frac{27}{125}a^6b^3 + \frac{3}{5}a^5b^4 + 5a^4b^5 + \frac{125}{27}a^3b^6$$

Primjer 3: Izračunajmo: $\big(n + (n+1) + (n+2)\big)^3$.

Rješenje: $\big(n + (n+1) + (n+2)\big)^3 = (n+n+1+n+2)^3 = (3n+3)^3 =$

$= (3n)^3 + 3\cdot(3n)^2\cdot 3 + 3\cdot 3n\cdot 3^2 + 3^3 =$

$= 27n^3 + 81n^2 + 81n + 27$

Primjer 4: Izračunajmo: $(4-x)(3+x)-1+(x-3)^2$.

Rješenje: $(4-x)(3+x)-1+(x-3)^2 =$

$= 12+4x-3x-\cancel{x^2}-1+\cancel{x^2}-6x+9 = 20-5x = 5(4-x)$

Primjer 5: Izračunajmo: $(a-2)\cdot(a+2)\cdot(a^2+4)\cdot(a^4+16)$.

Rješenje: $(a-2)\cdot(a+2)\cdot(a^2+4)\cdot(a^4+16) =$

$= (a^2-4)(a^2+4)(a^4+16) = (a^4-16)(a^4+16) = a^8-256$

Primjer 6: Izračunajmo: $\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}+a\right)$.

Rješenje: $\left(\frac{1}{2}-a\right)\left(\frac{1}{2}+a\right) = \frac{1}{4}-a^2$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Koja od sljedećih tvrdnji **nije uvijek točna** za realne brojeve a i b?

a) $a-b=-(b-a)$ b) $(a-b)^2=(b-a)^2$

c) $a^2-b^2=(a-b)^2$ d) $(a+b)^2=(-a-b)^2$

2. (IK 2006.) Ako je $x + 2y = 11$, koliko je $x^2 + 4xy + 4y^2 + 7$?

a) 49 b) 64 c) 96 d) 128

3. (IK 2006.) Pomnožite i pojednostavnite $(x – 4)(3 + x)$.

4. (IK 2006.) Izračunajte: $(2x – 1)^2$.

5. (NI 2007.) Za sve realne brojeve x i y vrijedi:

a) $y-x=-(x+y)$ b) $y-x=-(x-y)$

c) $y-x=-(-y-x)$ d) $y-x=-(y-x)$.

6. (NI 2007.) Popunite $\left(3+\square\right)^2 = \square + \square + 4x^2$.

7. (NI 2008.) Izračunajte: $(2x – 3)^2$.

8. (NI 2008.) Neka je $x^2 – y^2 = 75$ i $x + y = 15$.

a) Koliko je $x – y$? b) Koliko je $2x – 2y + 1$?

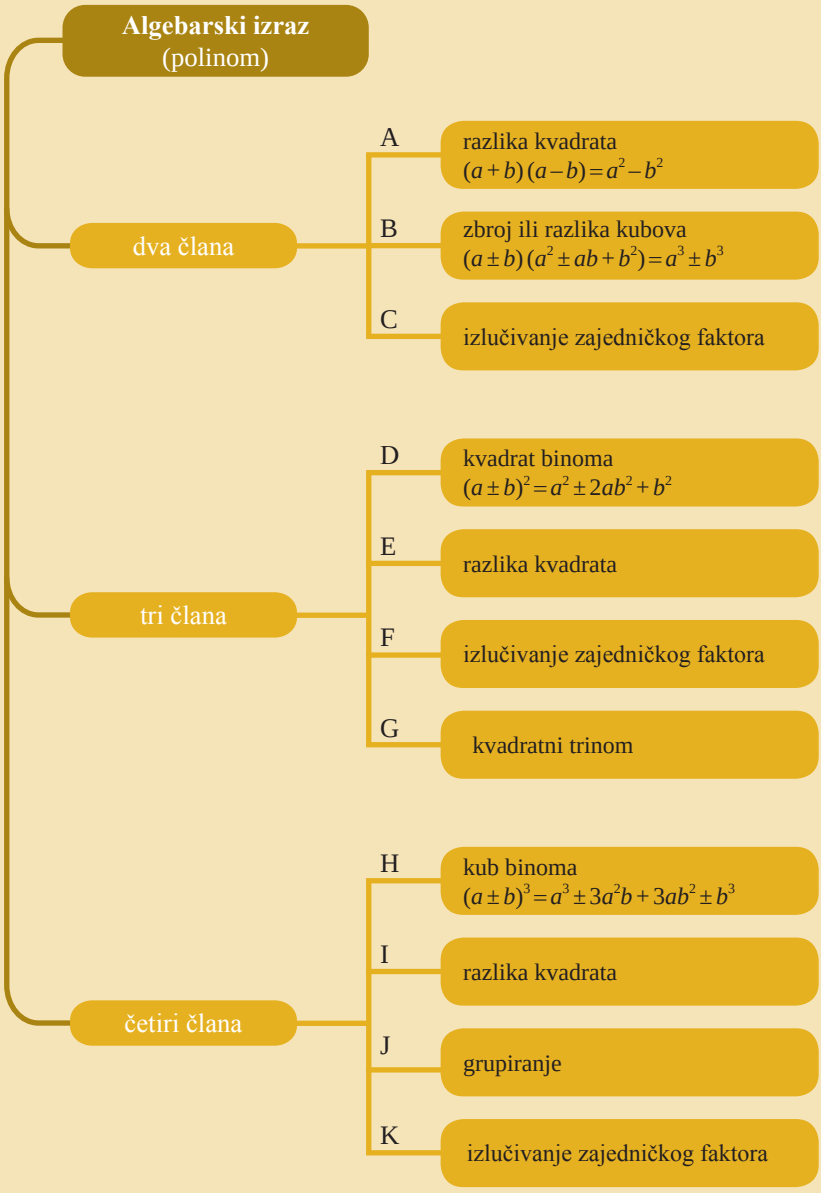
9. (NI 2009.) Izraz $(3m – 2)^2$ jednak je:

a) $3m^2 – 6m + 2$ b) $9m^2 – 6m + 4$

c) $9m^2 – 12m + 4$ d) $3m^2 – 12m + 2$.

Rastavljanje algebarskih izraza na faktore

Kod rastavljanja izraza na faktore, promatramo možemo li što izlučiti, a nakon toga pokušamo, s obzirom na broj članova, prepoznati neki od poznatih algebarskih izraza ili neki drugi način zapisivanja u oblik umnoška. Donji grafikon možemo nastaviti povećavanjem broja članova izraza, ali dalje samo kombiniramo s gornjim situacijama, (npr. 5 članova rastavimo kao 1+4 ili 2+3).



Primjer 7: Napišimo u obliku umnoška primjenjujući navedene formule.

a) $64-c^2=(8-c)(8+c)$ („grana“ A)

b) $27b^3-64=(3b-4)(27b^2+12b+16)$ (B)

c) $54a^3-81ab^2=$ (C) $=27a(a^2-b^2)=$ (A) $=27a(a-b)(a+b)$

d) $25a^2-2ab+\frac{1}{25}b^2=\left(5a-\frac{1}{5}b\right)^2$ (D)

e) $16a^2-8ab-15b^2=16a^2-8ab+b^2-16b^2=$ (D) $=(4a-b)^2-(4b)^2=$ (A) $=$
$=(4a-b-4b)(4a-b+4b)=(4a-5b)(4a+3b)$ (E)

f) $63ab^2-84a^2b+28a^3=$ (E) $=7a(9b^2-12ab+4a^2)=$ (D) $=7a(3b-2a)^2$

g) $6a^2-5a-6=6a^2+4a-9a-6=2a(3a+2)-3(3a+2)=$ (F) $=$
$=(3a+2)(2a-3)$ (G)

h) $27a^3+9a^2b^2+ab^4+\frac{1}{27}b^6=\left(3a+\frac{1}{3}b^2\right)^3$ (H)

i) $4a^2-4a-9b^2+1=4a^2-4a+1-9b^2=$ (D) $=(2a-1)^2-(3b)^2=$ (A) $=$
$=(2a-1-3b)(2a-1+3b)$ (I)

j) $45a^2c-20b^2c+54a^2d-24b^2d=5c(9a^2-4b^2)+6d(9a^2-4b^2)=$
$=(9a^2-4b^2)(5c+6d)=$ (A) $=(3a-2b)(3a+2b)(5c+6d)$ (J)

k) $6a^2bc+9ab^2c^2+18ac^2+12bc=3c(2a^2b+3ab^2c+6ac+4b)$ (K)

Primjer 8: Napišimo u obliku umnoška $50c^4d-60c^3d^3+18c^2d^5$.

Rješenje: Izlučujemo $2c^2d$ iz svih članova.

$$50c^4d-60c^3d^3+18c^2d^5=$$
$$=2c^2d\left(25c^2-30cd^2+9d^4\right)=2c^2d\left(5c-3d^2\right)^2$$

Primjer 9: Napišimo u obliku umnoška $27a^4+54a^3-8a-16$.

Rješenje: $27a^4+54a^3-8a-16=27a^3(a+2)-8(a+2)=$
$=(a+2)(27a^3-8)=$
$=(a+2)(3a-2)(9a^2+6a+4)$

Primjer 10: Napišimo u obliku umnoška $36a^4-\left(9a^2+b^2\right)^2$.

Rješenje: $36a^4-\left(9a^2+b^2\right)^2=\left[6a^2-\left(9a^2+b^2\right)\right]\left[6a^2+\left(9a^2+b^2\right)\right]=$
$=\left(6a^2-9a^2-b^2\right)\left(6a^2+9a^2+b^2\right)=\left(-3a^2-b^2\right)\left(15a^2+b^2\right)$

Primjer 11: Napišimo u obliku umnoška $2x^4y-x^2y^2-x^6$.

Rješenje: Izlučujemo zajednički član i prepoznajemo kvadrat binoma.

$$2x^4y-x^2y^2-x^6=-x^2(y^2-2x^2y+x^4)=-x^2\left(y-x^2\right)^2$$

Primjer 12: Ako je $a + b = 5$, $ab = -3$, koliko je $a^2 + b^2$?

Rješenje: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \quad \Rightarrow \quad (a+b)^2 - 2ab = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad 5^2 - 2(-3) = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad a^2 + b^2 = 31$

Primjer 13: Ako je $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - 2x - 2y + 13 = 0$, izračunajmo x i y.

Rješenje: Prepoznajemo da se radi o kvadratima binoma.

$$\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{9}y^2 - 2x - 2y + 13 = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{4}x^2 - 2x + 4} + \underbrace{\frac{1}{9}y^2 - 2y + 9} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}x - 2\right)^2 + \left(\frac{1}{3}y - 3\right)^2 = 0$$

$$\frac{1}{2}x - 2 = 0 \qquad \frac{1}{3}y - 3 = 0$$

$$x = 4 \qquad y = 9$$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Izraz $(a+1)^{-1}(b+1)^{-1}$ za $a = \left(2-\sqrt{3}\right)^{-1}$, $b = \left(2+\sqrt{3}\right)^{-1}$ ima vrijednost:

a) 1 b) $\frac{1}{6}$ c) 0 d) 6.

2. Zaokružite točno rješenje: $\left(\frac{1}{4}a + 2b^3\right)^2 =$

a) $\frac{1}{16}a^2 + 4b^6$ b) $\frac{1}{16}a^2 - 4b^6$

c) $\frac{1}{16}a^2 + ab^3 + 4b^6$ d) $\frac{1}{16}a^2 - ab^3 + 4b^6$.

3. Koliko je $0.25 - b^2$?

a) $(0.05-b)(0.05+b)$ b) $(0.25-b)(0.25+b)$

c) $(0.5-b)^2$ d) $(0.5-b)(0.5+b)$

4. Koja je od sljedećih tvrdnji točna?

a) $25a^2 + 10ab - 4b^2 = (5a-2b)^2$ b) $49a^2 + 28ab + 16b^2 = (7a+4b)^2$

c) $9a^2 + 42ab + 49b^2 = (3a+7b)^2$ d) $(5a-2b)(5a-2b) = 25a^2 - 4b^2$

5. Zaokružite točno rješenje: $49-\frac{1}{25}a^6=$

a) $49+\frac{1}{25}a^6$ b) $\left(7-\frac{1}{5}a^3\right)^2$

c) $\left(7-\frac{1}{5}a^3\right)\left(7+\frac{1}{5}a^3\right)$ d) $\left(7+\frac{1}{5}a^3\right)^2$.

6. Rastavite na faktore $4x^2 + 6x + 9$.

a) $(2x + 3)^2$ b) $(2x + 3)(2x – 3)$

c) $(x – 1)^2$ d) Izraz se ne može rastaviti.

7. Izračunajte $(1 – a)(1 + a)(1 + a^2)(1 + a^4)(1 + a^8) – 1$.

a) $1 – a^{16}$ b) $1 + a^{16}$ c) $–a^{16}$ d) 1

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Izračunajte:

1. $\left(a^3+a^2b+ab^2+b^3\right)(a-b)=$

2. $\left(2a^3-\frac{1}{4}b\right)^2=$

3. $\left(3a^4b^2+4c^3\right)^3=$

4. $(a-2)\cdot(a+2)\cdot\left(a^2+4\right)\cdot\left(a^4+16\right)=$

5. $\left(1+(1+a)+(1+2a)\right)^3=$

6. $1+(x-3)^2-(x-4)(3+x)=$

7. $(3x-2)^2\left(x^2+3\right)=$

8. Nadopunite:

$$\left(\frac{2}{3}a^2b^2-\square\right)^3=\frac{8}{27}a^6\square-2\square b^4c^4+\frac{9}{2}a^2\square c^8-\frac{27}{8}c^{12}$$

Napišite u obliku umnoška.

9. $27x^6 - \frac{1}{8}y^3 =$

10. $\frac{1}{81}b^4 - 16a^2 =$

11. $\frac{9}{4}t^4 + 6t^2sz^3 + 4s^2z^6 =$

12. $125x^3 + \frac{1}{8}y^6 =$

13. $\frac{1}{4}m^2p^4 - 3mp^2t^3 + 9t^6 =$

14. $81a^3 + 81 =$

15. $18a^2 - 8a^2b^2 - 9b + 4b^3 =$

16. $\frac{8}{27}a^3 - a^2 + \frac{9}{8}a - \frac{27}{64} =$

17. $6a^3 + 8a^2b^2 - 3ab - 4b^3 =$

18. $8y^3 + 150x^2y - 125x^3 - 60xy^2 =$

19. $x^2(y-2x) + 2x(y-2x) + y - 2x =$

20. $64a^2 - (a+16)^2 =$

21. $8a^4 - 27a + 24a^3 - 81 =$

22. $m^2k^2 - 2m^4k + m^6 =$

23. Ako je $x^2 - xy + y^2 = 7$ i $x - y = 4$, koliko je $x^2 + y^2$?

24. Ako je $b + \frac{1}{b} = 5$, koliko je $b^2 + \frac{1}{b^2}$?

25. Ako je $9x^2 + y^2 + 6x - 2y + 2 = 0$, izračunajte x i y.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. c **2.** d **3.** $x^2 - x - 12$ **4.** $4x^2 - 4x + 1$ **5.** b
6. $(3 + 2x)^2 = 9 + 12x + 4x^2$ **7.** $4x^2 - 12x + 9$ **8.** a) 5 b) 11 **9.** c

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA:

1. b **2.** c **3.** d **4.** c **5.** c **6.** d **7.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA ZA VJEŽBU

1. $a^4 - b^4$

2. $4a^6 - a^3b + \frac{1}{16}b^2$

3. $27a^{12}b^6 + 108a^8b^4c^3 + 144a^4b^2c^6 + 64c^9$

4. $a^8 - 256$

5. $27 + 81a + 81a^2 + 27a^3$

6. $22 - 5x$

7. $9x^4 - 12x^3 + 31x^2 - 36x + 12$

8. $\left(\frac{2}{3}a^2b^2 - \frac{3}{2}c^4\right)^3 = \frac{8}{27}a^6b^6 - 2a^4b^4c^4 + \frac{9}{2}a^2b^2c^8 - \frac{27}{8}c^{12}$

9. $\left(3x^2 - \frac{1}{2}y\right)\left(9x^4 + \frac{3}{2}x^2y + \frac{1}{4}y^2\right)$

10. $\left(\frac{1}{9}b^2 - 4a\right)\left(\frac{1}{9}b^2 + 4a\right)$

11. $\left(\frac{3}{2}t^2 + 2sz^3\right)^2$

12. $\left(5x + \frac{1}{2}y^2\right)\left(25x^2 - \frac{5}{2}xy^2 + \frac{1}{4}y^4\right)$

13. $\left(\frac{1}{2}mp^2 - 3t^3\right)^2$

14. $81(a+1)(a^2 - a + 1)$

15. $(2a^2 - b)(3 - 2b)(3 + 2b)$

16. $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{4}\right)^3$

17. $(3a + 4b^2)(2a^2 - b)$

18. $(2y - 5x)^3$

19. $(y - 2x)(x + 1)^2$

20. $(7a - 16)(9a + 16)$

21. $(a + 3)(2a - 3)(4a^2 + 6a + 9)$

22. $m^2(k - m^2)$

23. -2

24. 23

25. $x = -\frac{1}{3},\ y = 1$

1.2.2. Algebarski razlomci

Algebarski razlomak je razlomak kojemu su u brojniku i nazivniku algebarski izrazi. Sva pravila koja vrijede u skupu realnih brojeva $\boldsymbol{R}$, vrijede i za algebarske razlomke. Kratiti algebarske razlomke možemo samo onda kad su i brojnik i nazivnik zapisani u obliku umnoška te imaju zajednički faktor.

$$\frac{2+4x}{2-4x}=\frac{1+1}{1-1}=?$$

$$\frac{2+4x}{2-4x}=\frac{2^{1}(1+2x)}{2_{1}(1-2x)}=\frac{1+2x}{1-2x}$$

Primjer 1: Skratimo razlomak $\dfrac{9-4a^2}{2a^2+3a}$.

Rješenje: $\dfrac{9-4a^2}{2a^2+3a}=\dfrac{(3-2a)(3+2a)}{a(2a+3)}=\dfrac{3-2a}{a}$

Primjer 2: Izračunajmo $\dfrac{(2x-y)^2-2x+y}{4x^2-y^2-2x-y}$.

Rješenje: $\dfrac{(2x-y)^2-2x+y}{4x^2-y^2-2x-y}=\dfrac{(2x-y)^2-(2x-y)}{(2x-y)(2x+y)-(2x+y)}=$

$$=\frac{(2x-y)\left[(2x-y)-1\right]}{(2x+y)\left[(2x-y)-1\right]}=\frac{2x-y}{2x+y}$$

Primjer 3: Izračunajmo $\dfrac{(3a-6)^2}{a^2-2a}$.

Rješenje: $\dfrac{(3a-6)^2}{a^2-2a}=\dfrac{\left[3(a-2)\right]^2}{a(a-2)}=\dfrac{3^2(a-2)^{\cancel{2}}}{a\cancel{(a-2)}}=\dfrac{9(a-2)}{a}$

Primjer 4: Izračunajmo $\dfrac{a^2-1}{1-4a^2}\cdot\left(\dfrac{3a}{a+1}-1\right)$.

Rješenje: $\dfrac{a^2-1}{1-4a^2}\cdot\left(\dfrac{3a}{a+1}-1\right)=\dfrac{(a-1)\cancel{(a+1)}}{(1-2a)(1+2a)}\cdot\dfrac{3a-a-1}{\cancel{a+1}}=$

$$=\frac{(a-1)}{\cancel{(1-2a)}(1+2a)}\cdot\cancel{(2a-1)}^{(-1)}=\frac{1-a}{1+2a}$$

Primjer 5: Izračunajmo: $\left(1-\frac{a-2}{2a+3}\right)\cdot\frac{9-4a^2}{a^2+5a}$.

Rješenje: $\left(1-\frac{a-2}{2a+3}\right)\cdot\frac{9-4a^2}{a^2+5a}=\left(\frac{2a+3-a+2}{\cancel{2a+3}}\right)\cdot\frac{(3-2a)\cancel{(3+2a)}}{a(a+5)}=$

$=\frac{\cancel{a+5}}{1}\cdot\frac{3-2a}{a\cancel{(a+5)}}=\frac{3-2a}{a}$

Primjer 6: Izračunajmo: $\dfrac{2a}{a+\dfrac{1}{a+\dfrac{1-a^2}{a}}}$.

Rješenje: $\dfrac{2a}{a+\dfrac{1}{a+\dfrac{1-a^2}{a}}}=\dfrac{2a}{a+\dfrac{1}{\dfrac{a^2+1-a^2}{a}}}=\dfrac{2a}{a+\dfrac{1}{\dfrac{1}{a}}}=\dfrac{2a}{a+a}=\dfrac{2a}{2a}=1$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Skraćivanjem izraza $\frac{9a^2-4}{6a+4}$ dobivamo:

a) $\frac{3a}{2}$ b) $\frac{3a+2}{2}$ c) $3a-1$ d) $\frac{3a-2}{2}$.

2. (IK 2006.) $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=$

a) $\frac{a-b}{ab}$ b) $\frac{b-a}{ab}$ c) $\frac{1}{a-b}$ d) $b-a$.

3. (IK 2006.) Skraćivanjem izraza $\frac{x-5}{x^2-25}$ dobivamo:

a) $\frac{1}{x-5}$ b) $\frac{1}{x+5}$ c) $x-5$ d) $x+5$.

4. (IK 2006.) Skraćivanjem izraza $\frac{x^2-10x+25}{x^2-25}$ dobivamo:

a) -1 b) $10x$ c) $\frac{x+5}{x-5}$ d) $\frac{x-5}{x+5}$.

5. (IK 2006.) Izračunajte: $\left(\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}\right):\frac{x}{x^2-4}$.

6. (NI 2007.) $\frac{1}{a-3}-\frac{6}{a^2-9}=$

a) $\frac{-5}{a^2+a-12}$ b) $\frac{a-9}{a^2-9}$ c) $\frac{1}{a^2-9}$ d) $\frac{1}{a+3}$.

7. (NI 2008.) $\frac{1}{ab}-\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}=$

a) $\frac{-a+b+c}{abc}$ b) $\frac{a-b+c}{abc}$ c) $\frac{a+b-c}{abc}$ d) $\frac{-a-b+c}{abc}$.

8. (NI 2008.) $\left(6-3a+\frac{18a^2}{6+3a}\right):\frac{9a^4-144}{6a^3+48}=$

a) $\frac{2\left(a^2-2a+4\right)}{a^2-4}$ b) $\frac{2\left(a^2+2a+4\right)}{a^2-4}$ c) $\frac{2(a-2)}{a+2}$ d) $\frac{2(a+2)}{a-2}$.

9. (IK 2008.) $\frac{a^{-3}+a^{-2}}{a^{-2}-1}:\frac{1}{a^2}=$

10. (NI 2009.) Koliki je rezultat oduzimanja $3-\frac{1+2a}{a}$?

a) $\frac{a-1}{a}$ b) $\frac{a+1}{a}$ c) $\frac{5a-1}{a}$ d) $\frac{5a+1}{a}$

11. (NI 2009.) Razlomak $\frac{1-x^{-3}y^{-3}}{x^{-2}y^{-2}+x^{-1}y^{-1}+1}$ jednak je:

a) –1 b) $\frac{1+xy}{xy}$ c) xy d) $\frac{xy-1}{xy}$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Izraz $\frac{1}{(a-b)(a-c)}+\frac{1}{(b-c)(b-a)}+\frac{1}{(c-a)(c-b)}$ ima vrijednost:

a) $a-b+c$ b) abc c) 0 d) $(a-b)c$.

2. Nakon sređivanja izraz $\frac{(xy+1)^2-(x+y)^2}{(x^2-1)(y^2-1)}$ iznosi:

a) –1 b) 1 c) $x-y$ d) $x+y$.

3. Izraz $\frac{-(-a)^5\cdot(-a^{-2})^2+1}{(-a^{-3})^{-1}\cdot(-(-a)^4)\cdot a^{-5}-1}$ iznosi:

a) $\frac{1}{a+1}$ b) $a+1$ c) $(a-1)^{-1}$ d) $a-1$.

4. Kolika je vrijednost izraza $\frac{x+1}{x^2+x+1} : \frac{1}{x^3-1}$ za $x=\sqrt{2}$?

a) 2 b) $\sqrt{2}+2$ c) $\sqrt{2}-1$ d) 1

5. Neka je $a=\sqrt{3}$, $b=\sqrt{6}$. Onda je izraz $\left[\left(\frac{8a^3-b^3}{4a^2+2ab+b^2}\right)^2-\frac{16a^4-b^4}{4a^2-b^2}\right]^2$ jednak:

a) 250 b) 264 c) 276 d) 288.

6. Izraz $\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)\cdot\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}$ jednak je:

a) $\frac{a}{b}$ b) $\frac{1}{ab}$ c) $-\frac{1}{ab}$ d) $-\frac{1}{b}$.

7. Izračunajte: $\frac{\left(ab^{-3}-a^{-3}b\right)^{-1}\cdot\left(a^{-2}+b^{-2}\right)}{\left(b^{-2}-a^{-2}\right)^{-1}}$.

a) a^2b b) $(ab)^{-1}$ c) a^3 d) $(ab)^3$

8. Redukcijom izraza $\frac{a^{-2}-a^{-1}b^{-1}+b^{-2}}{a^{-3}+b^{-3}} : \left(\frac{a+b}{ab}\right)^{-1}$ dobiva se:

a) 1 b) $\frac{a+b}{ab}$ c) $\frac{ab}{a+b}$ d) ab.

9. Nakon skraćivanja razlomka $\frac{2a^3-6a^2+5a-15}{9-a^2}$ dobiva se:

a) $-\frac{2a^2+5}{a+3}$ b) $\frac{2a^2+5}{a+3}$ c) $\frac{2a^2+5}{3-a}$ d) $\frac{2a^2+5}{a-3}$.

10. Ako je $\left(a+\frac{1}{a}\right)^2=3$, onda je $a^3+\frac{1}{a^3}$ jednako:

a) $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ b) $3\sqrt{3}$ c) 0 d) $7\sqrt{3}$.

11. Nakon sređivanja razlomak $\frac{a^4+1-2a^2}{1-a-a^2+a^3}$ poprima oblik:

a) $a-1$ b) $a+1$ c) $\frac{a+1}{a-1}$ d) $\frac{1}{a+1}$.

12. Izraz $\left(5^n-\frac{4\cdot35^n}{5^n+7^n}+7^n\right):\left(\frac{5^n}{5^n+7^n}-\frac{7^n}{7^n-5^n}-\frac{2\cdot35^n}{25^n-49^n}\right)$ jednak je:

a) 0 b) 5^n+7^n c) 5^n-7^n d) 35^n.

13. Nakon skraćivanja razlomka $\frac{4x-2}{2x^2+5x-3}$ dobiva se:

a) $\frac{2}{x+3}$ b) $\frac{2x}{x+3}$ c) $\frac{2}{x-3}$ d) $\frac{1}{x+3}$.

14. Nakon skraćivanja $\frac{x^2+7x}{4x^2-6x} : \frac{x^2+3x-28}{2x^2-32}$ jednako je:

a) $\frac{x-4}{2x-3}$ b) $\frac{x-4}{2x+3}$ c) $\frac{x+4}{2x+3}$ d) $\frac{x+4}{2x-3}$.

15. $\left[\left(\frac{a^2-16}{a^2+7a+12}\cdot\frac{a^2-4a-21}{a^2-4a}\right)\cdot\frac{1}{a-7}\right]^{-1}$ jednako je:

a) $-a$ b) a c) $-a+1$ d) $a+1$.

16. Kolika je vrijednost izraza $\left(\frac{x-y}{x^2+xy}-\frac{x}{xy+y^2}\right):\left(\frac{y^2}{x^3-xy^2}+\frac{1}{x+y}\right)$ za $x=3^{-1}$, $y=2^{-1}$?

a) 2 b) 3 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{3}$

17. Izračunajte vrijednost izraza (pojednostavnite) $\frac{4}{x+2}-\frac{3}{x-2}+\frac{12}{x^2-4}$.

a) $\frac{1}{x-2}$ b) $x-2$ c) $x+2$ d) $\frac{1}{x+2}$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Skratite razlomak.

1. $\frac{(1-3x)^2-2x+6x^2}{25x^3-x}$

2. $\frac{4x^2-20x+25}{4x-10}$

3. $\frac{9x^2-6x+1}{9x^2-1}$

4. $\frac{a^5-8a^3+16a}{2a^3-4a^2-8a+16}$

5. $\frac{(x-3)^2}{9-x^2}$

6. $\frac{a^3-a^2+2a-2}{a^3+3a^2+2a+6}$

Izračunajte.

7. $\left(4-\frac{4+b^2}{b}\right):\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{b}\right)$

8. $\left(2a-\frac{4a-1}{2a}\right)\cdot\frac{4a^2}{1-4a^2}:\left(\frac{1}{a}-\frac{4}{1+2a}\right)$

9. $\frac{2c}{c-\frac{1}{c-\frac{1+c^2}{c}}}$

10. $\left(d+\frac{9}{d-6}\right)\left(\frac{12}{d^2-3d}-\frac{d}{9-6d+d^2}\right)$

11. $\left(\frac{2}{x^2-4}+\frac{1}{2x-x^2}\right):\frac{1}{x^2+4x+4}$

12. $\left(\frac{a-3}{a^2+3a}+\frac{a}{9-a^2}\right)\cdot\frac{a^2-3a}{2a-3}-\frac{a}{a+3}$

13. $\frac{f^2}{f+5}+\frac{25f}{5-f}\cdot\left(\frac{f-15}{f^2-25}+\frac{5}{f^2-5f}\right)$

14. $\frac{2d}{d+s}+\frac{(d-s)^2}{s}\cdot\left(\frac{s}{(s-d)^2}+\frac{s}{s^2-d^2}\right)$

15. $\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{y}\right)\left(1-\frac{1}{y-1}\right)\left(1-\frac{1}{y+1}\right)$

16. $\frac{m^2+2mp+p^2}{m^2-p^2}:\frac{2m+2p}{m^2-mp}$

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. d **2.** b **3.** b **4.** d **5.** –8 **6.** d
7. b **8.** a **9.** a **10.** a **11.** d

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA:

1. c **2.** b **3.** c **4.** d **5.** d **6.** d **7.** b **8.** a **9.** a
10. c **11.** b **12.** c **13.** a **14.** d **15.** b **16.** d **17.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $\frac{3x-1}{x(5x+1)}$ **2.** $\frac{2x-5}{2}$ **3.** $\frac{3x-1}{3x+1}$ **4.** $\frac{a(a+2)}{2}$

5. $\frac{3-x}{3+x}$ **6.** $\frac{a-1}{a+3}$ **7.** $-2(b-2)$ **8.** $2a^2$

9. 1 **10.** $\frac{6-d}{d}$ **11.** $\frac{x+2}{x}$ **12.** –1

13. $f-5$ **14.** 2 **15.** $\frac{y-2}{y}$ **16.** $\frac{m}{2}$

1.2.3. Binomni poučak

Binomni koeficijent je prirodan broj koji računamo koristeći formulu

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{(n-k)!\,k!},\quad n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ k\le n.$$

Za $\binom{n}{0}$ uzimamo po definiciji jednako 1.

Za male brojeve možemo računati i bez formule, tako da u nazivniku napišemo umnožak svih brojeva od 1 do k, a u brojniku napišemo umnožak onoliko brojeva koliko ih je u nazivniku, počevši od n, u padajućem poretku.

$$\binom{8}{4}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=70$$

Svojstva binomnih koeficijenata

• svojstvo simetrije $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, npr. $\binom{17}{15}=\binom{17}{2}$

• svojstvo Pascalova trokuta $\binom{n}{k-1}+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k}$, npr. $\binom{7}{3}+\binom{7}{4}=\binom{8}{4}$.

Primjer 1: Riješimo jednadžbu $\binom{n}{6}=\binom{n}{5}$.

Rješenje: Iz svojstva simetrije vidimo da se radi o dvama jednakima binomnim koeficijentima, što znači da je $n = 6 + 5 = 11$.

Primjer 2: Riješimo jednadžbu $\binom{n}{4}+\binom{n}{5}=\binom{17}{5}$.

Rješenje: Iz svojstva Pascalova trokuta vidimo da se radi o dvama susjednima binomnim koeficijentima, što znači da je $n+1=17 \Rightarrow n=16$.

Primjer 3: Riješimo jednadžbu $\binom{n}{1}+\binom{n}{2}=5(n+1)$.

Rješenje:

$$\binom{n+1}{2}=5(n+1)$$

$$\frac{(n+1)n}{2}-5(n+1)=0$$

$$(n+1)\left(\frac{n}{2}-5\right)=0$$

$$n+1=0 \qquad \frac{n-10}{2}=0$$

$$n_1=-1 \qquad n_2=10$$

ili $n+\frac{n(n-1)}{2}=5n+5$

$2n + n^2 - n - 10n - 10 = 0$

$n^2 - 9n - 10 = 0$

$n_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{81+40}}{2}$

$n_1 = -1, \qquad n_2 = 10$

Rješenje jednadžbe je 10 jer je n prirodan broj.

Binomni poučak (teorem)

Za svaki $a, b \in \boldsymbol{C}, n \in \boldsymbol{N}$ vrijedi:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$$

Katkad se kaže da smo binom $(a + b)^n$ razvili po binomnoj formuli.
Znak sumacije $\sum$ skraćuje ovaj dugačak zapis, a koristi se tako da ispod znaka $\sum$ pišemo broj od kojeg započinje numeracija indeksa k, a iznad znaka pišemo broj kojime numeracija indeksa k završava. Svakom članu koji je zapisan desno od znaka sumacije mijenjamo redom vrijednost indeksa, a članove povezujemo znakom zbrajanja (+).

Svojstva binomne formule

- razvijeni binom ima $n + 1$ članova
- eksponenti s bazom a padaju od n prema 0, a eksponenti s bazom b rastu od 0 prema n, te je njihov zbroj u svakom članu jednak n
- ako istovremeno gledamo formulu slijeva i zdesna, vidimo da su binomni koeficijenti simetrični (vrijednost im je jednaka).

Opći član u razvoju binoma je $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ i to je $(k + 1)$. član razvijenog binoma, što označavamo sa $A_{k+1}=\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$.

Primjer 4: Koji član po redu u razvoju binoma $\left(x^2+y^3\right)^5$ sadrži x^6y^6?

Rješenje: Opći član razvoja je $A_{k+1}=\binom{5}{k}\left(x^2\right)^{5-k}\left(y^3\right)^k=\binom{5}{k}x^{10-2k}y^{3k}$.

Da bismo dobili k, izjednačujemo eksponente uz istoimene baze.

$10-2k=6\Rightarrow k=2$

$3k=6\Rightarrow k=2.$

To je treći član.

Primjer 5: Odredimo koeficijent u razvoju binoma $\left(3+4x\right)^6$ koji sadrži x^3.

Rješenje: Opći član razvoja je $A_{k+1}=\binom{6}{k}3^{6-k}\left(4x\right)^k=\binom{6}{k}3^{6-k}\cdot 4^k\cdot x^k$

.

Vidimo da je $k=3$.

$\binom{6}{3}3^3\cdot 4^3\cdot x^3=20\cdot 27\cdot 64x^3=34\,560x^3$

Koeficijent uz x^3 je $34\,560$.

Primjer 6: Ako je binomni koeficijent trećeg člana binoma $\left(9x-\frac{1}{\sqrt{3x}}\right)^n$ jednak 105, određujemo trinaesti član.

Rješenje: Iz činjenice da je treći član binoma jednak 105, saznajemo n.

$$\binom{n}{2}=105$$

$$\frac{n\left(n-1\right)}{2}=105$$

$$n^2-n-210=0$$

$$\Rightarrow n_1=15,\ \cancel{n_2=-14}$$

Trinaesti član razvoja računamo po formuli za opći član.

$$A_{13}=\binom{15}{12}\left(9x\right)^3\left[\left(3x\right)^{-\frac{1}{2}}\right]^{12}=$$

$$=455\cdot 3^6x^3\left(3x\right)^{-6}=$$

$$=455\cdot \cancel{3^6}\,x^3\cdot \cancel{3^{-6}}\,x^{-6}=455x^{-3}$$

Primjer 7: Nađimo onaj član razvoja binoma $\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ koji ne sadrži x ako je omjer koeficijenata trećeg i drugog člana jednak $7:2$.

Rješenje: Iz uvjeta zadatka riješimo jednadžbu kako bismo našli n.

$$\binom{n}{2}:\binom{n}{1}=7:2$$

$$\frac{n(n-1)}{2}:n=\frac{7}{2}$$

$$n-1=7 \Rightarrow n=8$$

Po formuli za opći član dobivamo:

$$A_{k+1}=\binom{8}{k}\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^{8-k}\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^{k}=\binom{8}{k}x^{4-\frac{k}{2}}x^{-\frac{k}{2}}=\binom{8}{k}x^{4-k}.$$

Na potenciju baze x može utjecati samo taj dio općeg člana, a onaj član koji ne sadrži x zapravo je potencija x^0.

$$x^{4-k}=x^0 \Rightarrow k=4$$

Peti član razvoja je $A_5=\binom{8}{4}=70.$

Primjer 8: U razvoju binoma $\left(x\cdot\sqrt[4]{x^3}+\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)^n$ jednaki su binomni koeficijenti petog i desetog člana. Odredimo onaj član razvoja koji sadrži x^2.

Rješenje: $\binom{n}{4}=\binom{n}{9} \Rightarrow n=4+9=13$

$$A_{k+1}=\binom{13}{k}\cdot\left(x^{\frac{7}{4}}\right)^{13-k}\left(x^{-\frac{3}{2}}\right)^{k}=\binom{13}{k}\cdot x^{\frac{91-7k}{4}-\frac{3}{2}k}=$$

$$=\binom{13}{k}\cdot x^{\frac{91-7k-6k}{4}}=\binom{13}{k}\cdot x^{\frac{91-13k}{4}}$$

$$\frac{91-13k}{4}=2$$

$$91-13k=8$$

$$13k=83$$

$$k=\frac{83}{13}\notin \boldsymbol{N}$$

Član koji sadrži x^2 ne postoji.

Primjer 9: Odredimo x u izrazu $\left(2\cdot\sqrt[x]{2^{-1}}+\frac{4}{\sqrt[4-x]{4}}\right)^6$ ako je treći član razvoja 240.

Rješenje: $A_3=240 \Rightarrow \binom{n}{2}\left(2^{1-\frac{1}{x}}\right)^{n-2}\left(4^{1-\frac{1}{4-x}}\right)^2=240 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \binom{6}{2}\left(2^{\frac{x-1}{x}}\right)^4\left(4^{\frac{4-x-1}{4-x}}\right)^2=240$$

$$\frac{6\cdot 5}{2}\cdot 4^{\frac{2x-2}{x}}\cdot 4^{\frac{6-2x}{4-x}}=240$$

$$4^{\frac{2x-2}{x}+\frac{6-2x}{4-x}}=4^2$$

Izjednačivanjem eksponenata dobivamo

$$\frac{2x-2}{x}+\frac{6-2x}{4-x}=2 \,/\, x(4-x)$$

$$-2x^2+10x-8+6x-2x^2=8x-2x^2$$

$$-2x^2+8x-8=0\,/\,(-2)$$

$$(x-2)^2=0 \Rightarrow x=2$$

Primjer 10: Izračunajmo pomoću binomne formule 0.95^5 na 4 decimale.

Rješenje: $0.95^5=(1-0.05)^5=$

$$=1-5\cdot 0.05+10\cdot 0.05^2-10\cdot 0.05^3+5\cdot 0.05^4-0.05^5$$

Posljednji član ne utječe na četvrtu decimalu, pa je

$$0.95^5\approx 1-0.25+0.025-0.00125+0.00003125+\ldots=0.7738$$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. U razvoju binomnog izraza $\left(2^m+2^n\right)^5$ treći je član nakon sređivanja jednak 20 480, a četvrti član 5 120. Odredite $m-n$.

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

2. U razvoju binomnog izraza $\left(\sqrt{2}a-\sqrt{3}b\right)^{10}$ koeficijent uz peti član je:

a) 6 720 b) 10 080 c) 15 120 d) 18 144.

3. Odredite peti član u razvoju binomnog izraza $\left(\sqrt[3]{2}+\sqrt[4]{2}\right)^7$.

a) 100 b) 120 c) 140 d) 160

4. U razvoju binomnog izraza $(x+y)^n, n\in N_0$, koeficijent uz četvrti član je 15 puta veći od koeficijenta uz drugi član. Odredite n.

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

5. Broj $\binom{n}{k}$ je iz skupa:

a) $\boldsymbol{C}$ b) $\boldsymbol{R}$ c) $\boldsymbol{N}$ d) $\boldsymbol{Z}$.

6. Odredite sedmi član u razvoju binoma $\left(\sqrt[3]{a^2}-\frac{1}{a}\right)^{15}$.

a) $-\frac{6\,435}{a\sqrt[3]{a^2}}$ b) 5 005 c) –5 005 d) $6\,435a^{-\frac{5}{3}}$

7. Izračunajte $\binom{5}{0}-\binom{5}{1}+\binom{5}{2}-\binom{5}{3}+\binom{5}{4}-\binom{5}{5}$.

a) –1 b) 0 c) 1 d) 5

8. Odredite vrijednost izraza.

$$2^{10}+10\cdot 2^9+\binom{10}{2}\cdot 2^8+\binom{10}{3}\cdot 2^7+\binom{10}{4}\cdot 2^6+\binom{10}{5}\cdot 2^5+\binom{10}{6}\cdot 2^4+\binom{10}{7}\cdot 2^3+\binom{10}{8}\cdot 2^2+\binom{10}{9}\cdot 2^1+\binom{10}{10}$$

a) $\binom{10}{10}$ b) $\binom{10}{3}$ c) 10^3 d) 3^{10}

9. Rješenje jednadžbe $\binom{2n}{5}=\binom{2n}{7}$ je:

a) 12 b) 5 c) 7 d) 6.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite deseti član binoma $\left(x^2+y\right)^{13}$ u razvijenom obliku.

2. Odredite treći član binoma $\left(\sqrt{5}-2\sqrt{3}\right)^{11}$ u razvijenom obliku.

3. U binomu $\left(3x-\frac{1}{9x^2}\right)^8$ odredite x tako da četvrti član ima vrijednost -1.

4. Koji član binoma $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{a^2}+\frac{2}{3}\sqrt{a}\right)^{12}$ u razvijenom obliku sadrži a^7 ?

5. Ako je drugi član binoma $(x+y)^n$ jednak 240, treći 720, a četvrti 1 080, odredite vrijednosti x, y, n?

6. Riješite jednadžbu za $n\in N$, $\binom{n}{4}=2\binom{n-1}{4}$.

7. U razvoju binoma $\left(\frac{a\cdot\sqrt[6]{a}}{b}-\frac{\sqrt[8]{b}}{\sqrt[12]{a^7}}\right)^n$ odredite onaj član koji ne sadrži a, ako je suma binomnih koeficijenata triju prvih članova 79.

8. U razvoju $\left(t\sqrt[4]{t^3}+\frac{\sqrt{t}}{t^2}\right)^n$ binomni su koeficijenti petog i desetog člana jednaki. Odredite onaj član razvoja koji ne sadrži t.

9. Odredite u razvoju binoma $\left(x^2-\frac{1}{x}\right)^{20}$ član uz x^9.

10. Odredite u razvoju binoma $\left(\sqrt[4]{a^3}+\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}}\right)^{17}$ član uz a^0.

11. Izračunajte pomoću binomne formule 0.99^6 na 5 decimala.

RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** c **3.** c **4.** d **5.** c **6.** b **7.** b **8.** d **9.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $A_{10}=715x^8y^9$

2. $412\,500\sqrt{5}$

3. $x=\frac{56}{3}$

4. Šesti član.

5. $n=5, x=2, y=3$

6. $n=8$

7. $495\,b^{-3}$

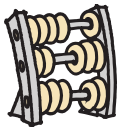
8. $\binom{13}{7}=1\,716$

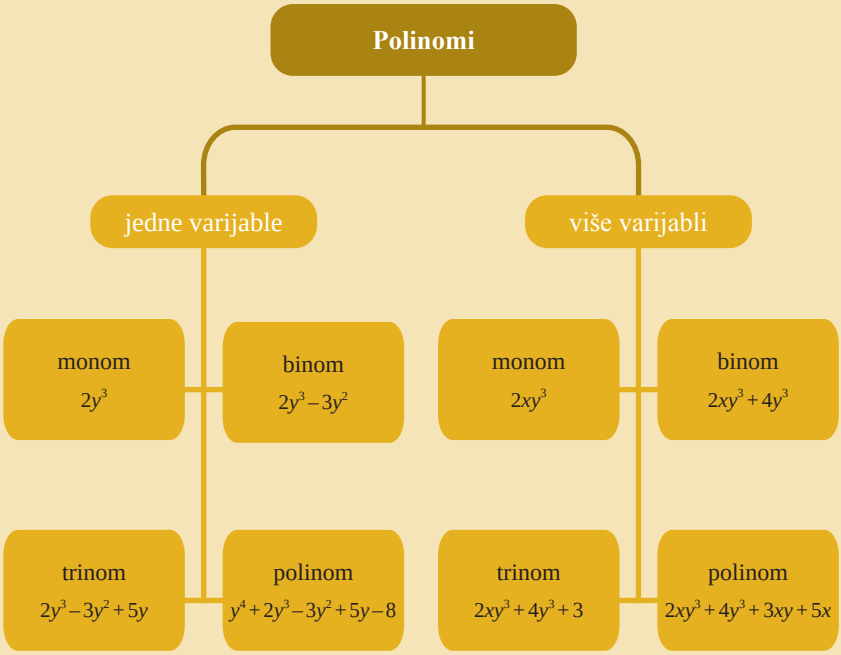
9. Takav član ne postoji.

10. 24 310

11. 0.94148

1.2.4. Polinomi





Opći (kanonski) oblik polinoma jedne varijable je

$$P(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\ldots+a_1 x+a_0.$$

Stupanj polinoma je eksponent n, koeficijenti polinoma su realni brojevi $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$. Koeficijent $a_n \neq 0$ nazivamo vodeći koeficijent.

Polinome jedne varijable zbrajamo (oduzimamo) tako da zbrojimo (oduzmemo) koeficijente uz monome istog stupnja. Množimo ih tako da množimo svaki monom jednog polinoma svakim monomom drugog polinoma.

Dijeljenje polinoma $f(x)$ polinomom $g(x)$ zapisujemo

$$\frac{f(x)}{g(x)}=q(x)+\frac{r(x)}{g(x)},$$

gdje je $q(x)$ količnik (kvocijent), a $r(x)$ ostatak (ako postoji).

Ovu jednakost također možemo zapisati:

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x).$$

Polinome dijelimo kao što dijelimo višeznamenkaste brojeve višeznamenkastim brojevima.

Na primjer: $2370:24=98$

$$\begin{array}{r} -216\downarrow \\ 210 \\ -192 \\ 18 \end{array}$$

ostatak

Možemo pisati $2370=24\cdot 98+18$.

Primjer 1: Neka su polinomi $P(x)=2x^3-2x^2+3x-1$ i $Q(x)=x^2+3x-1$.

Odredimo: a) $P(x)+Q(x)$ b) $P(x)-Q(x)$
c) $P(x)\cdot Q(x)$ d) $P(x):Q(x)$.

Rješenje:

a) $P(x)+Q(x)=2x^3-2x^2+3x-1+x^2+3x-1=2x^3-x^2+6x-2$

b) $P(x)-Q(x)=2x^3-2x^2+3x-1-\left(x^2+3x-1\right)=2x^3-3x^2$

c) $P(x)\cdot Q(x)=\left(2x^3-2x^2+3x-1\right)\left(x^2+3x-1\right)=$

$=2x^5+6x^4-2x^3-2x^4-6x^3+2x^2+3x^3+9x^2-3x-x^2-3x+1=$

$=2x^5+4x^4-5x^3+10x^2-6x+1$

d) $P(x):Q(x)=\left(2x^3-2x^2+3x-1\right):\left(x^2+3x-1\right)=2x-8$

$$\begin{array}{l} \cancel{2x^3}+6x^2-2x \\ \hline \cancel{-8x^2}+5x-1 \\ \cancel{-8x^2}-24x+8 \\ \hline 29x-9 \quad \textit{ostatak} \end{array}$$

Primjer 2: Odredimo realni broj a tako da polinom $P(x)=2x^3-3x^2+7x+a$ bude djeljiv polinomom $Q(x)=2x-1$.

Rješenje: I. Da bi dva polinoma bila djeljiva, ostatak pri dijeljenju mora biti 0.

$\left(\cancel{2x^3}-3x^2+7x+a\right):(2x-1)=x^2-x+3$

$$\begin{array}{l} \cancel{2x^3}-x^2 \\ \hline \cancel{-2x^2}+7x \\ \cancel{-2x^2}+x \\ \hline \cancel{6x}+a \\ \cancel{6x}-3 \\ \hline a+3=0 \quad \Rightarrow \quad a=-3 \end{array}$$

II. Pri dijeljenju polinoma $f(x)$ polinomom $g(x)$, dobivamo količnik $q(x)$ i ostatak $r(x)$. To možemo zapisati ovako:

$$f(x)=g(x)\cdot q(x)+r(x).$$

Ako su polinomi djeljivi, onda je ostatak $r(x)$ jednak nuli.

Ako polinom $g(x)$ ima vrijednost nula za neki x_0, za isti x_0 će polinom $f(x)$ imati vrijednost $r(x)$, tj. $f(x_0)=0\cdot q(x_0)+r(x_0)\Rightarrow f(x_0)=$ ostatak pri dijeljenju.

U našem zadatku vrijednost polinoma $Q(x) = 2x - 1$ je nula za $x_0 = \frac{1}{2}$.

Vrijednost polinoma $P(x)$ u $x_0 = \frac{1}{2}$ je ostatak pri dijeljenju

$$r = P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 7 \cdot \frac{1}{2} + a = 3 + a.$$

Polinomi su djeljivi ako je ostatak jednak nuli

$3 + a = 0 \quad \Rightarrow \quad a = -3.$

Primjer 3: Za koji $a \in \boldsymbol{R}$ je polinom $f(x) = x^3 + ax + 1$ djeljiv polinomom $g(x) = x - 2$?

Rješenje: Ako je polinom $f(x)$ djeljiv polinomom $g(x)$, znači da to možemo ovako zapisati $f(x) = g(x) \cdot q(x)$, gdje je $q(x)$ količnik pri dijeljenju ovih dvaju polinoma.

Ako polinom $g(x)$ ima vrijednost nula za neki x_0, za isti x_0 će i polinom $f(x)$ imati vrijednost nula. Polinom $g(x)$ ima vrijednost nula za $x_0 = 2$, ($g(2) = 2 - 2 = 0$).

$f(2) = 0$

$2^3 + 2a + 1 = 0$

$2a = -9 \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{9}{2}$

Primjer 4: Odredimo $b \in \boldsymbol{R}$ tako da se prilikom dijeljenja $(bx^3 - 3x^2 + 4x + 1)$ sa $(x + 2)$ dobiva ostatak -11.

Rješenje: Ovu situaciju možemo zapisati ovako

$$(bx^3 - 3x^2 + 4x + 1) = (x + 2) \cdot q(x) - 11,$$

gdje je $q(x)$ količnik pri dijeljenju ovih dvaju polinoma.

Ako umjesto x uvrstimo -2 (djelitelj $x + 2$ izjednačimo s nulom), tada će vrijednost polinoma kojeg dijelimo za $x = -2$ biti upravo -11.

$$\left(b(-2)^3 - 3(-2)^2 + 4(-2) + 1\right) = \left((-2) + 2\right) \cdot q(x) - 11$$

$$(-8b - 12 - 8 + 1) = -11$$

$$-8b = 8 \quad \Rightarrow \quad b = -1$$

Primjer 5: Odredimo zbroj koeficijenata u polinoma $f(x) = (x^2 - x + 1)^{2009} \cdot (x^2 - x + 2)^{100}$.

Rješenje: Računajući vrijednost polinoma za $x = 1$ dobivamo zbroj svih koeficijenata polinoma (na primjer, za polinom $f(x) = 2x^2 - 5x + 7$ zbroj koeficijenata je $f(1) = 2 - 5 + 7 = 4$).

Slijedi:

$f(1) = 1 \cdot 2^{100} = 2^{100}.$

Primjer 6: Polinom $f(x) = x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1$ je kvadrat nekog polinoma. Kojeg?

Rješenje: Polinom $f(x)$ možemo zapisati kao kvadrat trinoma:

$$x^4 - 6x^3 + 7x^2 + 6x + 1 = (x^2 + ax + b)^2$$
$$= x^4 + 2ax^3 + a^2x^2 + 2bx^2 + 2abx + b^2.$$

Dva su polinoma jednaka ako su im koeficijenti uz istoimene potencije jednaki.

$-6 = 2a \quad \Rightarrow \quad \underline{a = -3}$

$7 = a^2 + 2b \quad \Rightarrow \quad 7 = 9 + 2b \quad \Rightarrow \quad 2b = -2 \quad \Rightarrow \quad b = -1$

$6 = 2ab \quad \Rightarrow \quad 6 = 2(-3)(-1)$

$b^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b = \pm 1, \quad$ zbog $\quad 6 = 2ab \quad \Rightarrow \quad \underline{b = -1}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Ostatak dijeljenja polinoma $P(x) = x^4 - 2x^3 + 5x^2 - x + 1$ polinomom $Q(x) = x - 2$ iznosi:

a) -3 b) 11 c) 2 d) 19.

2. Polinom $P(x) = x^2 + bx + 5$ pri dijeljenju s $x + 2$ daje ostatak 3. Koeficijent b iznosi:

a) -3 b) 1 c) 3 d) 2.

3. Polinom $P(x) = x^4 + x^3 - 7x^2 + ax - 2$ djeljiv je polinomom $x^2 - 2x + 1$ ako je a jednako:

a) 3 b) 2 c) 7 d) 0.

4. Ako je polinom $x^3 + 3x^2 - A$ djeljiv polinomom $x + 1$, onda A iznosi:

a) -2 b) -1 c) 3 d) 2.

5. Vrijednost parametra a za koju je polinom $P(x) = x^3 - 2x^2 + x - a$ djeljiv s polinomom $Q(x) = x - 3$ bez ostatka jest:

a) 12 b) 0 c) 2 d) 6.

6. Dijeljenjem polinoma $P(x) = x^2 + 2x + 10$ polinomom $Q(x)$ dobivamo kvocijent $x + 3$ i ostatak 13. Polinom $Q(x)$ je:

a) $x - 13$ b) $x - 2$ c) $x + 3$ d) $x - 1$.

7. Polinom $P(x) = x^2 + bx + 5$ pri dijeljenju sa $x + 2$ daje ostatak 3. Koeficijent b iznosi:

a) -3 b) 1 c) 3 d) 2.

8. Ako je $f(x)=(3x^3-7x^2+3x-2):(3x^2-x+1)$, tada je $f(x+2):f(-x+2)$ jednako:
a) $x-1$ b) 2 c) 1 d) -1.

9. Ako $f(x)=x^2+ax+2$ daje pri dijeljenju s polinomima $g(x)=x-1$ i $h(x)=x+1$ iste ostatke, onda je a:
a) 1 b) 2 c) 0 d) -1.

10. Ako je polinom $P(x)=x^4+ax^2+bx+c$ djeljiv polinomom $Q(x)=(x-1)^3$, tada $a + b + c$ iznosi:
a) 2 b) 1 c) 0 d) -1.

11. Polinom $f(x)=3x^4+x^3-ax+6$ je djeljiv polinomom $g(x)=x-2$, ako je a jednako:
a) 25 b) 18 c) 31 d) 40.

12. Odredite realan broj a tako da u umnošku $(2x^5+ax^3-4x+a)(7x^3+5x^2-ax+6)$ koeficijent uz x^3 bude -7.
a) -2 b) -1 c) 2 d) 1

13. Za koji $a\in R$ je ostatak $R(x)$ pri dijeljenju polinoma $f(x)=x^5+x^2+ax+5$ polinomom $g(x)=x-1$ jednak 3?
a) 3 b) 2 c) -4 d) -1

14. Polinom $P(x)=x^2+bx+5$ pri dijeljenju sa $x + 2$ daje ostatak 3. Koeficijent b iznosi:
a) -3 b) 1 c) 3 d) 2.

15. Ako je polinom $P(x)=2x^3+x^2+ax-1$ djeljiv polinomom $Q(x)=x^2-1$, tada a pripada skupu:
a) $[-2,-1]$ b) $\left[-\frac{1}{2},0\right]$ c) $\left[0,\frac{1}{2}\right]$ d) $[1,2]$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite zbroj koeficijenata u kanonskom zapisu polinoma $f(x)=(2x^2-5x+2)^{450}\cdot(2x^2-5x+4)^{540}$.

2. Odredite produkt polinoma $f(x)=x^3+2x^2+2x+1$ i $g(x)=x^3-2x^2+2x-1$.

3. Podijelite polinome $f(x)=6x^4-2x^3-11x^2+1$ i $g(x)=2x^2-3$.

4. Za koje je prirodne brojeve m polinom $f(x)=x^3+mx-3$ djeljiv sa $g(x)=x+1$?

RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA:

1. d	**2.** c	**3.** c	**4.** d	**5.** a
6. d	**7.** c	**8.** d	**9.** c	**10.** d
11. c	**12.** d	**13.** c	**14.** c	**15.** a

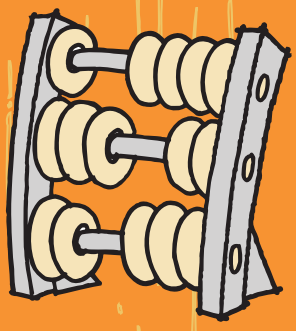
ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. 1

2. $x^6 - 1$

3. $\left(6x^4 - 2x^3 - 11x^2 + 1\right) = \left(2x^2 - 3\right)\left(3x^2 - x - 1\right) + \left(-3x - 2\right)$

4. $m = -4$



2. FUNKCIJE, JEDNADŽBE I NEJEDNADŽBE

2.1. Pojam funkcije

Neka su zadana dva neprazna skupa A i B. Ako je svakom elementu skupa A pridružen točno jedan element skupa B, onda kažemo da je zadana **funkcija iz skupa A u skup B**. Funkciju iz A u B označavamo slovima f, g, h, ... Funkciju f (pravilo, postupak, zakon pridruživanja) iz A u B označavamo:

$f: A \to B,\ f(a) = b,\ a \in A,\ b \in B.$

Skup A nazivamo **domena** (područje definicije, $\mathcal{D}$), a skup B **kodomena** (područje vrijednosti, $\mathcal{R}$) funkcije f.

Ako su $A \subseteq \boldsymbol{R}$ i $B \subseteq \boldsymbol{R}$, tada funkciju $f: A \to B$ nazivamo realna funkcija realne varijable.

Graf funkcije f je skup točaka $\big(a, f(a)\big)$ u koordinatnom sustavu, gdje je a element domene funkcije f. Graf funkcije označavamo sa
$\Gamma_f = \big\{(a,b) : b = f(a),\ a \in \mathcal{D}\big\}$.

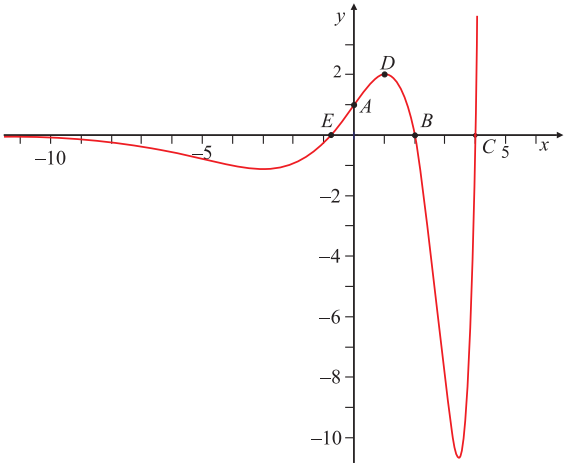
Pravilo (zakon pridruživanja) kojim je funkcija zadana može biti definirano na različite načine. Funkcija može biti zadana analitički, implicitno, grafički, tablično itd.

Primjer 1: Funkcija $f(x) = \dfrac{x+1}{x-1}$ je funkcija zadana analitički ili „formulom". Formulama opisujemo postupak pomoću kojeg se dolazi do vrijednosti funkcije za zadani x. Vrijednost naše funkcije za $x = -1$ bit će $f(-1) = \dfrac{-1+1}{-1-1} \Rightarrow f(-1) = 0$, a za $x = 1$ zadana funkcija $f(1) = \dfrac{1+1}{1-1} \Rightarrow f(1) = \dfrac{2}{0}$ ne postoji.

Funkcije $f(x) = 4x^3 - 2x$, $g(x) = 2\sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$,
$h(x) = \sqrt{\log_3\left(x^2 - 4\right)}$ također su analitički zadane funkcije.

Primjer 2: Skup svih točaka (x, y) u ravnini koje zadovoljavaju jednadžbu $x^2 + y^2 = 4$ predstavljaju kružnicu sa središtem u ishodištu polumjera 2. Ovom formulom dana je veza između varijabli x i y, no ona nije jedinstvena. Uzmimo $x = 1$, tada iz jednadžbe dobivamo $1^2 + y^2 = 4 \Rightarrow y^2 = 3$, a znamo da može biti $\sqrt{3}^2 = 3 \Rightarrow y = \sqrt{3}$ i $\sqrt{(-3)}^2 = 3 \Rightarrow y = -\sqrt{3}$ što je u suprotnosti s osnovnim zahtjevom jedinstvenosti da preslikavanje bude funkcija (jedan element domene dobiva dvije različite vrijednosti kodomene). Kažemo da je formulom $x^2 + y^2 = 4$ zadana implicitna veza varijabli x i y.

Primjer 3: U ovom primjeru funkcija je zadana grafički.

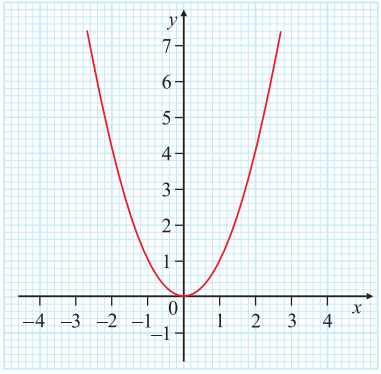


Na grafu je prikazana ovisnost veličine y o veličini x. Iz grafičkog prikaza funkcije možemo očitati koordinate nekih karakterističnih točaka ili, ako to nije moguće, odrediti njihovu približnu vrijednost. Vidimo da su koordinate točaka $A(0, 1)$, $B(2, 0)$, $C(4, 0)$, a za D bismo mogli reći da je vjerojatno $D(1, 2)$. Možemo odrediti ponašanje funkcije u određenim intervalima, njenu najveću ili najmanju vrijednost, u kojim točkama presijeca koordinatne osi, kojoj vrijednosti se približava i na kojim je intervalima pozitivna ili negativna. Vidimo da funkcija ima negativnu vrijednost na intervalu od $-\infty$ do točke E i od točke B do točke C, a na preostalom dijelu ima pozitivnu vrijednost. Naša funkcija siječe os x u točkama E, B i C , a os y u točki A. Možemo uspoređivati određene funkcijske vrijednosti, $f(-1) < f(1)$, $f(-3) > f(3)$.

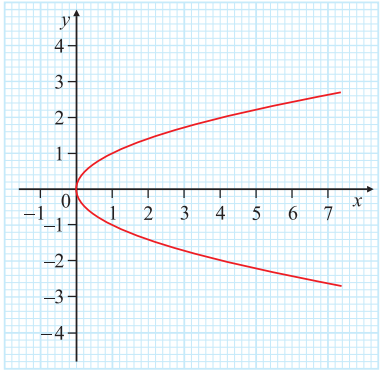
Kada je funkcija zadana grafički, jednostavno je odrediti radi li se o funkciji ili ne. Pravac okomit na x-os smije sjeći krivulju najviše u jednoj točki (vertikalni test).

Primjer 4: Dva skupa točaka prikazana su u koordinatnom sustavu. Jesu li to grafovi funkcija?

a)



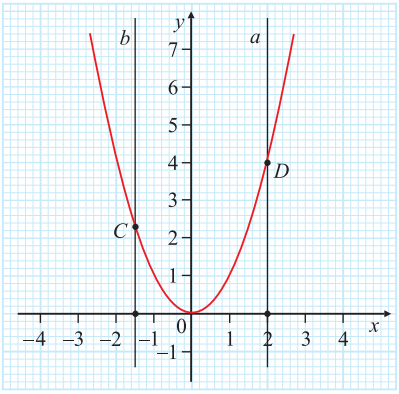
b)



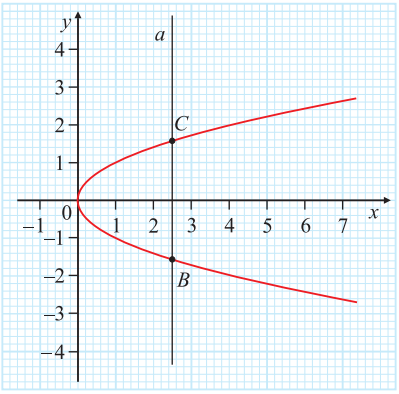
Rješenje: a) Vidimo da možemo bilo gdje na području gdje funkcija postoji, povući pravac okomito na x-os i taj pravac će krivulju sjeći samo u jednoj točki. U ovom slučaju ovo je graf funkcije.

b) Kod ovog skupa točaka pri crtanju okomice zapažamo da siječe krivulju u dvije točke. Ovaj skup točaka nije graf funkcije.

a)



b)



Primjer 5: Sljedeće funkcije zadane su tablicom.

i	$t(i)$	$v(i)$	$y(i)$
0	0	1	1
1	0.01	0.992	1.01
2	0.02	0.98392	1.01992
3	0.03	0.975761	1.029759
4	0.04	0.967523	1.039571
5	0.05	0.959206	1.049192
6	0.06	0.950813	1.058784
7	0.07	0.942343	1.068292
8	0.08	0.933796	1.077716
9	0.09	0.925175	1.087054
10	0.1	0.916478	1.096305
11	0.11	0.907708	1.10547
12	0.12	0.898864	1.114547
13	0.13	0.889948	1.123536
14	0.14	0.880959	1.132435
15	0.15	0.8719	1.141245

U tablici možemo pročitati vrijednosti funkcija t, v i y, u ovisnosti o varijabli i. Vidimo da je $t(7) = 0.07$, $v(7) = 0.942343$, $y(7) = 1.068292$ ili da je funkcija $y = 1.32435$ za $i = 14$. Iz ovih

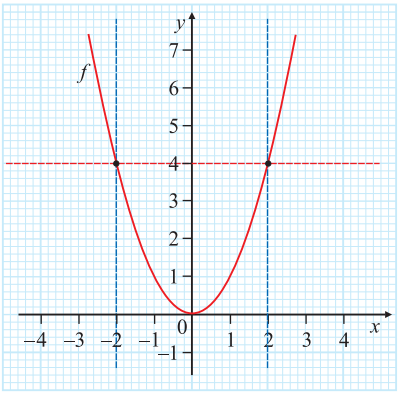
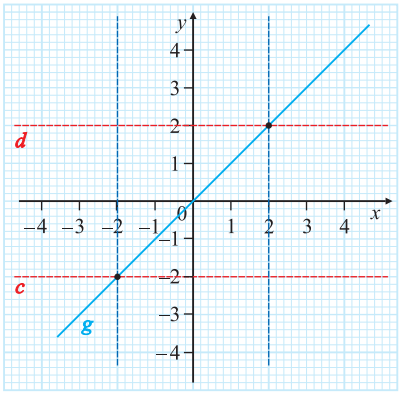
podataka možemo nacrtati grafove tih triju funkcija. Odrediti formule ovako zadanih funkcija nije svaki put jednostavno. Za funkciju $t(i)$ u ovom primjeru to nije problem jer lako uočavamo da je t sto puta manji od i, $t(i)=\frac{i}{100}$ i tu funkciju zovemo funkcija postotka.

Funkcija f je parna ako je $f(-x) = f(x)$ za svaki x iz domene. Graf parne funkcije simetričan je s obzirom na y-os. **Funkcija f je neparna** ako je $f(-x) = -f(x)$ za svaki x iz domene. Graf neparne funkcije simetričan je s obzirom na ishodište.

Većina funkcija nije ni parna ni neparna.

Primjer 6: Koja je od funkcija parna, a koja neparna: $f(x) = x^2$ i $g(x) = x$?

Rješenje: Promotrimo grafove funkcija.

$f(x)=x^2$	$g(x)=x$
	
$f(-2)=4, f(2)=4 \Rightarrow f(-2)=f(2)$	$g(-2)=-2, g(2)=2 \Rightarrow g(-2)=-g(2)$
parna funkcija	neparna funkcija
točka (–2, 2) simetrična je točki (2, 2) s obzirom na y-os	točka (–2, –2) simetrična je točki (2, 2) s obzirom na ishodište

Primjer 7: Odredimo jesu li sljedeće funkcije parne ili neparne.

a) $f(x)=x^2-1$ b) $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$ c) $f(x)=x^3-x$

Rješenje: a) Provjerimo svojstvo parnosti (neparnosti) funkcije $f(x)=x^2-1$ računajući vrijednost funkcije za $-x$.

$f(-x)=(-x)^2-1=x^2-1=f(x)$ Funkcija je parna.

b) $f(-x)=\frac{-x-1}{-x+1}=\frac{-(x+1)}{-(x-1)}=\frac{x+1}{x-1} \quad \Rightarrow \quad f(-x)\neq f(x)$

Funkcija nije ni parna ni neparna.

c) $f(-x)=(-x)^3-(-x)=-x^3+x=-(x^3-x)=-f(x)$

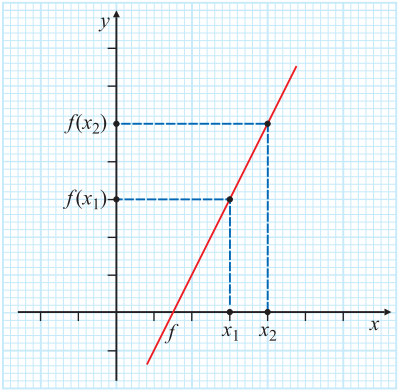
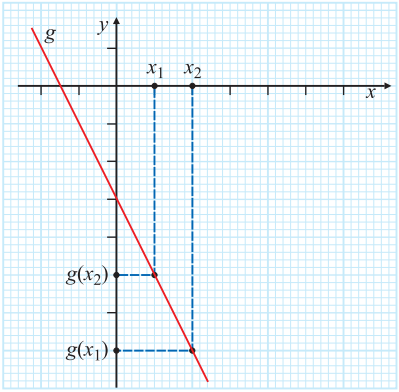
Funkcija je neparna.

Funkcija f raste na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ ako za svaka dva elementa x_1, x_2 iz domene funkcije f, za koje je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \leq f(x_2)$, a strogo raste ako vrijedi $f(x_1) < f(x_2)$. Funkcija f pada na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ ako za svaka dva elementa x_1, x_2 iz domene funkcije f, za koje je $x_1 < x_2$ vrijedi $f(x_1) \geq f(x_2)$, a strogo pada ako vrijedi $f(x_1) > f(x_2)$. Padajuće i rastuće funkcije zovemo jednim imenom **monotone funkcije**.

Funkcija je konstantna na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ ako za svaka dva elementa x_1, x_2 iz domene funkcije f vrijedi $f(x_1) = f(x_2)$.

Primjer 8: Koja je od funkcija rastuća, a koja padajuća: $f(x) = 2x - 3$ i $g(x) = -2x - 3$?

Rješenje: Promotrimo grafove funkcija.

$f(x) = 2x - 3$	$g(x) = -2x - 3$
	
$3 < 4 \Rightarrow f(3) = 3,\ f(4) = 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow f(3) < f(4)$	$1 < 2 \Rightarrow g(1) = -5,\ g(2) = -7 \Rightarrow$ $\Rightarrow g(1) > g(2)$
rastuća funkcija	padajuća funkcija
promatrajući graf vidimo da se vrijednosti funkcije, gledajući slijeva nadesno, povećavaju	promatrajući graf vidimo da se vrijednosti funkcije, gledajući slijeva nadesno, smanjuju

Primjer 9: Odredimo sve x za koje je $f(x+1) > 1$, ako je $f\left(\frac{x+1}{x-1}\right) = \frac{2}{x+1}$.

Rješenje: Prvo ćemo odrediti $f(x)$ i to tako da zamijenimo izraz $t = \frac{x+1}{x-1}$ i izrazimo x pomoću t, $x = \frac{t+1}{t-1}$. Sada to uvrštavamo u zadanu funkciju $f(t) = \frac{2}{\frac{t+1}{t-1}+1} = \frac{2}{\frac{t+1+t-1}{t-1}} = \frac{2(t-1)}{2t} = \frac{t-1}{t}$.

Bez gubljenja općenitosti možemo umjesto t uvrstiti x

$\Rightarrow \quad f(x) = \frac{x-1}{x}$.

Nakon izračunavanja $f(x+1)$ možemo riješiti i zadanu nejednadžbu.

$$f(x+1)=\frac{x+1-1}{x+1}=\frac{x}{x+1}$$

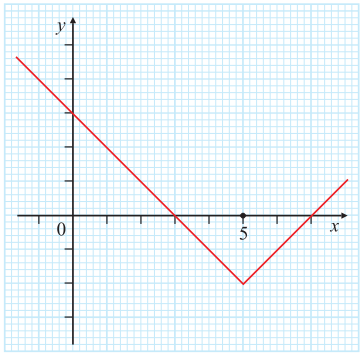
$$\frac{x}{x+1}>1 \Rightarrow \frac{x-x-1}{x+1}>0 \Rightarrow \frac{-1}{x+1}>0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -1<0 \Rightarrow x+1<0 \Rightarrow x<-1$$

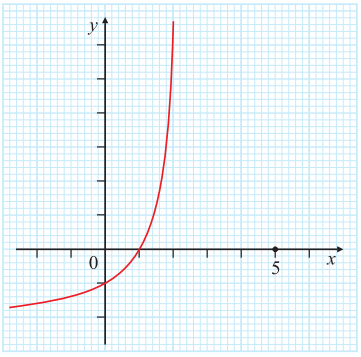
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2009.) Koji od navedenih grafova prikazuje funkciju koja raste **samo** na intervalu [0, 5]?

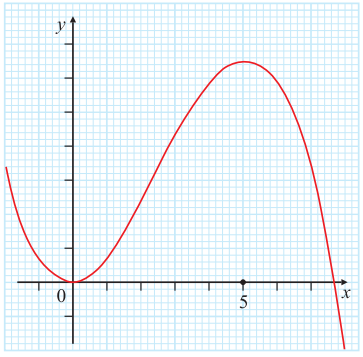
a)



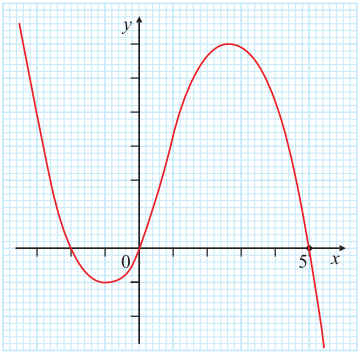
b)



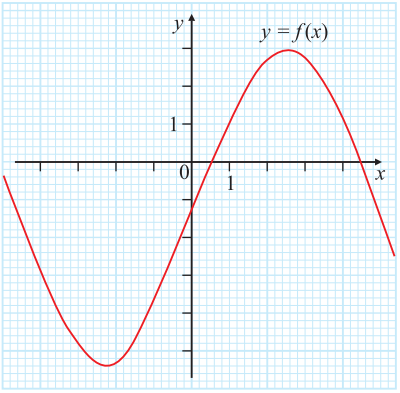
c)



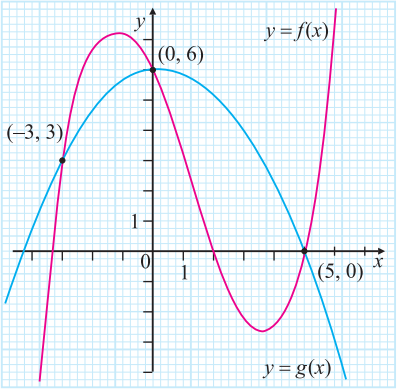
d)



2. (IK 2009.) Na slici je prikazan graf funkcije $f(x)$. Na istoj slici nacrtajte graf funkcije $\left|f\left(x\right)\right|$.

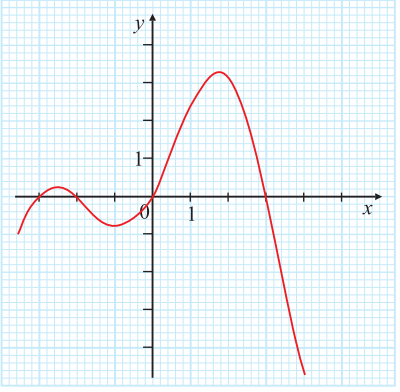


3. (IK 2009.) Grafovi funkcija f i g prikazani su na slici.



a) Odredite što je veće: $f(-2)$ ili $g(-2)$.
b) Napišite skup rješenja nejednadžbe $f(x) \geq g(x)$.

4. (IK 2010.) Funkcija je zadana grafom.

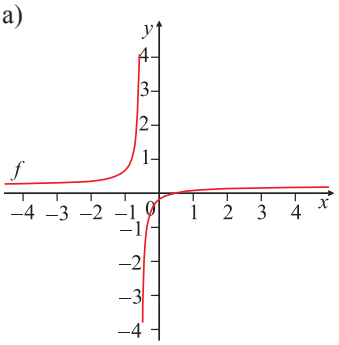


a) Kakvog je predznaka vrijednost funkcije za $x = -1$?
b) Na kojem skupu funkcija poprima pozitivne vrijednosti?

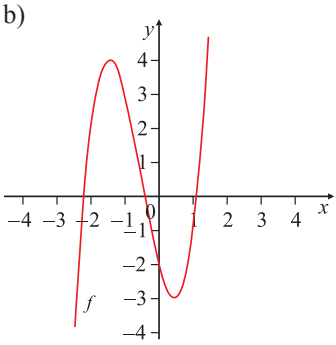
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Odredite koji od zadanih skupova točaka nije graf funkcije.

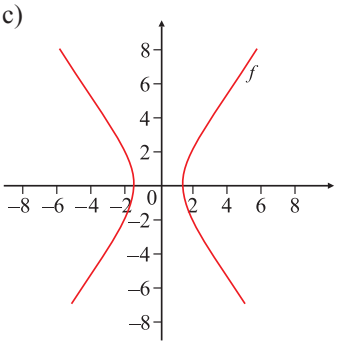
a)



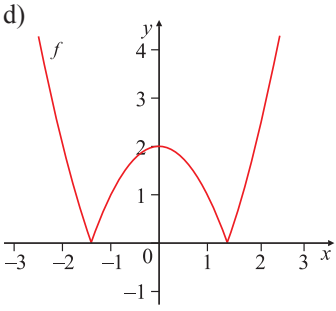
b)



c)



d)



2. Ako je $f\left(\sqrt{x}+1\right)=3x+2$, tada je $f(x)$ jednako:

a) $3x^2-6x+5$ b) $3x^2-6x-5$

c) $3x^2+6x+5$ d) $3x^2+6x-5$.

3. Ako je $f(x)=2x^2+3x$, tada je $f\left(\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}\right)$ jednako:

a) $-3-\sqrt{2}$ b) $3-\sqrt{2}$ c) $-3+\sqrt{2}$ d) $3+\sqrt{2}$.

4. Ako je $f\left(\sqrt{x}-1\right)=16x-2\sqrt{x}-15$, tada je $f(x^2)$ jednako:

a) $-16x^4+30x^2-1$ b) $16x^4+30x^2-1$

c) $16x^4-30x^2-1$ d) $16x^4+30x^2+1$.

5. Ako je $f\left(\sqrt{x}\right)=1+2\left(\sqrt{x}-x\right)$, tada je $f(x)$ jednako:

a) $1-2x-2x^2$ b) $1+2x-2x^2$

c) $1-2x+2x^2$ d) $1+2x+2x^2$.

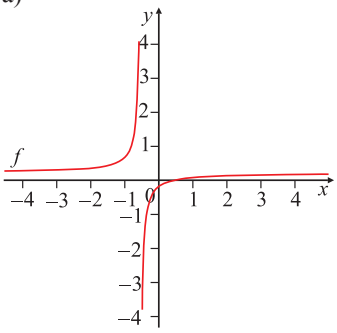
6. Ako je $f\left(2x-1\right)=-4x^2+24x-10$, tada je $f(x)$ jednako:

a) $-x^2+10x-1$ b) $-x^2+10x+1$

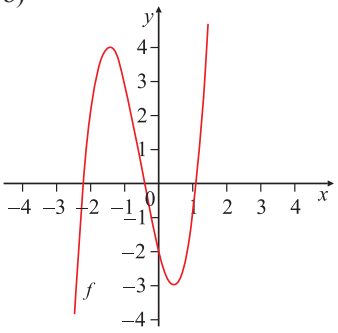
c) $-x^2-10x-1$ d) $-x^2-10x+1$.

7. Koja je od sljedećih funkcija parna?

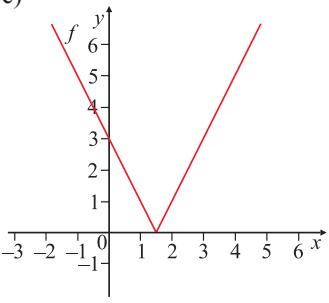
a)



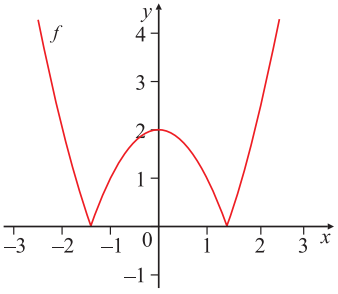
b)



c)

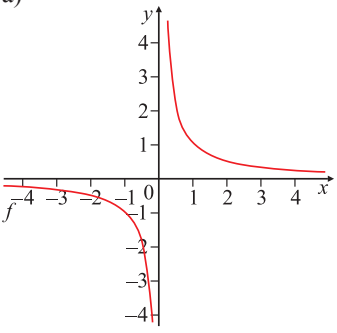


d)

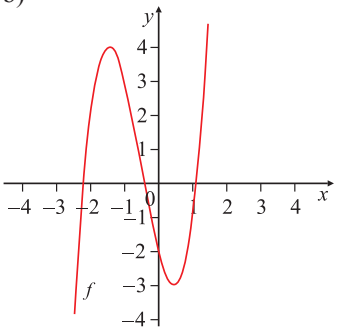


8. Koja je od sljedećih funkcija neparna?

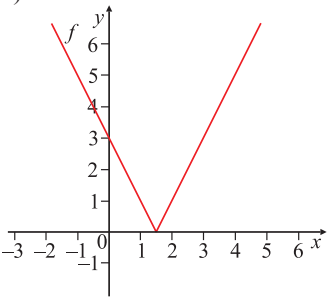
a)



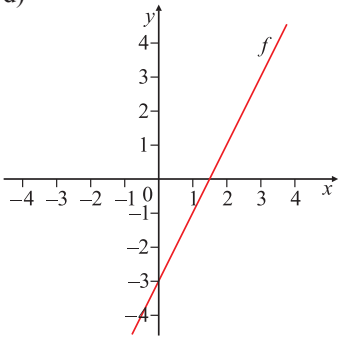
b)



c)

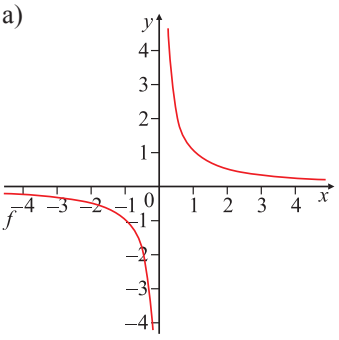


d)

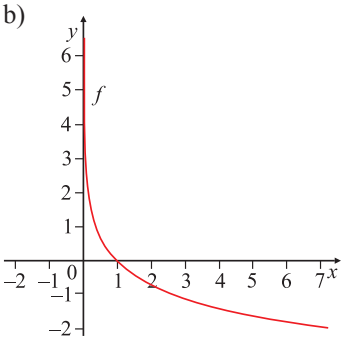


9. Koja je od sljedećih funkcija rastuća?

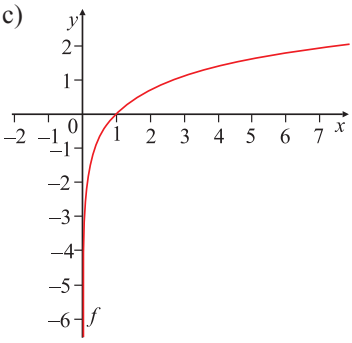
a)



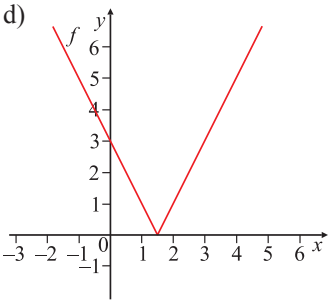
b)



c)

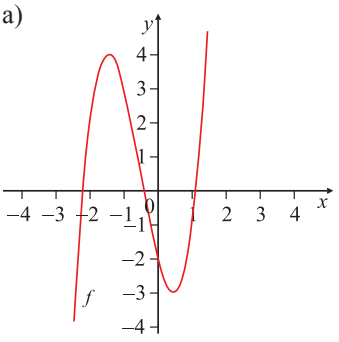


d)

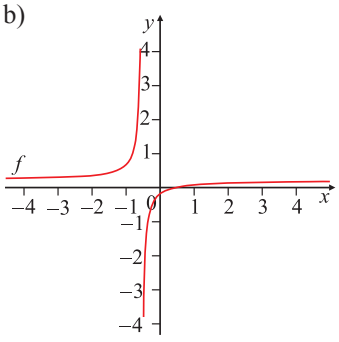


10. Koja je od sljedećih funkcija padajuća?

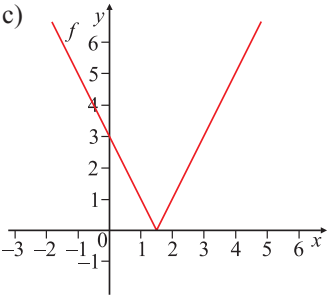
a)



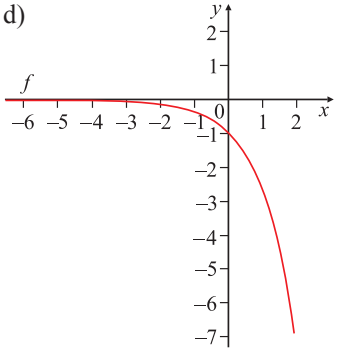
b)



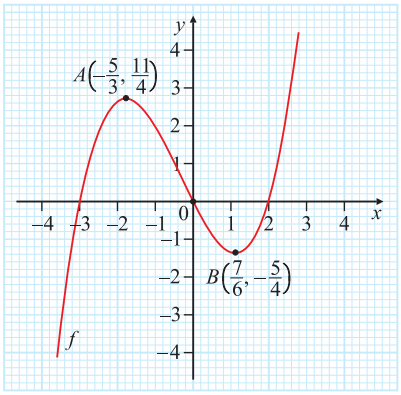
c)



d)



11. Na kojem intervalu funkcija zadana grafom pada?



a) $\left\langle -\infty, -\frac{5}{3} \right\rangle \cup \left\langle \frac{7}{6}, +\infty \right\rangle$

b) $\left\langle -\infty, -\frac{5}{3} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{7}{6}, +\infty \right\rangle$

d) $\left\langle -\frac{5}{3}, \frac{7}{6} \right\rangle$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Izračunajte vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{x^2+4}{x^2-4}$ za $x_1 = 5,\ x_2 = -2,\ x_3 = 2,\ x_4 = \frac{1}{t},\ x_5 = \frac{1}{t-1}$.

2. Izračunajte vrijednosti funkcije $f(x) = 2^{\frac{x-1}{2}} + 1$ za $x_1 = 1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 3,\ x_4 = -9,\ x_5 = 1 + 2\log_2(x-1)$.

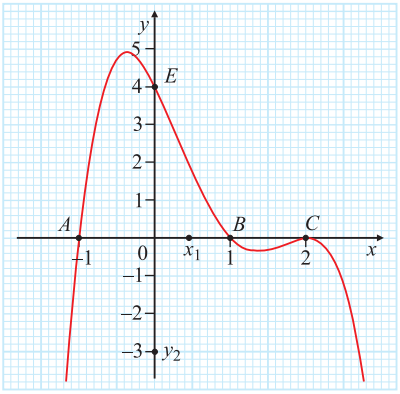
3. Ako je $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$, riješite nejednadžbu $f(x+1) > 1$.

4. Ako je $f(x) = 5 \cdot 3^x$, za koje x je $\frac{f(x+1)}{f(1-x)} > 0$?

5. Nacrtajte graf funkcije zadane tablicom.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$C(n)$	1	2	5	14	42	32	29	0	62

6. Funkcija je zadana svojim grafom.



a) Odredite koordinate točaka A, B, C, E.
b) Za označeni x_1 odredite pripadni y_1. Je li iznad ili ispod x-osi?
c) Za označeni y_2 odredite pripadni x_2. Koliko ima takvih x-eva?
d) Odredite interval gdje je vrijednost funkcije negativna.
e) Ima li funkcija najveću ili najmanju vrijednost?
f) Ima li ova funkcija nultočku?
g) Što je veće: $f(-2)$ ili $f(2)$?

7. Ako je $f\left(1-\sqrt{x}\right)=4-\sqrt{x}-x$, odredite koliko je $f\left(\frac{x}{2}\right)$.

8. Odredite jesu li funkcije parne ili neparne.

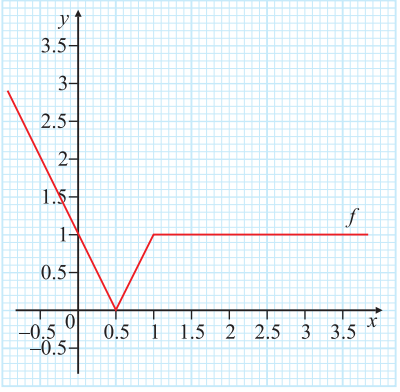
a) $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x^5-x^3-x}$

b) $f(x)=|2x|-3$

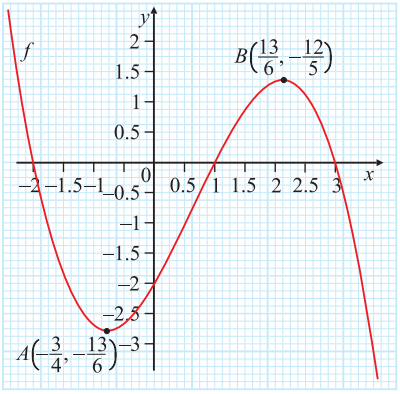
c) $f(x)=\dfrac{2^x-2^{-x}}{2^x+2^{-x}}$

d) $f(x)=\dfrac{2x^2+3}{x^3+x^2}$

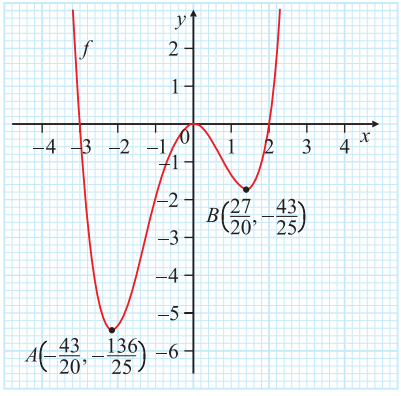
9. Odredite intervale rasta i pada funkcije zadane grafom.



10. Odredite intervale rasta i pada funkcije zadane grafom.



11. Funkcija je zadana svojim grafom.



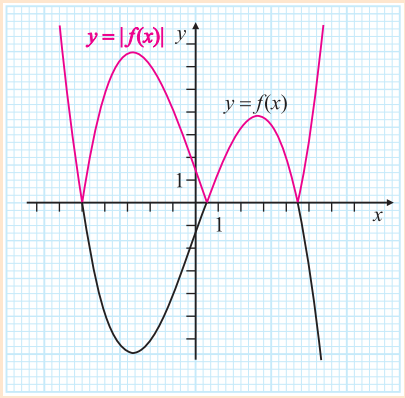
a) Odredite interval na kojem je vrijednost funkcije pozitivna.
b) Odredite intervale rasta i pada funkcije.
c) Ima li funkcija najveću ili najmanju vrijednost? Ako ima, odredite je.
d) Ima li ova funkcija nultočku? Ako ima, odredite je.
e) Što je veće: $f(-1)$ ili $f(1)$?
f) Je li ova funkcija parna?
g) Kolika je vrijednost funkcije za $x = -1$?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. c

2.



3. a) $f(-2) > g(-2)$ b) $x \in [-3, 0] \cup [5, +\infty\rangle$

4. a) $f(-1) < 0$ b) $x \in \langle -3, -2\rangle \cup \langle 0, 3\rangle$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c	**2.** a	**3.** b	**4.** b	**5.** b	**6.** b
7. d	**8.** a	**9.** c	**10.** d	**11.** d	

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

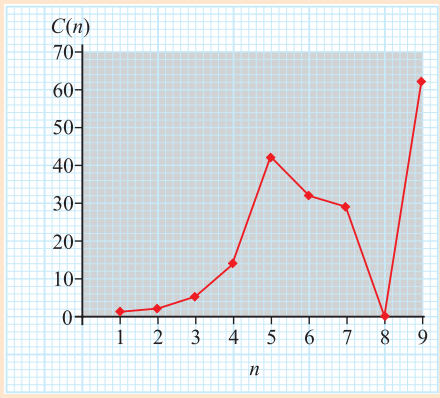
1. $f(5) = \frac{29}{21}$, $f(-2)$ ne postoji, $f(2)$ ne postoji, $f\left(\frac{1}{t}\right) = \frac{1+4t^2}{1-4t^2}$, $f\left(\frac{1}{t-1}\right) = \frac{4t^2-8t+5}{-4t^2+8t-3}$

2. $f(1) = 2$, $f(0) = \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$, $f(3) = 3$, $f(-9) = \frac{33}{32}$, $f\left(1 + 2\log_2(x-1)\right) = x$

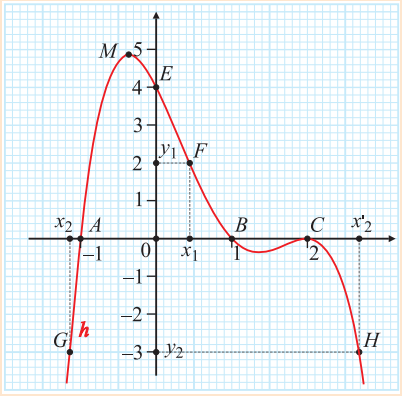
3. $x > -\frac{1}{2}$

4. $\frac{f(x+1)}{f(1-x)} = 3^{2x} > 0$, $x \in R$

5.



6. a) $A(-1, 0)$, $B(1, 0)$, $C(2, 0)$, $E(0, 4)$
b) Točka F. Iznad osi x.
c) Točke G i H. Dva.
d) $x \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, 2\rangle \cup \langle 2, \infty\rangle$
e) Ima najveću vrijednost, točka M.
f) Ima tri nultočke, to su točke A, B, C.
g) $f(-2) < f(2)$



7. $-\frac{x^2}{4} + \frac{3}{2}x + 2$

8. a) Neparna. b) Parna. c) Neparna. d) Ni parna ni neparna.

9. Funkcija pada na intervalu $\left\langle -\infty, \frac{1}{2}\right\rangle$, raste na intervalu $\left\langle \frac{1}{2}, 1\right\rangle$, a konstantna je na intervalu $\langle 1, +\infty\rangle$.

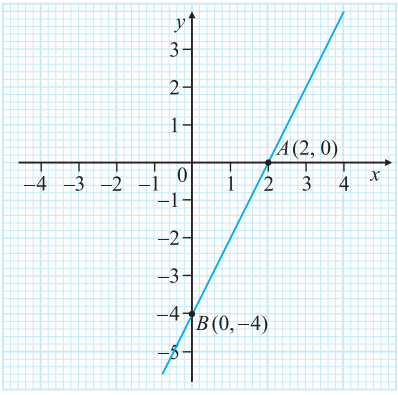
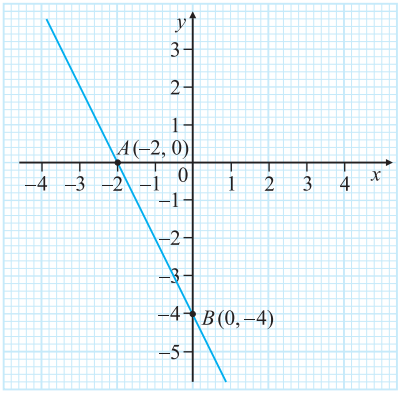
10. Funkcija pada na intervalu $\left\langle -\infty, -\frac{3}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{13}{6}, +\infty\right\rangle$, a raste na intervalu $\left\langle -\frac{3}{4}, \frac{13}{6}\right\rangle$.

11. a) $x \in \langle -\infty, -3\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$
b) Funkcija pada na $\left\langle -\infty, -\frac{43}{20}\right\rangle \cup \left\langle 0, \frac{27}{20}\right\rangle$, a raste na $\left\langle -\frac{43}{20}, 0\right\rangle \cup \left\langle \frac{27}{20}, +\infty\right\rangle$.
c) Funkcija ima najmanju vrijednost u točki A i ona iznosi $-\frac{136}{25}$.
d) Funkcija ima tri nultočke $x_1 = -3$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2$.
e) $f(1) > f(-1)$
f) Nije.
g) $f(-1) = -2$

2.2. Linearna funkcija

2.2.1. Linearna funkcija

Funkciju oblika $f(x) = ax + b$, gdje su a, b realni brojevi i $a \neq 0$ zovemo linearna funkcija. Domena funkcije je skup realnih brojeva, kao i slika funkcije. Graf linearne funkcije zovemo pravac.

$f(x) = 2x - 4$	$g(x) = -2x - 4$
	
Za $a > 0$ funkcija f raste	Za $a < 0$ funkcija g pada
Siječe os x u $(2, 0)$	Siječe os x u $(-2, 0)$
Siječe os y u $(0, -4)$	Siječe os y u $(0, -4)$
Injektivna je jer je $ax_1 + b = ax_2 + b \Rightarrow x_1 = x_2$.	
Surjektivna je jer $\forall y \in \boldsymbol{R}$, $\exists x \in \boldsymbol{R}$.	

Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ ima nultočku ako i samo ako je njena vrijednost nula, $f(x) = 0$, $ax + b = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{a}$. Linearna funkcija je u koordinatnom sustavu predstavljena pravcem za koji je a koeficijent smjera (nagib pravca), a b odsječak na y-osi.

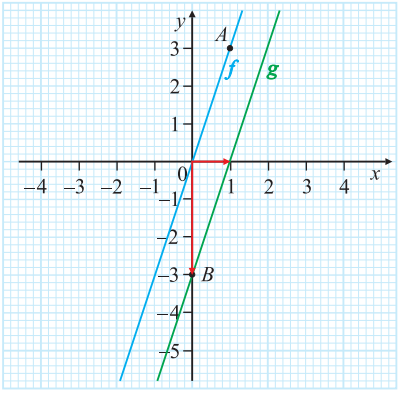
Linearna funkcija $f(x) = ax$ prolazi kroz ishodište. To je neparna funkcija $f(-x) = f(x)$, odnosno simetrična je s obzirom na ishodište.

Primjer 1: Nacrtajmo graf funkcija $f(x) = 3x$ i $g(x) = 3x - 3$ u istom koordinatom sustavu.

Rješenje: Linearna funkcija $f(x) = 3x$ prolazi kroz ishodište ($b = 0$). Dovoljno je izračunati još jednu točku kroz koju prolazi zadani pravac, $f(1) = 3 \cdot 1 = 3$.

Vidimo da $f(x)$ i $g(x)$ imaju jednake nagibe pravaca (paralelni su), a odsječak na osi y funkcije $g(x) = 3x - 3$ je $b = -3$, što znači da graf $g(x)$ možemo dobiti pomicanjem

grafa $f(x)$ u smjeru osi y za 3 prema dolje ($-3 < 0$). Ili, ako $g(x)$ zapišemo kao $g(x) = 3(x-1)$ i vidimo da će nultočka funkcije $g(x)$ biti $x = 1$, što zapravo znači da graf funkcije $g(x)$ dobivamo pomicanjem grafa $f(x)$ u smjeru osi x za 1 udesno.

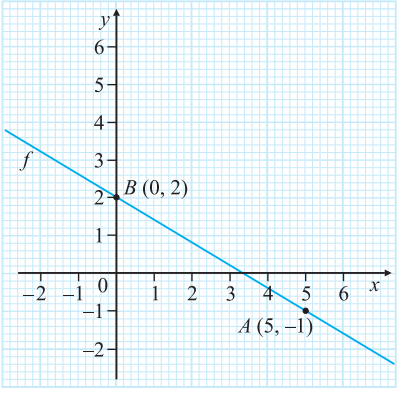


Primjer 2: Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = -\frac{3}{5}x + 2$.

Rješenje: Kako bismo nacrtali pravac, odredimo vrijednosti dviju proizvoljnih točaka kroz koje taj pravac prolazi.

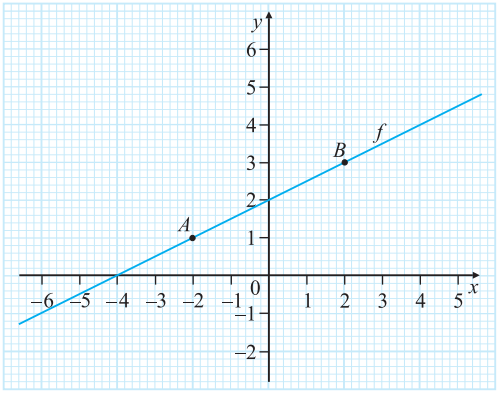
$f(5) = -3 + 2 = -1 \Rightarrow (5, -1)$

$f(0) = 0 + 2 = 2 \Rightarrow (0, 2)$



Da bi se nacrtao pravac dovoljno je znati dvije točke, no ako ih izračunamo više, one nam mogu koristiti za provjeru.

Primjer 3: Zadan je graf linearne funkcije. Odredimo njegov koeficijent smjera i odsječak na *y*-osi.



Rješenje: Uočavamo na slici da pravac siječe os *y* u točki (0, 2), znači da je $b = 2$.

Kako bismo saznali koliki je koeficijent smjera, postoji nekoliko načina. Lako možemo prepoznati (odrediti) nekoliko cjelobrojnih točaka na pravcu. Opišimo put od točke *A* do točke *B*. Vidimo da moramo ići dvije jedinice prema gore i četiri jedinice udesno. Napravimo li omjer tih dvaju brojeva, dobili smo koeficijent smjera $a = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

Zapravo smo računali promjenu vrijednosti funkcije kada se mijenja varijabla *x* koristeći koordinate točaka *A* i *B*:

$\frac{f(y_B) - f(y_A)}{x_B - x_A} = \frac{3-1}{2-(-2)} = \frac{1}{2}$. Naša funkcija glasi $f(x) = \frac{1}{2}x + 2$.

Drugi način bio bi uvrštavanje koordinata prepoznatih točka $f(-2) = 1$, odnosno

$f(x) = ax + 2,\ a(-2) + 2 = 1 \Rightarrow -2a = -1 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$.

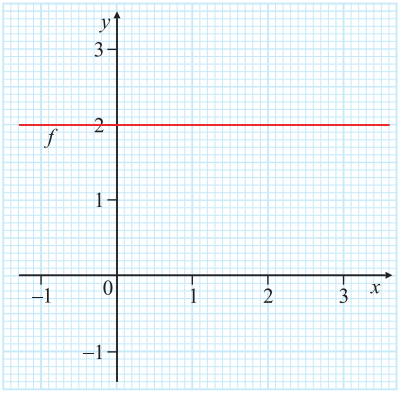
Graf ove linearne funkcije mogao je biti zadan i tablicom vrijednosti funkcije.

x	-2	2
$f(x)$	1	3

Ucrtali bismo točke u koordinatni sustav i dalje rješavali na isti način kao u opisanom postupku.

Primjer 4: Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = 2$ (konstantna funkcija).

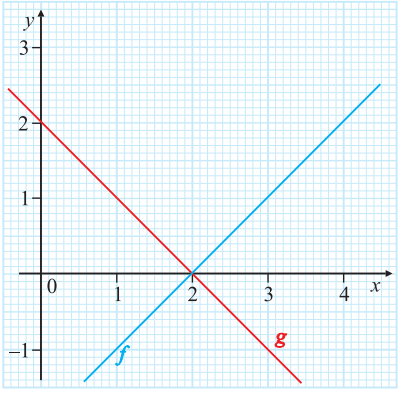
Rješenje: Graf ove funkcije čine točke s koordinatama $(x, 2)$.



Vidimo da je graf konstantne funkcije usporedan s x-osi.
Koliki je njegov koeficijent smjera?
Koeficijent smjera je nula!

Primjer 5: Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove funkcije $f(x) = x - 2$ i $g(x) = -x + 2$.

Rješenje:



Uočimo sljedeće činjenice za funkciju $f(x) = x - 2$:

1. funkcija $f(x) = x - 2$ je rastuća
2. iznad osi x je za $x > 2$, tj. $f(x) > 0$ za $x > 2$
3. ispod osi x je za $x < 2$, tj. $f(x) < 0$ za $x < 2$
4. siječe os x za $x = 2$, tj. 2 je nultočka funkcije $f(x) = x - 2$.

Sličnim načinom zaključujemo i za funkciju $g(x) = -x + 2$:

1. funkcija $g(x) = -x + 2$ je padajuća
2. iznad osi x je za $x < 2$, tj. $g(x) > 0$ za $x < 2$
3. ispod osi x je za $x > 2$, tj. $g(x) < 0$ za $x > 2$
4. siječe os x za $x = 2$, tj. 2 je nultočka funkcije $g(x) = x - 2$.

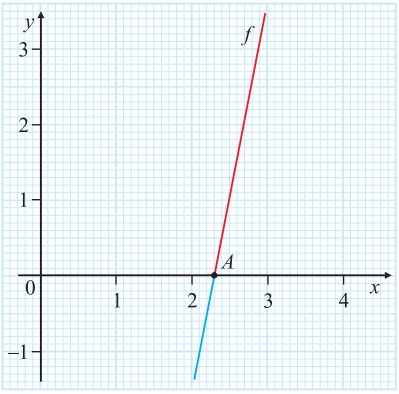
Primjer 6: Ne rješavajući nejednadžbu, odredimo skup rješenja $5x - 12 > 0$.

Rješenje: Koristeći činjenice iz prošlog primjera možemo riješiti nejednadžbu grafičkim putem.

Dovoljno je odrediti gdje je funkcija $f(x) = 5x - 12$ pozitivna. Vidimo na slici da je dio iznad osi x (obojen crveno) – pozitivan! Naša funkcija je pozitivna desno od svoje nultočke.

$$5x - 12 = 0 \Rightarrow x = \frac{12}{5} \Rightarrow x \in \left\langle \frac{12}{5}, +\infty \right\rangle.$$

Mogli smo ovu nejednadžbu riješiti i bez grafa jer je iz prošlog primjera očito da je rastuća funkcija pozitivna desno od svoje nultočke.



Primjer 7: Mjesečna naknada za fiksnu telefonsku liniju je 60 kuna, a po svakom sljedećem pozivu dodaje se još 8 lipa (porez ćemo zanemariti).

a) Koliki je bio račun na kraju mjeseca ako je tog mjeseca obavljeno 25 poziva, a koliki ako je obavljeno 40 poziva?

Rješenje: Za 25 poziva plaćamo:
60 kuna pretplate + $25 \cdot 0.08$ = 2 kune → račun je 62 kune.
Za 40 poziva plaćamo:
60 kuna pretplate + $40 \cdot 0.08$ = 3.2 kune → račun je 63.2 kune.

b) Zapišite funkciju koja opisuje iznos računa ovisno o broju poziva.

Rješenje: Vidimo da će se cijena povećavati kada se povećava broj poziva, znači da su veličine proporcionalne odnosno linearno zavisne. Sve možemo zapisati koristeći linearnu funkciju $f(x) = ax + b$.

$$f(0) = 60 \Rightarrow 0 \cdot a + b = 60 \Rightarrow b = 60$$

$$f(25) = 62 \Rightarrow 25a + b = 62 \Rightarrow 25a = 2 \Rightarrow a = 0.08$$

$$f(x) = 0.08x + 60$$

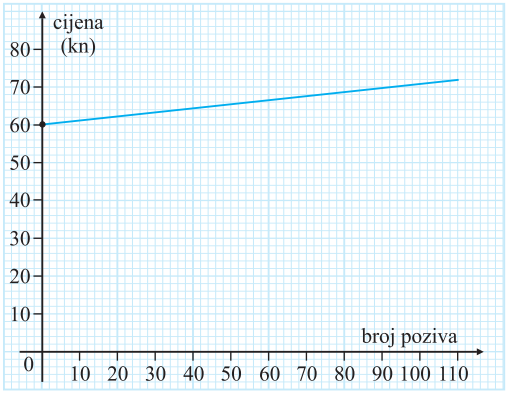
c) Koliko je bilo poziva ako je iznos računa 78 kuna?

Rješenje: $78 = 0.08x + 60 \Rightarrow 18 = 0.08x \Rightarrow x = 225$

Bilo je 225 poziva.

d) Nacrtajte graf te funkcije u koordinatnom sustavu u kojem jedinica na osi x predstavlja 10 poziva, a jedinica na osi y predstavlja 10 kuna.

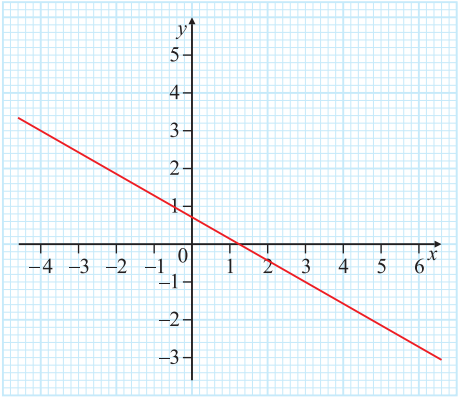
Rješenje:



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Funkcija prikazana na slici prima vrijednost $y = -1$ za x jednak:

a) -0.5 b) 1.2 c) 2 d) 3.



2. (NI 2006.) Vrijednosti funkcije $f(x) = \frac{3}{2}x - 5$ prikazane su u tablici:

a)

x	0	-4
$f(x)$	-5	3

b)

x	0	12
$f(x)$	-5	-5

c)

x	0	-2
$f(x)$	-5	-8

d)

x	0	2
$f(x)$	-5	2

3. (IK 2006.) Tablicom

x	2	-2
$f(x)$	-2	4

prikazane su vrijednosti funkcije:

a) $f(x) = 2x + 8$ b) $f(x) = -2x + 2$

c) $f(x) = -1.5x + 1$ d) $f(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}$.

4. (IK 2006.) Tablicom

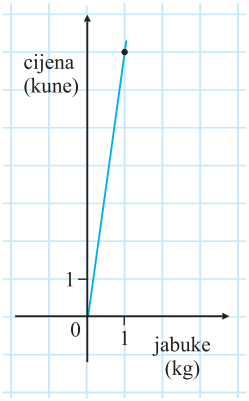
x	0	3
$f(x)$	-2	1

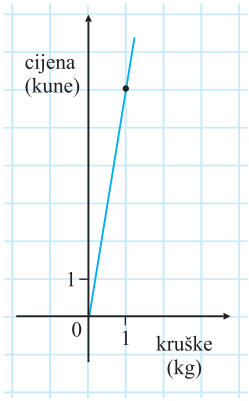
prikazane su vrijednosti funkcije:

a) $f(x) = 3x - 2$ b) $f(x) = x - 2$ c) $f(x) = x - 1$ d) $f(x) = x$.

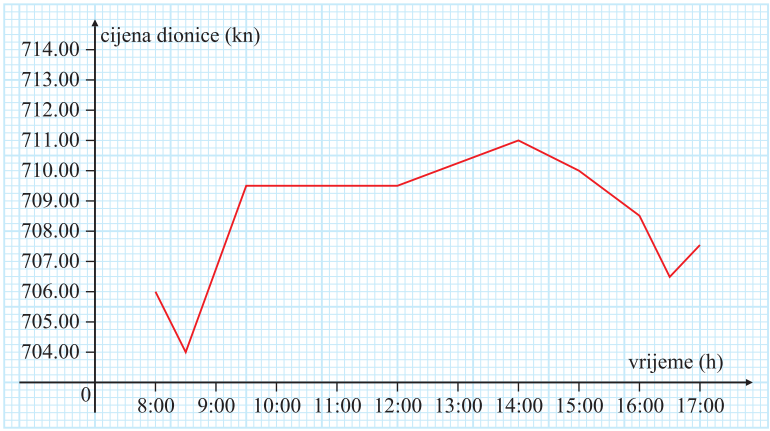
5. (IK 2006.) Sljedeća dva grafa prikazuju ovisnost cijene jabuka i krušaka o masi. Kolika je razlika u cijeni između1 kg krušaka i 1 kg jabuka?

a) 1 kn b) 2.50 kn c) 3 kn d) 3.50 kn





6. (NI 2006.) Graf na slici prikazuje kretanje cijene jedne dionice tvrtke „MATA“ tijekom nekog radnog dana.



a) Koliko je puta tijekom tog radnog dana cijena dionice bila 707 kn?
b) Koliko se sati cijena dionice nije mijenjala?
c) Od kojeg do kojeg sata je cijena dionice najbrže rasla?
d) Opišite riječima što se događa s dionicama u vremenu od 14:00 do 16:30 sati.
e) Koliki je bio najveći mogući **gubitak** po dionici kupljenoj i prodanoj toga dana?

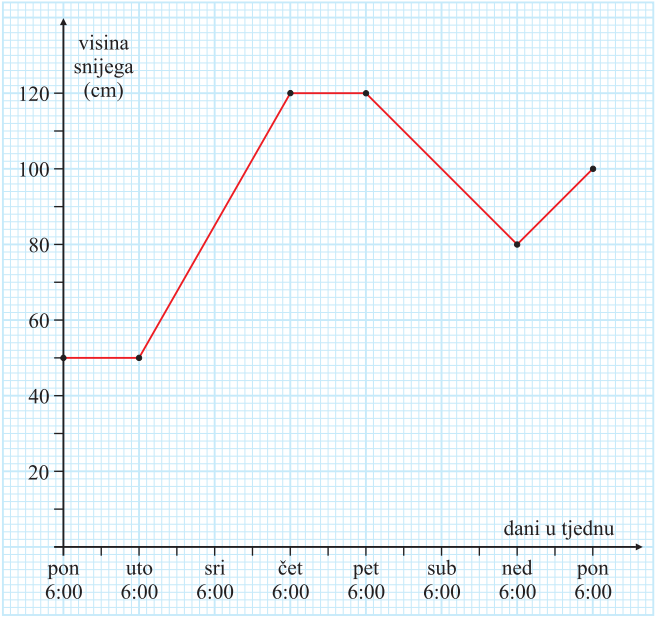
7. (NI 2006.) Kad je pećnica uključena 5 minuta doseći će temperaturu od 55 °C. Kad je uključena 10 minuta temperatura će joj biti 87 °C. Pretpostavimo da temperatura pećnice linearno ovisi o vremenu.

a) Odredite linearnu funkciju koja opisuje kako temperatura pećnice ovisi o vremenu.
b) Kolika je temperatura pećnice nakon pola sata?
c) Kolač treba staviti u pećnicu kada joj je temperatura između 150 °C i 180 °C. U kojem vremenskom intervalu nakon uključenja pećnice treba u nju staviti kolač? Navedite granice intervala zaokružene na cijeli broj minuta.

8. (IK 2006.) Liječnici rabe tjelesni indeks (TI) kako bi odredili pretilost. Tjelesni indeks se dobiva tako da se masa (u kg) podijeli s kvadratom visine (u m).

a) Koliki je tjelesni indeks osobe kojoj je masa 65 kg i koja je visoka 169 cm? Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.
b) Osoba visoka 177 cm ima tjelesni indeks 21 (kad zaokružimo na najbliži cijeli broj). Odredite u kojem je intervalu njezina masa!

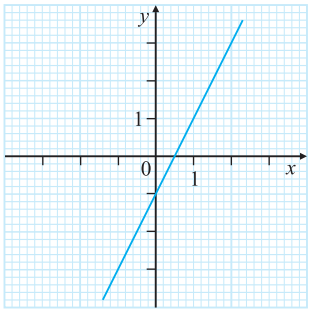
9. (NI 2007.) Graf prikazuje visinu snijega izmjerenog na Zavižanu u jednom tjednu.



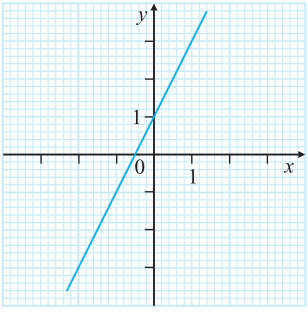
a) Kolika je visina snijega na početku mjerenja prikazanih grafom?
b) Visina snijega je rasla u dva navrata. Koliko je ukupno centimetara napadalo u ta dva navrata?
c) Napišite kada se visina snijega spustila na 1 m.
d) Opišite riječima što se događa sa snijegom od petka u 6:00 do nedjelje u 6:00 sati!

10. (NI 2009.) Koji graf prikazuje funkciju $f(x) = 2x - 1$?

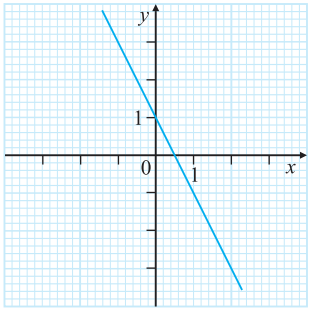
a)



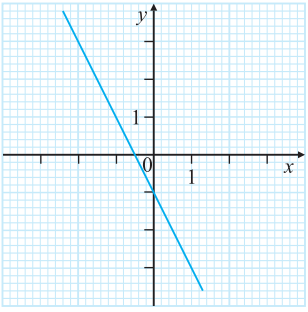
b)



c)



d)



11. (NI 2009.) U koordinatnome sustavu prikažite graf linearne funkcije $f(x) = x - 2$.

12. (NI 2009.) U javnoj garaži parkiranje se naplaćuje prema sljedećoj tarifi: prvih pola sata 5 kuna, drugih pola sata 4 kune i svaki sljedeći započeti sat po 7 kuna. Vozilo je bilo parkirano od 10:35 do 15:50 h. Koliko je kuna parkiranje platio njegov vlasnik?

a) 23 kn b) 30 kn c) 37 kn d) 44 kn

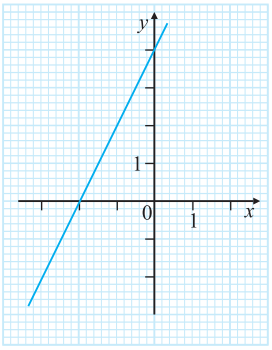
13. (NI 2009.) Formula koja povezuje stupnjeve Celzijeve (°C) sa stupnjevima Fahrenheita (°F) je

$$C = \frac{5(F-32)}{9}.$$

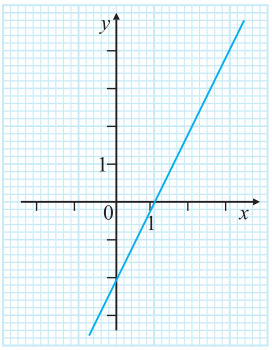
a) Odredite koliko je 451 °F izraženo u °C.
b) Na kojoj se temperaturi Fahrenheitova i Celzijeva skala podudaraju?

14. (IK 2010.) Pravac $y = \frac{1}{2}x - 2$ prikazan je na slici:

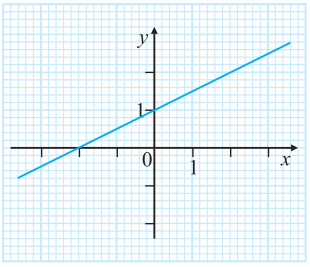
a)



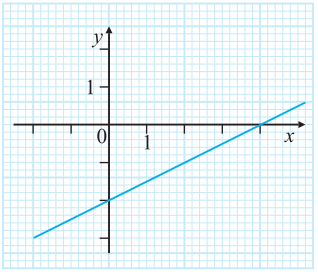
b)



c)



d)



ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Koja je funkcija rastuća?

a) $f(x) = -2x - 1$

b) $f(x) = \left(2 - \sqrt{5}\right)x + \sqrt{5}$

c) $f(x) = 4$

d) $f(x) = \frac{2}{7}x - 3$

2. Zaokružite netočnu tvrdnju.

a) $f(x) = -\frac{1}{6}x - 2$ pozitivna je za $x > -12$

b) $f(x) = \frac{1}{6}x - 3$ negativna je za $x < 18$

c) $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$ negativna je za $x > 2$

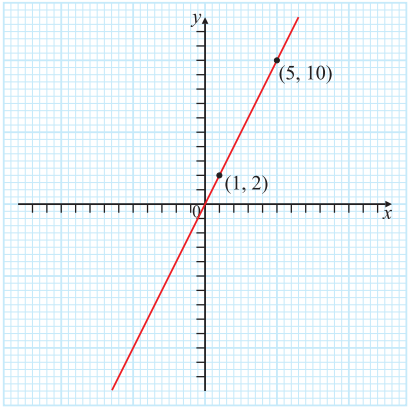
d) $f(x) = \frac{3}{2}x + 3$ pozitivna je za $x > 2$

3. Koja točka ne pripada pravcu $y = -3x + 4$?

a) $(-1, 7)$ b) $(0, 4)$ c) $(1, 1)$ d) $(-2, 1)$

4. Koeficijent smjera pravca sa slike je:

a) 2 b) 4 c) 8 d) – 4.



5. Kolika je vrijednost funkcije $f(x) = 2x - 5$ za $x = -1$?

a) 3 b) –7 c) –3 d) 7

6. Pravac paralelan s x-osi ima koeficijent smjera:

a) nedefiniran b) nula c) pozitivan d) negativan.

7. Funkcija ima koeficijent smjera 5 i prolazi točkom (1, 10).
Kako glasi njena jednadžba?

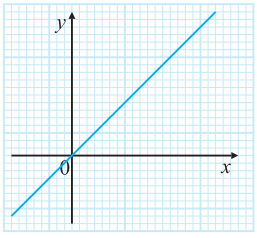
a) $f(x) = 5x + 10$ b) $f(x) = 5x - 10$ c) $f(x) = 5x - 5$ d) $f(x) = 5x + 5$

8. Cijena unajmljivanja C dostavnih kolica u trgovini je 7 kuna za polog plus 3 kune po satu. Ako je t broj sati unajmljivanja, kako glasi funkcija cijene unajmljivanja C?

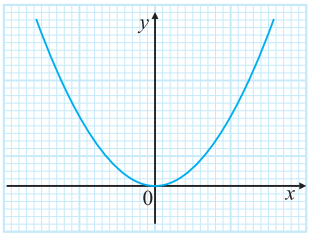
a) $t = 3C + 7$ b) $C = 7 - 3t$ c) $C = 3t + 7$ d) $7 = C + 3t$

9. Koji graf predstavlja linearnu funkciju?

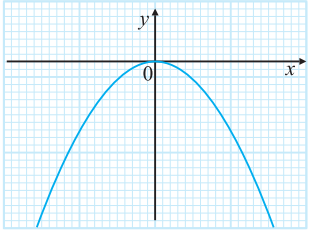
a)



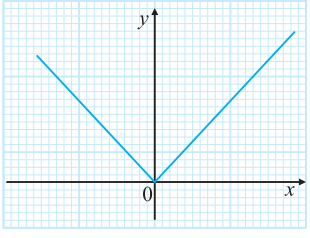
b)



c)



d)



10. Za učlanjenje u „Online Music Club“ jednokratno se plaća 99.99 kuna, a za svaku pjesmu još 3.59 kuna. Ako Kazimir ima 360 kuna za pristup klubu i za kupnju pjesama, koji je najveći broj pjesama koje može kupiti?

a) 71 b) 72 c) 129 d) 131

11. Ana skuplja poštanske marke i ima ih 58. Ako nabavlja p poštanskih maraka svakog tjedna, koji izraz predstavlja ukupan broj poštanskih maraka koje će imati za t tjedana?

a) $58\,pt$ b) $58 + pt$ c) $58\,p + t$ d) $58 + p + t$

12. Koja jednadžba predstavlja pravac paralelan s x-osi?

a) $x = 5$ b) $y = 10$ c) $x = \frac{1}{2}y$ d) $y = 5x + 17$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Za funkciju
$f(x) = ax + b$, veličinu a nazivamo _____

_____ .

2. Pravac dan jednadžbom $y = -3$ paralelan je s _____ .

3. Linearna funkcija $f(x) = ax + b$ je _____ , ako je $a < 0$.

4. Sve linearne funkcije oblika $f(x) = ax$ prolaze točkom (_____ , _____).

5. Izračunajte vrijednost funkcije $f(x) = -\frac{5}{3}x + 2$ za

$x_1 = -3,\ x_2 = 3,\ x_3 = 3\sqrt{2},\ x_4 = 27,\ x_5 = \frac{1}{5},\ x_6 = \frac{3}{5}.$

6. Napišite jednadžbu pravca kojemu je odsječak na ordinati 7, a nultočka $(-5, 0)$.

7. Savjetnik svoje usluge unaprijed naplaćuje 70 kuna uz dodatnih 10 kuna za svaki sat savjetovanja.

a) Popunite tablicu.

sati savjetovanja (h)	0	5	10	15	20
cijena (kn)					

b) Nacrtajte graf cijene po satu savjetovanja.

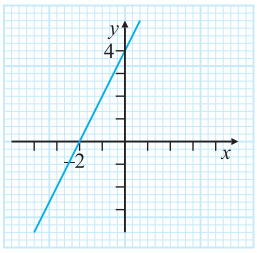
c) Proučite graf funkcije i odgovorite na pitanja:

c_1) Koliko stoji 7 sati savjetovanja?

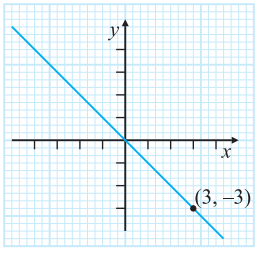
c_2) Koliko je bilo sati savjetovanja ako je konačna cijena 200 kuna?

8. Odredite jednadžbe pravaca zadanih grafovima:

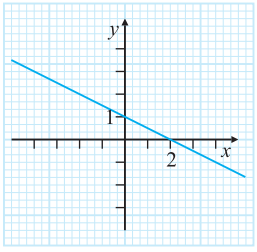
a)



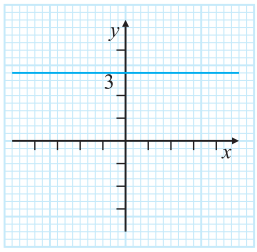
b)



c)



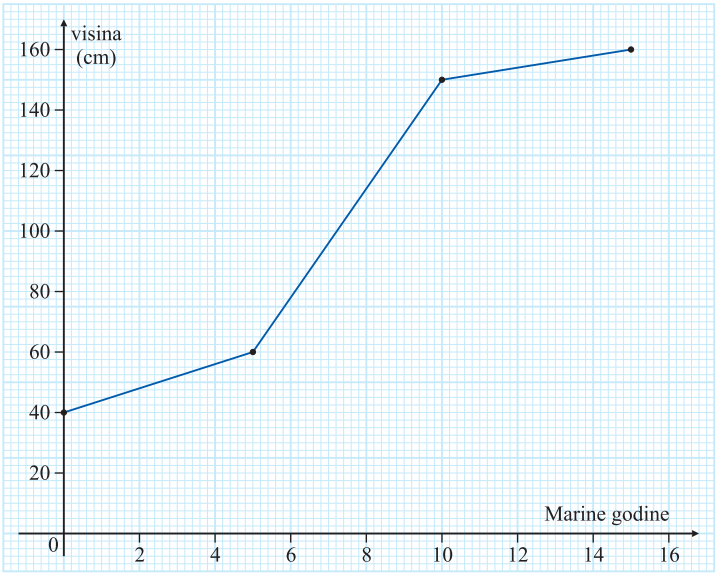
d)



9. Riješite nejednadžbe koristeći svojstva linearnih funkcija.

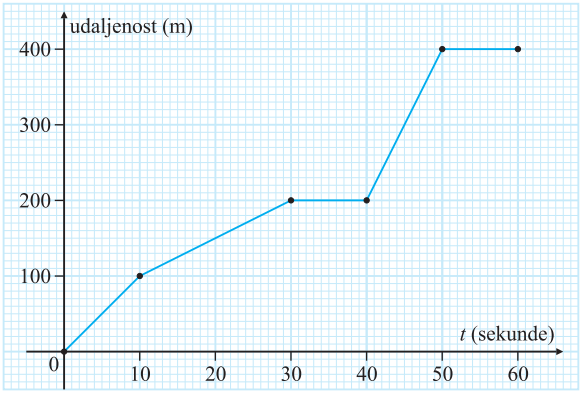
a) $4x - 10 < 0$ b) $-\frac{3}{4}x + 9 > 0$ c) $\frac{3}{2}x - 8 \geq 0$ d) $-\frac{2}{3}x - 12 \leq 0$

10. Zadan je graf.



a) Što ovaj graf pokazuje?
b) U kojem razdoblju života je Mara najbrže rasla?
c) Koliko je Mara narasla (od rođenja do petnaeste godine)?
d) Koliki je njezin prosječan rast godišnje između pete i desete godine?

11. Graf pokazuje Reljin put skateboardom.



a) Koliko je vremena proveo na putu?
b) Koliku je udaljenost prešao?
c) Koliku brzinu je postigao u desetoj sekundi?
d) Koliku brzinu je postigao u 30-oj sekundi?
e) Koliku brzinu je postigao u 50-oj sekundi?
f) Kolika mu je bila brzina između 30-e i 40-e sekunde?

12. Tablica pokazuje broj sati koje je student radio i količinu novaca koju je zaradio.

broj sati (h)	zarađen novac (kune)
8	500
15	937.5
19	1187.5
30	1875

a) Napišite jednadžbu koja predstavlja broj kuna (kn) zarađenih po satu (h).
b) Koristeći jednadžbu izračunajte koliko će novaca dobiti student koji je radio 40 sati.
c) Koristeći jednadžbu izračunajte koliko je sati radio student koji je zaradio 2 187.5 kuna.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. d **2.** c **3.** c **4.** b **5.** a

6. a) 3 puta
b) 2.5 h
c) Od 8:30 do 9:30
d) Vrijednost dionica pada.
e) 4.5 kn

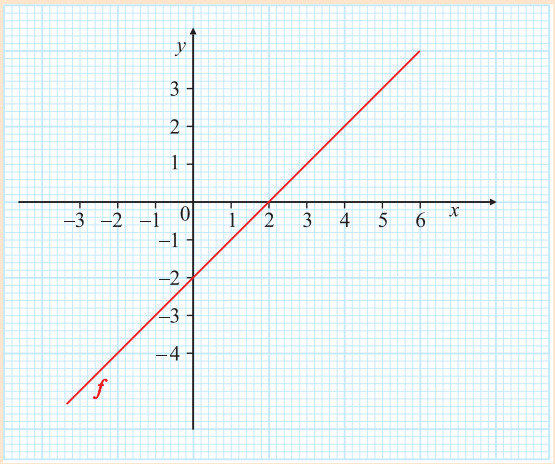
7. a) $y = \frac{32}{5}x + 23$, gdje je x vrijeme u minutama, a y temperatura u °C.
b) 215 °C
c) Kolač treba staviti u pećnicu nakon 20 do 25 minuta.

8. a) 23
b) $64.22 \leq m \leq 67.17$

9. a) 50 cm
b) 90 cm
c) U subotu u 6 sati.
d) Snijeg se topio.

10. a

11.



12. d

13. a) 232.8 °C b) – 40 °C = – 40 °F

14. d

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** a **3.** d **4.** a **5.** b **6.** b
7. d **8.** c **9.** a **10.** b **11.** b **12.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. koeficijent smjera

2. x-osi

3. padajuća

4. (0, 0)

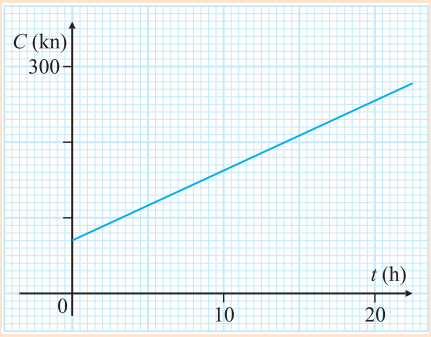
5. $f(-3) = 7,\ f(3) = -3,\ f(3\sqrt{2}) = -5\sqrt{2} + 2,\ f(27) = -43,\ f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{5}{3},\ f\left(\frac{3}{5}\right) = 1$

6. $y = \frac{7}{5}x + 7$

7. a)

sati savjetovanja (h)	0	5	10	15	20
cijena (kn)	70	120	170	220	270

b)



c_1) 140 kuna c_2) 13 sati

8. a) $y = 2x + 4$ b) $y = -x$ c) $y = -\frac{1}{2}x + 1$ d) $y = 3$

9. a) $x < \frac{5}{2}$ b) $x < 12$ c) $x \geq \frac{16}{3}$ d) $x \geq -18$

10. a) Marin rast od rođenja do petnaeste godine.
b) Od 5 do 10 godine.
c) 120 cm
d) 18 cm po godini.

11. a) 60 sekundi b) 400 m c) 10 m/s d) 5 m/s
e) 20 m/s f) 0, stajao je.

12. a) $y = 62.5 \cdot t$ b) 2 500 kuna c) 35 sati

2.2.2. Linearna jednadžba

Za realne brojeve a i b, $a \neq 0$, jednadžbu $a \cdot x = b$ zovemo linearna jednadžba ili jednadžba prvog stupnja s jednom nepoznanicom x.
Riješiti jednadžbu znači odrediti svaki realni broj x_1 za koji je istinita jednakost $a \cdot x_1 = b$. Broj x_1 tada zovemo rješenje jednadžbe.

Primjer 1: Riješimo jednadžbu: $2x-2\{x-2[x-2(x-2)]\}=0$.

Rješenje:
$$2x-2\{x-2[x-2x+4]\}=0$$
$$2x-2\{x-2[-x+4]\}=0$$
$$2x-2\{x+2x-8\}=0$$
$$2x-2\{3x-8\}=0$$
$$2x-6x+16=0$$
$$-4x=-16$$
$$x=4$$

Primjer 2: Riješimo jednadžbu: $\frac{x-9}{4}+\frac{2x-1}{6}-\frac{3x+11}{9}=3$.

Rješenje:
$$\frac{x-9}{4}+\frac{2x-1}{6}-\frac{3x+11}{9}=3 \,/\cdot 36$$
$$9(x-9)+6(2x-1)-4(3x+11)=108$$
$$9x-81+\cancel{12x}-6\cancel{-12x}-44=108$$
$$9x=239$$
$$x=\frac{239}{9}$$

Primjer 3: Riješimo jednadžbu: $\frac{4}{x^2+10x+25}+\frac{3}{10x-2x^2}=\frac{5}{2x^2-50}$.

Rješenje: Faktorizirajmo nazivnike i pomnožimo jednadžbu sa zajedničkim nazivnikom.
$$\frac{4}{(x+5)^2}+\frac{3}{2x(5-x)}=\frac{5}{2(x-5)(x+5)} \,/\cdot 2x(x-5)(x+5)^2$$

Kako nam se ne bi dogodilo da dobijemo nulu u nazivniku, uvjetujemo da nazivnik nije nula: $x \neq 0$, $x \neq 5$, $x \neq -5$.

$$4 \cdot 2x(x-5)-3(x+5)^2=5x(x+5)$$
$$8x^2-40x-3(x^2+10x+25)=5x^2+25x$$
$$-95x=75 \;\Rightarrow\; x=-\frac{15}{19}.$$

Primjer 4: Riješimo jednadžbu $\frac{1}{2}m(x+1)-\frac{1}{2}(2x-1)=1$ uz raspravu o ovisnosti rješenja o realnom parametru m.

Rješenje: Zapišimo jednadžbu u obliku $a \cdot x = b$.

$$\frac{1}{2}m(x+1)-\frac{1}{2}(2x-1)=1 \,/\cdot 2$$

$$mx+m-2x+1=2$$

$$x(m-2)=1-m$$

Broj koji množi x može biti jednak nuli ili različit od nule. Upravo zbog ovisnosti o tom broju imamo dva slučaja.

$1^0 \;\; m-2=0 \;\Rightarrow\; \underline{m=2}$

$\quad x\cdot 0=-1 \;\Rightarrow\; \underline{x\in\varnothing}$

Ova jednakost ne vrijedi ni za jedan realni broj, znači da jednadžba nema rješenja.

$2^0 \;\; m-2\neq 0 \Rightarrow \underline{m\neq 2}$

$$x=\frac{1-m}{m-2}$$

Rješenje jednadžbe je $x=\frac{1-m}{m-2}$ za bilo koji realni broj, osim 2.

Primjer 5: Riješimo jednadžbu $\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x}=2-\frac{2}{x}$ i provjerimo točnost rezultata!

Rješenje: $\frac{x}{x-1}+\frac{x-2}{x}=2-\frac{2}{x} \;/\cdot x(x-1)$, uz uvjet $x\neq 1$, $x\neq 0$

$$x^2+(x-2)(x-1)=2x(x-1)-2(x-1)$$

$$x^2+x^2-x-2x+2=2x^2-2x-2x+2$$

$x=0$, nije rješenje (zbog uvjeta) $\Rightarrow \; x\in\varnothing$

Primjer 6: Ako je $O=2r\pi(r+v)$, koliko je v?

Rješenje: $O=2r\pi(r+v)\,/:2r\pi$

$$\Rightarrow \quad \frac{O}{2r\pi}=r+v$$

$$\Rightarrow \quad v=\frac{O}{2r\pi}-r$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Ako je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$, tada je v:

a) $v = \frac{2P}{a-c}$ b) $v = \frac{2P}{a+c}$ c) $v = \frac{a+c}{2P}$ d) $v = \frac{2P-a}{c}$.

2. (NI 2006.) Riješite jednadžbu $(x-4)(3+x) = 1 + (x-3)^2$.

3. (NI 2006.) Jednadžba $2k + 5x + 3 = 0$ ima negativno rješenje za realne brojeve k za koje vrijedi:

a) $k > \frac{3}{2}$ b) $k < \frac{3}{2}$ c) $k < -\frac{3}{2}$ d) $k > -\frac{3}{2}$.

4. (IK 2006.) Ako je $O = 4a$, tada je a jednako:

a) $a = \frac{O}{4}$ b) $a = \frac{4}{O}$ c) $a = O - 4$ d) $a = 4O$.

5. (IK 2006.) Rješenje jednadžbe $1 + x = 2(x-1)$ je:

a) –3 b) –1 c) $\frac{1}{3}$ d) 3.

6. (IK 2006.) Ako je $p = \frac{ar+bs-q}{t}$, tada je s jednako:

a) $s = \frac{ar-q-pt}{b}$ b) $s = \frac{ar+bt-q}{b}$

c) $s = \frac{q+pt-ar}{b}$ d) $s = \frac{pt-ar-q}{b}$.

7. (NI 2007.) Ako je $P = 6$ i ako je $P = \frac{a+c}{2} \cdot v$, tada je $a + c$ jednako:

a) $\frac{3}{v}$ b) $\frac{12}{v}$ c) $3 - v$ d) $12 - v$.

8. (NI 2007.) Riješite jednadžbu $-5 + 4(x-2) = 19 - 4x$.

9. (NI 2008.) Riješite jednadžbu $(x-1)(x+5) = x^2$.

10. (NI 2008.) Izrazite a iz izraza $p = ab + (a+b)v$.

11. (NI 2009.) Riješite jednadžbu $5x - \frac{1}{2} = \frac{5}{2} - x$.

12. (NI 2009.) Odredite h iz formule $S = r\pi(r + 2h)$.

a) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{r\pi} - r\right)$ b) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{S}{r\pi} + r\right)$

c) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{r\pi}{S} - r\right)$ d) $h = \frac{1}{2}\left(\frac{r\pi}{S} + r\right)$

13. (NI 2009.) Riješite jednadžbu $\frac{2x-3}{x+5} = -2$.

14. (NI 2009.) Ako je $9x + 3y - 4 = 0$, koliko je y?

a) $y = \frac{1}{3}x - \frac{4}{3}$ b) $y = -3x + \frac{4}{3}$ c) $y = -\frac{1}{3}x + \frac{4}{3}$ d) $y = 3x - \frac{4}{3}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Zadana je jednadžba $\frac{2x+1}{x+1} + \frac{2x-1}{1-x} = \frac{-3}{x^2-1}$.

a) Je li moguće da broj $x = -1$ bude rješenje zadane jednadžbe?
DA NE

b) Je li moguće da jednadžba ima više od jednog rješenja?
DA NE

c) Je li $x = -2$ rješenje zadane jednadžbe?
DA NE

d) Je li $x = \frac{3}{2}$ rješenje zadane jednadžbe?
DA NE

2. Rješenje jednadžbe $\frac{4}{x^2+10x+25} + \frac{3}{10x-2x^2} = \frac{5}{2x^2-50}$ je:

a) 0 b) 5 c) -5 d) $-\frac{15}{19}$.

3. Rješenje jednadžbe $\frac{3}{x^2-9} - \frac{1}{9-6x+x^2} = \frac{4}{2x^2+6x}$ je:

a) 0 b) 3 c) -3 d) Nema rješenja.

4. Koliki mora biti parametar m da jednadžba $\frac{1}{2}m(x+1) - \frac{1}{2}(2x-1) = 1$ nema rješenja?

a) -1 b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) 0

5. Ako je parametar $m = 0$, koje je rješenje jednadžbe $2m(x-2)+2=(2m-1)^2$?

a) $x=\frac{4m^2-1}{2m}$ b) $x=\frac{2m}{4m^2-1}$

c) $x=\frac{1-4m^2}{2m}$ d) Nema rješenja.

6. Koliko rješenja ima jednadžba $\frac{x-2}{x+2}-\frac{x+2}{x-2}=\frac{16}{x^2-4}$?

a) 1 b) 2

c) Nema rješenja. d) Beskonačno mnogo.

7. Ako je $O=r\pi(r+s)$, onda je s:

a) $O-r\pi$ b) $\frac{O}{r\pi}-r$ c) $O-r^2\pi-r$ d) $(O-r^2\pi)r$.

8. Ako je $v=gt+v_0$ i $s=\frac{g}{2}t^2+v_0t$, onda je t jednak:

a) $\frac{2s}{v+v_0}$ b) $\frac{2s}{v-v_0}$ c) $\frac{s}{v-v_0}$ d) $\frac{2s}{v}$.

9. Ako je $y=\frac{x-1}{x+1}$, onda je x:

a) $\frac{y+1}{y-1}$ b) $\frac{y+1}{1-y}$ c) $\frac{-y-1}{1-y}$ d) $\frac{y-1}{y+1}$.

10. Mirna se požalila prijateljici Sari kako je dobila za domaću zadaću iz matematike pet jednadžbi. Koji je od zadanih zadataka jednadžba?

a) $3x^2\cdot 2x^4$ b) $5-2x+3x$ c) $3(2x+7)$ d) $\frac{2}{3}=\frac{x+2}{6}$

11. Rješenje jednadžbe $8-2(3x+4)=5x-16$ je:

a) 0 b) $\frac{11}{16}$ c) $\frac{28}{11}$ d) $\frac{16}{11}$.

12. Rješenje jednadžbe $\frac{2}{x}+\frac{x}{x-2}=1$ je:

a) $x=0$ b) $x=1$ c) $x=2$ d) $x=\frac{1}{2}$.

13. Tina sakuplja salvete i ima ih 137. Koji od sljedećih izraza predstavlja broj salveta koje će imati nakon t tjedana, ako svaki tjedan prikupi m salveta?

a) $137mt$ b) $137+mt$ c) $137m+t$ d) $137+m+t$

14. Za koju vrijednost n izraz $\frac{5n}{2n-1}$ nije definiran?

a) 1 b) 0 c) $-\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}$

Sustavi jednadžbi

Sustav dviju linearnih jednadžbi s dvjema nepoznanicama ima oblik:

$$\begin{cases} ax + by = e \\ cx + dy = f. \end{cases}$$

Rješenje sustava čine oni parovi (x, y) koji zadovoljavaju i jednu i drugu jednadžbu.

Ove dvije jednadžbe možemo smatrati jednadžbama pravaca. Ako se pravci sijeku u jednoj točki, sustav ima jedinstveno rješenje $\frac{a}{c} \neq \frac{b}{d}$.

Sustav nema rješenja ako su pravci usporedni, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} \neq \frac{e}{f}$.

U slučaju kada se pravci podudaraju (isti pravac zadan različitim jednadžbama), sustav ima beskonačno mnogo rješenja i takav sustav zovemo neodređen sustav, $\frac{a}{c} = \frac{b}{d} = \frac{e}{f}$.

Primjer 7: Riješimo sustav jednadžbi.

$$\begin{cases} 2x - 5y = -5 \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

Rješenje: Pomnožimo prvu jednadžbu s –2 i zbrojimo obje jednadžbe (metoda suprotnih koeficijenata).

$$\begin{cases} 2x - 5y = -5 \,/\cdot(-2) \\ 4x + 3y = 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} -4x + 10y = 10 \\ 4x + 3y = 3 \end{array}\right\} +$$

$$\Rightarrow 13y = 13 \Rightarrow y = 1$$

Uvrstimo dobivenu vrijednost za y u drugu jednadžbu.

$4x + 3 \cdot 1 = 3 \Rightarrow 4x = 0 \Rightarrow x = 0$

Rješenje sustava je $(x, y) = (0, 1)$.

Primjer 8: Riješimo sustav jednadžbi.

$$\begin{cases} 2x - y = -2 \\ 4x + 3y = \frac{33}{5} \end{cases}$$

Rješenje: Sustav jednadžbi možemo rješavati i nekim drugim metodama. Uočimo da iz prve jednadžbe možemo nepoznanicu y prikazati pomoću x, $y = 2x + 2$, te ju uvrstimo u drugu jednadžbu (metoda supstitucije).

$$4x+3(2x+2)=\frac{33}{5}$$

$$4x+6x+6=\frac{33}{5}$$

$$10x=\frac{3}{5}$$

$$x=\frac{3}{50}$$

Uvrstimo dobivenu vrijednost za x u jednadžbu $y=2x+2$ i dobivamo

$$y=2\cdot\frac{3}{50}+2 \Rightarrow y=\frac{53}{25}.$$

Rješenje sustava je $\left(\frac{3}{50}, \frac{53}{25}\right)$.

Primjer 9: Riješimo sustav jednadžbi.

$$\begin{cases} 4x-3y=3 \\ -8x+6y=-6 \end{cases}$$

Rješenje: Pomnožimo prvu jednadžbu s 2 i zbrojimo obje jednadžbe.

$$\begin{cases} 4x-3y=3 \,/\cdot 2 \\ -8x+6y=-6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 8x-6y=6 \\ -8x+6y=-6 \end{cases}\right\}+$$

$$\Rightarrow \quad 0=0$$

Sustav ima beskonačno mnogo rješenja (neodređen sustav).

Primjer 10: Riješimo sustav jednadžbi.

$$\begin{cases} 4x-3y=5 \\ -8x+6y=-6 \end{cases}$$

Rješenje: Pomnožimo prvu jednadžbu s 2 i zbrojimo obje jednadžbe:

$$\begin{cases} 4x-3y=5 \,/\cdot 2 \\ -8x+6y=-6 \end{cases}$$

$$\left.\begin{cases} 8x-6y=10 \\ -8x+6y=-6 \end{cases}\right\}+$$

$$0=4$$

Sustav nema rješenja (nemoguć sustav).

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

15. (NI 2006.) Riješite sustav jednadžbi. $\begin{cases} 4x+5y=20 \\ y=\frac{1}{2}x-2 \end{cases}$

16. (IK 2006.) Riješite sustav. $\begin{cases} 2x+5y=-1 \\ 3x-4y=33 \end{cases}$

17. (IK 2006.) Riješite sustav. $\begin{cases} x-y=3 \\ 3x-y=4 \end{cases}$

18. (NI 2007.) U rješenju sustava jednadžbi $\begin{cases} 2x+y=32 \\ -2x+3y=40 \end{cases}$ nepoznanica x jednaka je:

a) 18 b) 12 c) 7 d) 4.

19. (NI 2007.) Napišite neki uređeni par realnih brojeva (a, b) tako da bude $10^a = b - 3$.

20. (NI 2008) Nepoznanica y iz sustava $\begin{cases} 3x+4y+5=0 \\ 7x-8y+16=0 \end{cases}$ jednaka je:

a) 3 b) $\frac{1}{4}$ c) $-\frac{1}{4}$ d) –3.

21. (NI 2008.) Za brojeve a i b vrijedi $a:b=3:4$, $a+b=21$. Odredite a.

22. (NI 2008.) Neka je $x^2-y^2=75$ i $x+y=15$.

a) Koliko je $x-y$?

b) Koliko je $2x-2y+1$?

23. (NI 2008.) Broj a je za 3 veći od pozitivnoga broja b. Njihov je omjer $5:3$. Tada je a jednak:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{9}{2}$ c) $\frac{15}{2}$ d) $\frac{21}{2}$.

24. (NI 2008.) Sustav $\begin{cases} (a+3)x-3y=-1 \\ 8x+12y=4 \end{cases}$ ima beskonačno mnogo rješenja ako je:

a) $a=-5$ b) $a=-1$ c) $a=1$ d) $a=5$.

25. (NI 2009.) Riješite sustav jednadžbi. $\begin{cases} 5x+4y=24 \\ -3x+6y=15 \end{cases}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

15. U nekom kavezu su zečevi i patke. Ako znamo da u kavezu ima 35 glava i 94 noge, onda je broj zečeva:

a) 10 b) 17 c) 18 d) 12.

16. Na nekom natjecanju svaki od sudionika dobio je 40 pitanja. Za svaki dobar odgovor natjecatelj dobiva 5 bodova, a za svako neodgovoreno ili pogrešno odgovoreno pitanje gubi 3 boda. Na koliko je pitanja odgovorio točno natjecatelj koji je dobio 136 bodova?

a) 32 b) 18 c) 29 d) 35

17. Otac ima onoliko godina koliko i oba sina zajedno. Prije četiri godine imao je dvaput više od starijeg, a prije deset godina triput više od mlađeg. Koliko godina ima otac?

a) 44 b) 32 c) 52 d) 48

18. Automobil u gradskoj vožnji troši 11 litara benzina na 100 km, a u vožnji na otvorenoj cesti 7 litara na 100 km. Spremnik od 51.2 litre benzina potrošen je nakon 600 km. Koliko je kilometara automobil prešao u gradskoj vožnji?

a) 230 km b) 400 km c) 370 km d) 320 km

19. U nekom dvoznamenkastom broju znamenka jedinica tri puta je veća od znamenke desetica. Ako se tom broju doda 36, dobije se broj zamijenjenih znamenki. Umnožak kvadrata znamenki polaznog broja je:

a) 91 b) 100 c) 125 d) 144.

20. Bazen za vodu može se napuniti jednom cijevi za 3 sata, a drugom cijevi ispraznit za 4 sata. Ako se obje cijevi istodobno otvore, onda se bazen napuni za:

a) 12 sati b) 7 sati c) 10 sati d) 0 sati.

21. Majstor i učenik radeći zajedno obave posao za 5 dana. Učenik je radio na takvom poslu 10 dana. Nakon toga majstoru su trebala 4 dana da dovrši posao. Koliko puta brže od učenika taj posao obavlja majstor?

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3

22. Koliki mora biti parametar m da sustav jednadžbi $\begin{cases} mx+3y=1 \\ 2x-\sqrt{3}y=7 \end{cases}$ nema rješenja?

a) $2\sqrt{3}$ b) 3 c) -3 d) $-2\sqrt{3}$

23. Za koje vrijednosti parametra $a \in \boldsymbol{R}$ rješenje sustava

$$\begin{cases} -2x + y = a^2 - 1 \\ 3x + 2y = 2a^2 + 7a + 5 \end{cases}$$ zadovoljava uvjet $y < x + 2$?

a) $\langle -2, 1 \rangle$ b) $\langle -2, 0 \rangle$ c) $\langle 1, 2 \rangle$ d) $[-2, 0]$

24. Ako sustav $\begin{cases} 4x + my = 2 \\ 2mx + y = 3 \end{cases}$ nema rješenje, tada parametar m iznosi:

a) -4 b) ± 2 c) 4 d) $\pm\sqrt{2}$.

25. Za koju vrijednost parametra a sustav $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - ay = 10 \end{cases}$ nema rješenje?

a) 0 b) 3 c) -3 d) -6

26. Supstitucija $y = 2x - 1$ u jednadžbu $3x + y = 1$ daje:

a) $3x + 2x - 1 = 1$ b) $3x - 2x + 1 = 1$
c) $3x + 2x + 1 = 1$ d) $3x - 2x - 1 = 0$.

27. Koju vrijednost ima y koordinata rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + 4y = 7 \end{cases}$?

a) 1 b) -1 c) 3 d) 4

Problemski zadaci

Zadatak treba dobro pročitati, razumjeti te „prevesti“ problem na njegov matematički zapis (napisati jednadžbu) i riješiti ga. Svakako treba provjeriti rješenje!

Primjer 11: Ako podijelimo dva broja, dobit ćemo količnik 2 i ostatak 3, a ako zbroj tih dvaju brojeva podijelimo njihovom razlikom, dobit ćemo količnik 2 i ostatak 9. Koji su to brojevi?

Rješenje:

$x = 2y + 3$

$x + y = 2(x - y) + 9$

$2y + 3 + y = 2(2y + 3 - y) + 9$

$3y + 3 = 2y + 6 + 9 \quad \Rightarrow \quad y = 12, \; x = 27$

To su brojevi 12 i 27.

Provjera:

$27 : 12 = 2$ (3) $\quad 12 \cdot 2 + 3 = 27$

Primjer 12: Oduzmemo li od dvokratnika nekog broja 7 i tu razliku pomnožimo sa 2, dobivamo trokratnik tog broja umanjen za 4. Koji je to broj?

Rješenje:

$(2x - 7) \cdot 2 = 3x - 4$

$4x - 14 = 3x - 4$

$x = 10$

To je broj 10.

Provjera:

$(2 \cdot 10 - 7) \cdot 2 = 3 \cdot 10 - 4$

$13 \cdot 2 = 30 - 4$

$26 = 26$

Primjer 13: Miješajmo tri vrste kave po cijeni 40 kn/kg, 45 kn/kg i 48 kn/kg. Ako uzmemo 30 kg kave prve vrste i 20 kg kave druge vrste, koliko trebamo uzeti kave treće vrste kako bismo dobili mješavinu kave cijene 44 kn/kg?

Rješenje: x ... količina kave treće vrste

$$30 \cdot 40 + 20 \cdot 45 + x \cdot 48 = (30 + 20 + x)44$$

$$1\,200 + 900 + 48x = 2\,200 + 44x$$

$$48x - 44x = 100 \quad \Rightarrow \quad 4x = 100 \quad \Rightarrow \quad x = 25$$

Trebamo uzeti 25 kg kave treće vrste.

Primjer 14: U tri škole ima ukupno 2 700 učenika. U tehničkoj školi ih je dvostruko više nego u gimnaziji, a u obrtničkoj za 50 manje nego u tehničkoj. Koliki je broj učenika u najvećoj od ovih triju škola?

Rješenje: x ... broj učenika u gimnaziji

y ... broj učenika u tehničkoj školi

z ... broj učenika u obrtničkoj školi

Zapišimo zadani sustav jednadžbi.

$$x + y + z = 2\,700$$

$$y = 2x$$

$$z = y - 50 \quad \Rightarrow \quad z = 2x - 50$$

Iz prve jednadžbe slijedi:

$$x + 2x + 2x - 50 = 2\,700$$

$$5x = 2\,750$$

$$x = 550.$$

Nadalje, $y = 2 \cdot 550 = 1100$, $z = 1100 - 50 = 1050$.

U tehničkoj školi je najviše učenika, 1100.

Primjer 15: Putnik je iz sela krenuo prema željezničkoj stanici. Prvi sat je išao brzinom od 3 km/h, ali je tada izračunao da bi, krećući se i dalje tom brzinom, zakasnio na vlak 40 minuta. Zato je ostali dio puta prešao brzinom od 4 km/h i došao na stanicu 45 minuta prije polaska vlaka. Kolika je udaljenost od sela do željezničke stanice?

Rješenje: Očito je da je za prvih sat vremena prešao 3 km, pa uzmimo za jednu nepoznanicu duljinu puta od tog trenutka (nakon prijeđena 3 km) do željezničke stanice d, a drugu udaljenost od sela do željezničke stanice d_u.

1. Prvi sat išao je brzinom od 3 km/h: $d_u = d + 3$.
2. Ako bi nastavio tom brzinom, zakasnio bi na vlak 40 minuta, što je $\frac{2}{3}$ h.

(Želimo li uspoređivati dvije veličine, one moraju biti izražene u istim mjernim jedinicama, u ovom slučaju u

satima (vrijeme), a vrijeme ćemo dobiti kao omjer puta i prosječne brzine $\frac{d}{3}$).

$\frac{d}{3}-\frac{2}{3}$

3. Ostali dio puta prešao je brzinom od 4 km/h i stigao 45 minuta ranije, što je $\frac{3}{4}$ h.

$\frac{d}{4}+\frac{3}{4}$

Put koji je prešao od trenutka kad je odlučio ići većom brzinom isti je u oba slučaja, pa naša jednadžba glasi:

$$\frac{d}{3}-\frac{2}{3}=\frac{d}{4}+\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad d=17.$$

Iz toga jednostavno saznajemo da je $d_u = d+3 = 17+3 = 20$.
Udaljenost od sela do željezničke stanice iznosi 20 km.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

26. (IK 2006.) Računalo s monitorom stoji 4 200 kn. Cijena monitora je $\frac{2}{7}$ ukupne cijene. Kolika je cijena računala?

27. (NI 2008.) Autobusi A i B na početku radnoga vremena zajedno kreću s polazne stanice. Autobus A svake 72 minute ponovno kreće s polazne stanice, a autobus B svake 42 minute. Nakon koliko će minuta autobusi ponovno krenuti s polazne stanice zajedno?

28. (NI 2008.) Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza. Omjer nikla prema željezu je 1:19. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g. Koliko je grama željeza potrebno za izradu jedne kovanice od 50 lipa? (Rezultat ne zaokružujte)

Varijanta više razine

Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza. Omjer nikla prema željezu je 1:19. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g, njezin promjer je 20.5 mm, a gustoća slitine 6.912 g/cm^3.

a) Koliko je grama željeza potrebno za izradu jedne kovanice od 50 lipa? (Rezultat ne zaokružujte.)

b) Odredite debljinu kovanice od 50 lipa. (Gustoća slitine je omjer mase i obujma, $\rho = \frac{m}{V}$)

29. (NI 2009.) Ana, Cvita i Ivan zajedno su igrali novčanu nagradnu igru. Dogovorili su se oko podjele nagrade ukoliko je osvoje. Ana će dobiti dvije petine nagrade, od ostatka trećinu će dobiti Cvita, a sve ostalo pripada Ivanu.

a) Koji će dio nagrade dobiti Cvita? Odgovor napišite u obliku razlomka.
b) Koliki postotak nagrade pripada Ivanu?

30. (NI 2009.) Marija je za sedamnaesti rođendan dobila na dar buket od 17 bijelih i crvenih ruža. Cijena bijele ruže je 8 kn, a crvene 9 kn. Koliko je u buketu bilo crvenih, a koliko bijelih ruža ako je buket plaćen 142 kn?

31. (NI 2009.) Stranice pravokutnika na zemljovidu mjerila 1 : 50 000 iznose 1.5 cm i 2 cm. Kolika je površina koju taj pravokutnik predočuje u prirodi?

a) 150 000 m^2 b) 300 000 m^2 c) 600 000 m^2 d) 750 000 m^2

32. (NI 2009.) Zbroj dvaju cijelih brojeva je 96, a njihova je razlika 60. Jedan od tih brojeva je:

a) 68 b) 73 c) 78 d) 86.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

28. Koliko stranica ima knjiga, ako je student prvog dana pročitao 40% stranica knjige, drugog dana $\frac{2}{3}$ ostatka, a trećeg dana preostalih 22 stranice?

a) 110 b) 90 c) 120 d) 115

29. Prilikom rješavanja jednog zadatka iz matematike, 12% učenika nije riješilo zadatak, 32% učenika djelomično je riješilo zadatak, a ostatak od 14 učenika je zadatak točno riješio. Koliko je učenika bilo u razredu?

a) 21 b) 22 c)23 d) 25

30. Neka svota umanji se za 20%, a zatim se dobivena svota poveća za 50%. Koliko je ukupno povećanje od početnog stanja?

a) 20% b) 25% c) 30% d) 35%

31. Cijena robe povišena je za 25%. Za koliko je postotaka potrebno smanjiti novu cijenu da bi se dobila stara cijena?

a) 20% b) 25% c) 28% d) 30%

32. Ako svježe grožđe sadrži 90% vode, sušeno 12%, koliko se sušenog grožđa može dobiti od 22 kg svježeg?

a) 2.4 kg b) 3 kg c) 2.5 kg d) 2 kg

33. Koliko litara vode treba dodati u 30 litara 90-postotnog alkohola da bi se dobio 80-postotni alkohol?

a) 2.65 b) 3.65 c) 2.75 d) 3.75

34. Polovinu puta između gradova A i B automobil je vozio brzinom 50 km/h, a drugu polovinu puta brzinom 80 km/h. Njegova prosječna brzina na cijelom je putu bila:

a) 65 km/h b) 61.54 km/h c) 60 km/h d) 63.25 km/h.

35. Koliki kut zatvaraju velika i mala kazaljka na satu u 10 sati i 15 minuta?

a) 145° b) 150° c) 142° 50’ d) 142° 30’

36. Ako je h broj, koja jednadžba predstavlja izraz: „Šezdeset više od deveterostrukog broja je 375“?

a) $9h = 375$ b) $9h - 60 = 375$
c) $9h + 60 = 375$ d) $60h + 9 = 375$

37. Profesor Matematikić kupio je x pernica. U svakoj pernici je 25 olovaka. Ostavio je 3 pernice kod kuće, a ostatak je odnio u školu. Koji od sljedećih izraza predstavlja broj svih olovaka koje je odnio u školu?

a) $22x$ b) $25x - 3$ c) $25 - 3x$ d) $25x - 75$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Ako Društvo izviđača *Zagreb* pošalje na Sljeme osminu ukupnog broja članstva, u Divlje vode polovinu, a na Plješivicu šestinu, u Zagrebu još ostaje 1 000 članova. Koliko članova ima Društvo izviđača *Zagreb*?

2. Za 12 olovaka i gumica učenik je platio ukupno 11 kuna. Cijena svake olovke je 80 lipa, a svake gumice 1 kunu. Koliko je kupio olovaka, a koliko gumica?

3. Koji broj moramo oduzeti od brojnika i dodati nazivniku razlomka $\frac{19}{5}$ kako bi on bio jednak svojoj recipročnoj vrijednosti?

4. Mirna i Igor klade se za 60 kuna. Dobije li okladu Mirna, imat će tri puta više kuna od Igora, a dobije li okladu Igor, imat će dva puta više kuna od Mirne. Koliko kuna ima Mirna, a koliko Igor?

5. Koliko kuna ima Tanja ako bi uz još toliko i još polovinu svote i još četvrtinu svote i još 1 kunu imala točno 100 kuna?

6. Dario ima 350 kuna i to u novčanicama od po 5 i 10 kuna. Koliko ima kojih novčanica ako ukupno ima 50 novčanica?

7. Kad bi svaki učenik u razredu sjedio sam u svojoj klupi, nedostajalo bi 11 klupa. Kad bi sjedila dvojica u klupi, 5 bi klupa bilo suvišnih. Koliko je u razredu učenika, a koliko klupa?

8. Prije 10 godina otac je od sina bio stariji 10 puta, a za 22 godine bit će samo dvostruko stariji. Koliko je godina ocu, a koliko sinu?

9. Ako se pri rješavanju jednadžbe nepoznanica reducira i dobijemo istinitu jednakost, kažemo da jednadžba _____

_____ .

10. Ako se pri rješavanju jednadžbe nepoznanica reducira i ne dobijemo istinitu jednakost, kažemo da jednadžba _____

_____ .

11. Dva trkača kreću s istog mjesta i u isto vrijeme na suprotne strane brzinama od 7 m/s i 8 m/s. Nakon koliko će vremena biti udaljeni 16 km?

12. Nogometnu utakmicu gleda 4 730 gledatelja. Neki su od njih platili ulaznice po 150 kuna, a neki po 90 kuna. Ako je prodano ulaznica ukupne vrijednosti 517 200 kuna, koliko je prodano skupljih, a koliko jeftinijih ulaznica?

13. *IQ* (kvocijent inteligencije) veza je između mentalne (M) i starosne (S) dobi. Za djecu ta je relacija dana formulom $IQ = \frac{100M}{S}$.

a) Izračunajte *IQ* dvanaestogodišnjeg djeteta za koje je utvrđeno da je njegova mentalna dob 15.

b) Izračunajte *IQ* petnaestogodišnjeg djeteta za koje je utvrđeno da je njegova mentalna dob 12.

c) Kolika je mentalna dob dječaka od 15 godina čiji je $IQ = 140$?

14. U formuli $C = \frac{62\,000\,d + 9\,m}{100}$ kojom se računa cijena unajmljivanja automobila, d predstavlja broj dana unajmljivanja, a m predstavlja broj prijeđenih kilometara.

a) Ako je Ljiljana unajmila automobil kako bi otputovala na 3 dana u Crikvenicu i pri tome prešla 420 km, koliko je platila za unajmljivanje automobila?

b) Ljiljani je potreban auto za odlaske na razgovore za posao na različitim lokacijama. Ako je proputovala 1100 km za 15 dana, koliko ju je stajalo unajmljivanje?

c) Tanja je javila Ljiljani kako je pronašla drugu agenciju za unajmljivanje koja obračun radi po formuli $C = \frac{61\,000\,d + 16\,m}{100}$. Je li ova agencija cijenom povoljnija od prethodne?

d) Ljiljana je ipak unajmila auto na 4 dana u prvoj agenciji i platila 2 500 kuna. Koliko je kilometara prešla?

e) Ljiljana je ponovno unajmila auto u prvoj agenciji i napravila 480 km, a za unajmljivanje platila 1 283.2 kune. Koliko dana je koristila auto?

15. Jadranka je napustila svoj ured u 8 sati i 30 minuta kako bi otišla na poslovni razgovor u centar grada. Razgovor je trajao 45 minuta. Odmah nakon razgovora vratila se istim putem ravno u ured u 10 sati i 25 minuta. Ako je na putu prema centru grada vozila prosječno 45 km/h, a u povratku 60 km/h, koliko je njezin ured udaljen do centra grada?

16. Obrok koji se sastoji od pršuta, sira i mliječnog napitka sadrži 217 kJ. Ako pršut sadrži 30 kJ više od sira, a sir 14 kJ više od mliječnog napitka, koliko kJ sadrži svaka namirnica?

17. Jedna milja je približno 1.6 km.

a) Ako putujete 263 milje, koliko ste prešli kilometara?
b) Ako putujete 420 km, koliko ste milja prešli?

18. U poduzeću *Zdrav čovjek* tijekom jednog mjeseca zbog bolesti ili nesreće nekih zaposlenika izgubi se ukupno 56 radnih dana. Ako je broj izgubljenih dana zbog nesreće za 11 veći od dvostrukog broja izgubljenih dana zbog bolesti, koliko je dana izgubljeno zbog bolesti?

19. Riješite jednadžbu $P = \frac{1}{2}v(b+c)$ po b (tj. izrazite b).

20. Odredite r iz jednadžbe $i = \frac{prm}{12}$.

21. Izrazite nepoznanicu P_2 iz jednadžbe $P = n(P_2 - P_1) - c$.

22. Riješite jednadžbu $s = \frac{1}{2}gt^2 - vt$ po g.

23. Riješite jednadžbe.

a) $2(x-2) + x^2 = x(x-2)$ b) $(x-1)^2 = x(x+2)$ c) $\frac{3+x}{5x-2} = 2$

24. Cijena dječjih karata za teniski turnir je 64 kune, a za odrasle 120 kuna. Ako je na turniru 400 gledatelja, a za karte je naplaćeno 36 800 kuna, odredite koliko je na turniru bilo djece, a koliko odraslih.

25. Riješite sustave jednadžbi.

a) $\begin{cases} 4x - y = 9 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y = x + 2 \\ 3x - y = -4 \end{cases}$ c) $\begin{cases} 4x + 3y = -2 \\ 2x + 7y = -12 \end{cases}$

26. Dvije ruže i 3 karanfila stoje 49 kuna i 60 lipa, a 3 ruže i 2 karanfila 68 kuna. Kolika je cijena jednog karanfila?

27. Riješite jednadžbu $F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$ ako je nepoznanica:

a) G b) m_1 c) m_2.

28. U našoj školi održan je dobrotvorni koncert. Zarada od ulaznica je 930 kuna. Ulaznice su u pretprodaji bile po 3.5 kune, a na sam dan koncerta 5 kuna. Ako je prodano ukupno 225 ulaznica, koliko je ulaznica prodano na dan koncerta?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. b **2.** $x = \frac{22}{5}$ **3.** d **4.** a **5.** d **6.** c **7.** b

8. $x = 4$ **9.** $x = \frac{5}{4}$ **10.** $a = \frac{p - bv}{b + v}$ **11.** $x = \frac{1}{2}$ **12.** a **13.** $x = -\frac{7}{4}$ **14.** b

15. $x = \frac{60}{13}$, $y = \frac{4}{13}$ **16.** $(7, -3)$ **17.** $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$ **18.** c **19.** (0, 4), (1, 13),...

20. b **21.** $a = 9, b = 12$ **22.** a) 5 b) 11 **23.** c **24.** a

25. $\left(2, \frac{7}{2}\right)$ **26.** 3 000 **27.** 504 minute

28. a) 3.4675 g b) $0.1599895 \approx 0.16$ cm

29. a) $\frac{1}{5}$ b) 40%

30. U buketu je bilo 6 crvenih i 11 bijelih ruža.

31. d **32.** c

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a) NE b) DA c) NE d) DA

2. d	**3.** d	**4.** c	**5.** d	**6.** c	**7.** b	**8.** a	**9.** b	**10.** d
11. d	**12.** b	**13.** b	**14.** d	**15.** d	**16.** a	**17.** c	**18.** a	**19.** d
20. a	**21.** b	**22.** d	**23.** a	**24.** d	**25.** d	**26.** a	**27.** a	**28.** a
29. d	**30.** a	**31.** a	**32.** c	**33.** d	**34.** b	**35.** d	**36.** c	**37.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. U Društvu izviđača *Zagreb* je 4 800 članova.
2. Učenik je kupio 7 gumica i 5 olovaka.
3. 14
4. Mirna ima 48 kuna, a Igor 36 kuna.
5. Tanja ima 36 kuna.
6. Dario ima 30 novčanica od 5 kuna i 20 novčanica od 10 kuna.
7. U razredu je 32 učenika i 21 klupa.
8. Sin ima 14, a otac 50 godina.
9. Beskonačno mnogo rješenja ili da je neodređena.
10. Nema rješenja.
11. Nakon 18 minuta i 19 sekundi (0.3053 sata)
12. Prodano je 1 525 ulaznica po 150 kuna i 3 205 ulaznica po 90 kuna.
13. a) $IQ_{(12)} = 125$ b) $IQ_{(15)} = 80$ c) $M = 21$

14. a) Ljiljana je platila za unajmljivanje automobila 1 897.6 kuna.
b) Ljiljana je platila za unajmljivanje automobila 9 399 kuna.
c) U drugoj agenciji je u slučaju a) cijena 1 897.2 kune, a u slučaju b) 9 326 kuna. To znači da je druga agencija isplativija.
d) Ljiljana je prešla 222 km.
e) Ljiljana je koristila auto 2 dana.

15. Ured je od centra grada udaljen 30 km.

16. Pršut sadrži 97 kJ, sir 67 kJ, a mliječni napitak 53 kJ .

17. a) 420.8 km
b) 262.5 milje

18. Zbog bolesti je izgubljeno 15 dana.

19. $b = \dfrac{2P - vc}{v}$

20. $r = \dfrac{12i}{pm}$

21. $P_2 = \dfrac{P + nP_1 + c}{n}$

22. $g = \dfrac{2(s + vt)}{t^2}$

23. a) $x = 1$
b) $x = \dfrac{1}{4}$
c) $x = \dfrac{7}{9}$

24. Na turniru je 200 djece i 200 odraslih.

25. a) (2, –1)
b) (–1, 1)
c) (1, –2)

26. Cijena jednog karanfila je 2 kune i 56 lipa.

27. a) $G = \dfrac{Fr^2}{m_1 m_2}$
b) $m_1 = \dfrac{Fr^2}{Gm_2}$
c) $m_2 = \dfrac{Fr^2}{Gm_1}$

28. Na ulazu je prodano 95 ulaznica.

2.2.3. Linearna nejednadžba

Za svaka dva realna broja a i b vrijedi ili $a < b$ ili $a > b$ ili $a = b$.
Broj a manji je od broja b ako i samo ako je $a - b < 0$.
Ako su a, b i c realni brojevi, onda iz $a < b$ i $b < c$ slijedi $a < c$.

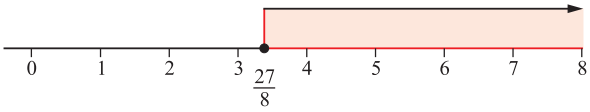
Primjer 1: Riješimo nejednadžbu: $1\frac{1}{4} \le \frac{2}{3}x - 1$.

Rješenje: $1\frac{1}{4} \le \frac{2}{3}x - 1$

$$-\frac{2}{3}x \le -1 - \frac{5}{4} \;/\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$x \ge -\frac{9}{4}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)$$

$$x \ge \frac{27}{8}$$



$$x \in \left[\frac{27}{8}, +\infty\right\rangle$$

Primjer 2: Riješimo nejednadžbu: $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x+6}{6}\right) > \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Rješenje: $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{x+6}{6}\right) > \frac{1}{3}\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right) \;/\cdot 6$

$$3\left(1 - \frac{x+6}{6}\right) > 2\left(\frac{x}{2} - \frac{2}{3}\right)$$

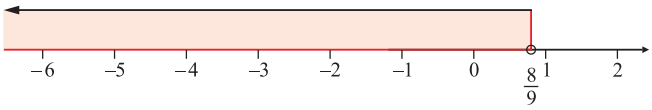
$$3 - \frac{x+6}{2} > x - \frac{4}{3} \;/\cdot 6$$

$$\cancel{18} - 3x \cancel{-18} > 6x - 8$$

$$-3x - 6x > -8$$

$$-9x > -8 \;/:(-9)$$

$$x < \frac{8}{9}$$



$$x \in \left\langle -\infty, \frac{8}{9}\right\rangle$$

Sustavi nejednadžbi

Riješiti sustav dviju nejednadžbi znači naći sva zajednička rješenja obiju nejednadžbi. Rješenje sustava je presjek intervala rješenja obiju nejednadžbi.

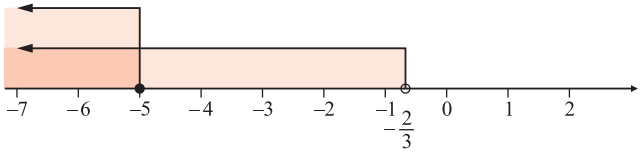
Primjer 3: Riješimo sustav nejednadžbi: $\begin{cases} \frac{x-3}{4} \geq x+3 \\ \frac{4-x}{2} > x+3. \end{cases}$

Rješenje: $\frac{x-3}{4} \geq x+3 \,/\cdot 4 \quad \Rightarrow \quad x-3 \geq 4x+12$

$$-3x \geq 15 \quad \Rightarrow \quad x \leq -5$$

$$\frac{4-x}{2} > x+3 \,/\cdot 2 \quad \Rightarrow \quad 4-x > 2x+6$$

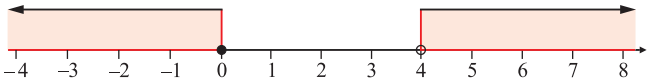
$$-3x > 2 \quad \Rightarrow \quad x < -\frac{2}{3}$$



Brojevi koji su istovremeno manji ili jednaki –5 i manji od $-\frac{2}{3}$ su rješenje sustava. Rješenje je $x \in \langle -\infty, -5]$.

Primjer 4: Riješimo sustav nejednadžbi: $\begin{cases} \frac{5-2x}{2} \geq \frac{10-x}{4} \\ \frac{x+0.5}{3} > \frac{10-x}{4} \end{cases}$.

Rješenje: $\begin{cases} \frac{5-2x}{2} \geq \frac{10-x}{4} \\ \frac{x+0.5}{3} > \frac{10-x}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 10-4x \geq 10-x \\ 4x+2 > 30-3x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x \leq 0 \\ 7x > 28 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 0 \\ x > 4 \end{cases}$



Brojevi koji su istovremeno manji ili jednaki 0 i veći od 4 su rješenje sustava. Zaključujemo, sustav nema rješenja, $x \in \varnothing$.

Nejednadžbe koje se svode na linearne

Primjer 5: Riješimo nejednadžbu: $\frac{4}{x-2} > 1$.

Rješenje: $\frac{4}{x-2} > 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{4-(x-2)}{x-2} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{6-x}{x-2} > 0$

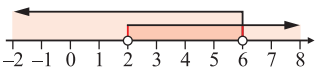
Nejednadžbu možemo riješiti uspoređujući pozitivne i negativne vrijednosti brojnika i nazivnika.

Promatramo dva slučaja (pozitivan broj pri dijeljenju dvaju brojeva daju brojevi istih predznaka, uz uvjet da nazivnik ne može biti nula).

I. slučaj

$6-x>0 \quad \text{i} \quad x-2>0$

$x<6 \quad \text{i} \quad x>2$

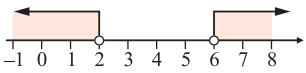


$x \in \langle 2, 6 \rangle$

II. slučaj

$6-x<0 \quad \text{i} \quad x-2<0$

$x>6 \quad \text{i} \quad x<2$



$x \in \varnothing$

Konačno rješenje dobivamo kao uniju tih dvaju rješenja: $x \in \langle 2, 6 \rangle$.

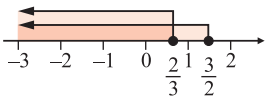
Primjer 6: Riješimo nejednadžbu: $(2x-3)(2-3x) \le 0$.

Rješenje: Ovakvu nejednadžbu rješavamo slično kao u prethodnom primjeru, ali bez uvjeta.

I. slučaj

$2x-3 \le 0 \quad \text{i} \quad 2-3x \ge 0$

$x \le \frac{3}{2} \quad \text{i} \quad x \le \frac{2}{3}$

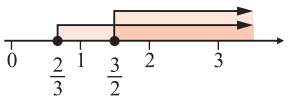


$x \le \frac{2}{3}$

II. slučaj

$2x-3 \ge 0 \quad \text{i} \quad 2-3x \le 0$

$x \ge \frac{3}{2} \quad \text{i} \quad x \ge \frac{2}{3}$



$x \ge \frac{3}{2}$

Rješenje nejednadžbe je unija dobivenih rješenja:

$x \in \left\langle -\infty, \frac{2}{3} \right] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$.

Primjer 7: Riješimo nejednadžbu: $\frac{x^2+4}{2-x} \le 0$.

Rješenje: Kod ovako zadanih nejednadžbi odmah uočavamo kako je brojnik pozitivan broj za svaki izbor realnog broja x, te zaključujemo da nazivnik mora biti negativan kako bi cijeli izraz bio negativan. U ovom slučaju izraz ne može biti jednak nuli.

Zadatak se svodi na rješavanje nejednadžbe:

$2-x<0 \quad \Rightarrow \quad x>2 \quad \Rightarrow \quad x \in \langle 2, +\infty \rangle$.

Sve nejednadžbe oblika umnoška ili dijeljenja izraza koji sadrže nepoznanicu možemo rješavati testirajući predznake izraza pomoću tzv. tablica.

Primjer 8: Riješimo nejednadžbu: $\frac{3-x}{2x+5} > 1$.

Rješenje: Kako bismo riješili nejednadžbu koristeći tablicu, najprije moramo nejednadžbu napisati tako da s desne strane dobijemo nulu.

$$\frac{3-x}{2x+5} - 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3-x-2x-5}{2x+5} > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3x-2}{2x+5} > 0$$

Izrazima koje ćemo uspoređivati (brojnik i nazivnik), trebamo pronaći nultočke.

$$-3x-2=0 \ \Rightarrow \ x=-\frac{2}{3} \qquad 2x+5=0 \ \Rightarrow \ x=-\frac{5}{2}$$

Nacrtamo tablicu u koju ćemo upisivati predznake.

U prvi redak tablice upisujemo nultočke poredane po veličini, počevši od $-\infty$, a završivši sa $+\infty$ (taj red predstavlja sve realne brojeve).

U prvi stupac upisujemo izraze koje uspoređujemo.

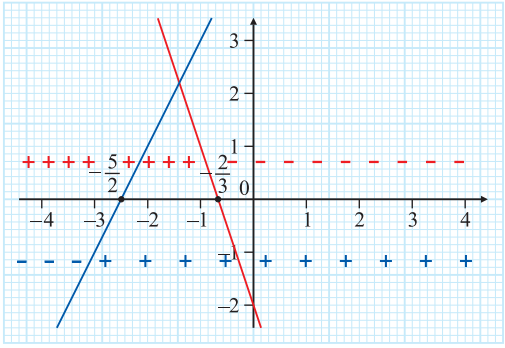
	$-\infty$	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{2}{3}$	$+\infty$
$-3x-2$	+	+	–	
$2x+5$	–	+	+	
$\frac{-3x-2}{2x+5}$	–	$\oplus$	–	

Predznake izraza računamo tako da izaberemo jedan broj iz prvog intervala $\left\langle -\infty, -\frac{5}{2} \right\rangle$ i uvrštavamo u prvi i drugi izraz. U tablicu upisujemo samo + (ako je vrijednost izraza pozitivna) ili – (ako je vrijednost izraza negativna). Isti postupak ponovimo i na ostalim intervalima.

U posljednji redak upisujemo predznak rezultata dijeljenja. Nejednadžba mora biti pozitivna, tako da u posljednjem retku tražimo predznak + i taj interval čitamo kao rješenje $\oplus$.

Rješenje nejednadžbe je $x \in \left\langle -\frac{5}{2}, -\frac{2}{3} \right\rangle$.

Zadatak smo mogli riješiti i grafički tako da nacrtamo pravce $y=-3x-2$ i $y=2x+5$, a zatim odredimo gdje su njihove vrijednosti pozitivne odnosno negativne. Raspored predznaka je isti kao u tablici.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Kojoj je nejednadžbi rješenje $[2.5,\ +\infty\rangle$?

a) $5x - 2 \geq 0$ b) $2x - 5 \geq 0$ c) $5x - 2 < 0$ d) $2x - 5 > 0$

2. (IK 2006.) Koliko cijelih brojeva zadovoljava uvjet $2 \leq \frac{x+5}{2} < 4$?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6

3. (IK 2006.) Koliko cijelih brojeva zadovoljava uvjet $4 \leq x + 5 < 8$?

a) 3 b) 4 c) 5 d) 8

4. (NI 2007.) Skupu svih rješenja nejednadžbe $3 - 2x < 0$ pripada broj:

a) 2 b) 1 c) -1 d) -2

5. (NI 2008.) Riješite nejednadžbu $3(2 + x) > 2$.

6. (NI 2009.) Koji je interval rješenje nejednadžbe $1 - 2x < 3$?

a) $\langle 1,\ +\infty\rangle$ b) $\langle -\infty,\ -1\rangle$ c) $\langle -1,\ +\infty\rangle$ d) $\langle -\infty,\ 1\rangle$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{1-x}{x} > 0$ je:

a) $x < 1$ b) $x < -1$ c) $0 < x < 1$ d) $x < 0$.

2. Neka je S skup rješenja nejednadžbe $3x - 1 > 2$, a T skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{x-1}{2x-3} < 0$. Onda je:

a) $S = \emptyset$ b) $T = \emptyset$ c) $S \setminus T = \emptyset$ d) $T \setminus S = \emptyset$.

3. Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{2x-4}{x+3} > 0$ je skup:

a) $\langle -\infty,\ 2\rangle$ b) $\langle -\infty,\ 3\rangle$

c) $\langle -3,\ +\infty\rangle$ d) $\langle -\infty,\ -3\rangle \cup \langle 2,\ +\infty\rangle$.

4. Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{x^2+11}{(x-3)(x+1)} > 0$ je skup:

a) $\langle -\infty,\ -2\rangle \cup \langle -1,\ +\infty\rangle$ b) $\langle -\infty,\ -2\rangle \cup \langle 0,\ +\infty\rangle$

c) $\langle -10,\ 2\rangle \cup \langle 3,\ +\infty\rangle$ d) $\langle -\infty,\ -1\rangle \cup \langle 3,\ +\infty\rangle$.

5. Skup svih rješenja nejednadžbe $1 < \frac{2-x}{x+1} < 2$ je:

a) $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle$ b) $\langle 0, 1 \rangle$ c) $\left\langle 0, \frac{1}{2} \right]$ d) $\left[0, \frac{1}{2} \right]$.

6. Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{x+1}{x-3} < -1$ je:

a) $\langle -1, 3 \rangle$ b) $\langle 1, +\infty \rangle$ c) $\langle -\infty, 3 \rangle$ d) $\langle 1, 3 \rangle$.

7. Skup svih rješenja nejednadžbe $\frac{1}{x+1} \leq \frac{x}{x+1}$ je:

a) $\left[1, +\infty \right\rangle$ b) $\left\langle -1, 1 \right]$

c) $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \left[1, +\infty \right\rangle$ d) $\left\langle -\infty, -1 \right] \cup \left[1, +\infty \right\rangle$.

8. Rješenje nejednadžbe $\frac{x+1}{x+2} > \frac{x+3}{x+4}$ je interval:

a) $\langle -\infty, -4 \rangle$ b) $\langle -4, 0 \rangle$ c) $\langle -4, -2 \rangle$ d) $\langle -4, +\infty \rangle$.

9. Skup rješenja nejednadžbe $\frac{x^2 - x}{x-2} \geq x + 2$ jednak je:

a) $\left[0, 2 \right\rangle$ b) $\left\langle 2, 4 \right]$ c) $[3, 5]$ d) $\left\langle 2, 6 \right]$.

10. Koliko rješenja ima nejednadžba $-\frac{3}{2} \leq x < 4$ u skupu prirodnih brojeva?

a) 7 b) 5 c) 3 d) 2

11. Koja je od sljedećih tvrdnji za rješenja nejednadžbe $\frac{2}{x-4} \leq 0$ točna?

a) $x - 4 \geq 0$ b) $x - 4 \leq 0$ c) $x - 4 > 0$ d) $x - 4 < 0$

12. Koja je od sljedećih tvrdnji istinita?

a) Nejednadžba $2x > 2x - 1$ ima beskonačno mnogo rješenja.
b) Nejednadžba $2x > 2x - 1$ nema rješenja.
c) Nejednadžba $2x - 1 < 2x - 1$ ima beskonačno mnogo rješenja.
d) 2 je rješenje nejednadžbe $2x + 2 < 2x$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Riješite sustave nejednadžbi.

1. $\begin{cases} \frac{5+2x}{2} \geq \frac{10+x}{4} \\ \frac{x-0.5}{3} > \frac{10+x}{4} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} 3-\frac{1}{2}x<0 \\ \frac{1}{2}x+1 \geq 0 \end{cases}$ **3.** $\begin{cases} \frac{x-3}{4} \geq x+3 \\ \frac{4-x}{2} > x+3 \end{cases}$

Riješite nejednadžbe u skupu $\boldsymbol{R}$.

4. $\frac{3}{x-2}>1$ **5.** $\frac{2x+6}{7x-9}<1$ **6.** $\frac{2x-5}{6x-9}<2$

7. $\frac{x^2}{3-x}>0$ **8.** $\frac{2}{x-4} \geq 1$ **9.** $\frac{x-1}{2x-1} \leq \frac{1}{3}$

10. $\frac{x}{x+1}-\frac{x^2+1}{x^2-1}>\frac{1}{2}$ **11.** $x-4\left\{\frac{1}{4}x-7\left[\frac{9}{7}x-3\left(\frac{7}{3}x+1\right)\right]\right\} \leq 0$

12. $x^2(x-1)>0$ **13.** $x^2(x-1)<0$

14. Koliko rješenja ima nejednadžba $-3x+7 \geq -x+5$ u skupu prirodnih brojeva?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. b **2.** b **3.** b **4.** a **5.** $x>-\frac{4}{3}$ **6.** c

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** d **3.** d **4.** d **5.** a **6.** d
7. c **8.** c **9.** b **10.** c **11.** d **12.** a

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x \in \langle 4,+\infty \rangle$ **2.** $x \in \langle 6,+\infty \rangle$ **3.** $x \in \langle -\infty,-5]$

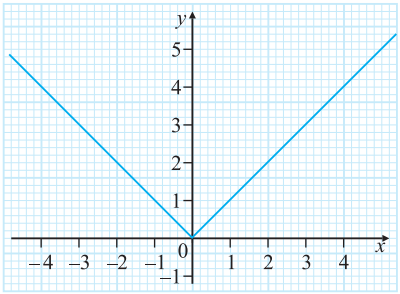
4. $x \in \langle 2,5 \rangle$ **5.** $x \in \left\langle -\infty,\frac{9}{7} \right\rangle \cup \langle 3,+\infty \rangle$ **6.** $x \in \left\langle -\infty,\frac{13}{10} \right\rangle \cup \left\langle \frac{3}{2},+\infty \right\rangle$

7. $x \in \langle -\infty,3 \rangle$ **8.** $x \in \langle 4,6]$ **9.** $x \in \left\langle \frac{1}{2},2 \right]$ **10.** $x \in \langle -1,1 \rangle$

11. $x \in \left[\frac{21}{40},+\infty \right\rangle$ **12.** $x \in \langle 1,+\infty \rangle$ **13.** $x \in \langle -\infty,1 \rangle \setminus \{0\}$ **14.** 1

2.3. Funkcija apsolutne vrijednosti

2.3.1. Funkcija apsolutne vrijednosti

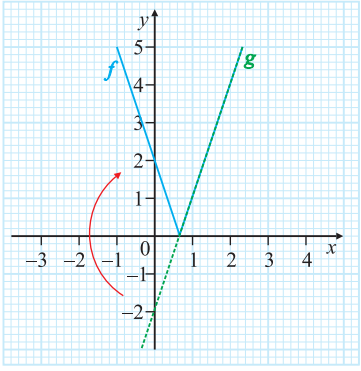


Funkcija apsolutne vrijednosti definirana je na sljedeći način:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & \text{ako je } x \geq 0 \\ -x, & \text{ako je } x < 0. \end{cases}$$

Domena funkcije je skup realnih brojeva, a slika skup pozitivnih realnih brojeva.
Graf se sastoji od dvaju polupravaca. Za pozitivne vrijednosti x graf je polupravac koji je dio pravca $y = x$, a za negativne vrijednosti od x je polupravac koji je dio pravca $y = -x$.
Graf je smješten iznad osi x, osim za $x = 0$, što znači da je $|x| \geq 0$ za sve realne brojeve. Funkcija je parna, $f(-x) = f(x)$, graf je simetričan s obzirom na os y. Na intervalu $\langle -\infty, 0 \rangle$ pada, a na intervalu $\langle 0, +\infty \rangle$ raste. U ishodištu postiže svoju najmanju vrijednost.

Primjer 1: Nacrtajmo graf $f(x) = |3x - 2|$.



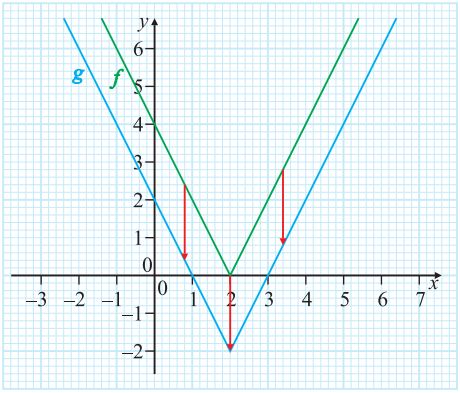
Rješenje: Nacrtajmo najprije graf (pomoćne) linearne funkcije $g(x) = 3x - 2$. Pronađimo nultočku pravca: $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Vidimo da je pravac ispod x-osi do nultočke i na tom intervalu su njegove vrijednosti negativne, a desno od nultočke pozitivne (njegove su vrijednosti iznad x-osi). Onaj dio pravca koji je ispod x-osi zrcalimo oko te osi kako bi dobio pozitivnu vrijednost. Pozitivni dio ne diramo jer apsolutna vrijednost pozitivnog realnog broja ostaje ista.

Primjer 2: Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x)=|-2x+4|$ i $g(x)=|-2x+4|-2$.

Rješenje: Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=|-2x+4|$.
Izračunajmo nekoliko vrijednosti obiju funkcija i usporedimo ih.

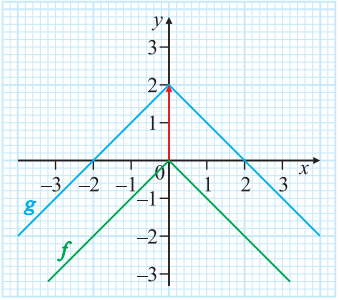
x	$f(x)$	$g(x)$
0	4	2
1	2	0
–1	6	4
2	0	–2
–2	8	6
3	2	0
–3	10	8

Vidimo da $g(x)$ dobivamo tako da vrijednosti $f(x)$ smanjujemo za 2. Znači da ćemo graf funkcije $g(x)$ dobiti tako da graf $f(x)$ spustimo za 2 jedinice po y-osi.



Primjer 3: Nacrtajmo graf funkcije $g(x)=-|x|+2$.

Rješenje: Crtamo graf funkcije $f(x)=-|x|$, a zatim ga pomičemo (translatiramo) za 2 jedinice prema gore po y-osi.



Primjer 4: Zapišimo funkciju f bez znakova apsolutne vrijednosti.

a) $f(x)=|4x-3|$ b) $f(x)=|4x-3|+4x-5$

Rješenje: a) Da bismo riješili zadatak, moramo znati je li izraz $4x-3$ pozitivan ili negativan.

Ako je $4x-3<0$ onda je $|4x-3|=-(4x-3)=3-4x$.

Ako je $4x-3\geq 0$ onda je $|4x-3|=4x-3$.

Zapisujemo: $f(x)=|4x-3|=\begin{cases}3-4x, & \text{za} \quad 4x-3<0\\ 4x-3, & \text{za} \quad 4x-3\geq 0,\end{cases}$

odnosno $f(x)=\begin{cases}3-4x, & \text{za} \quad x<\frac{3}{4}\\ 4x-3, & \text{za} \quad x\geq\frac{3}{4}.\end{cases}$

b) Ako je $4x-3<0$ onda je $|4x-3|=-(4x-3)=3-4x$.

Ako je $4x-3\geq 0$ onda je $|4x-3|=4x-3$.

$f(x)=|4x-3|+4x-5=\begin{cases}3-4x+4x-5, & \text{za} \quad 4x-3<0\\ 4x-3+4x-5, & \text{za} \quad 4x-3\geq 0,\end{cases}$

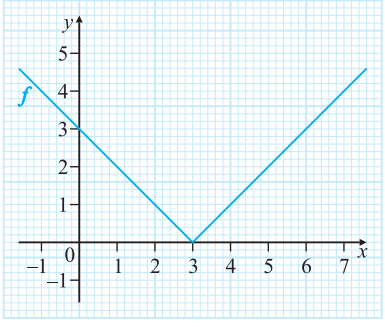
odnosno $f(x)=\begin{cases}-2\ , & \text{za} \quad x<\frac{3}{4}\\ 8x-8, & \text{za} \quad x\geq\frac{3}{4}.\end{cases}$

Primjer 5: Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}$.

Rješenje: Po definiciji je $\sqrt{x^2}=|x|$, znači

$f(x)=\sqrt{x^2-6x+9}=$

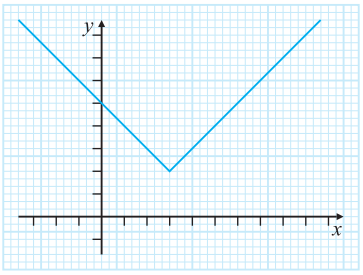
$=\sqrt{(x-3)^2}=|x-3|$.



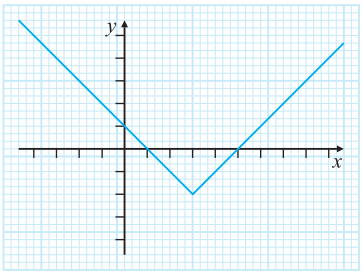
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Koja slika prikazuje graf funkcije $f(x) = |x+3| + 2$?

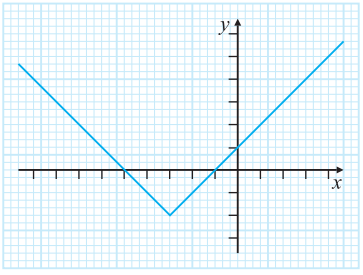
a)



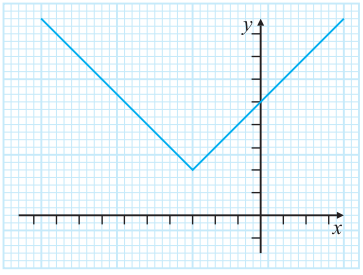
b)



c)

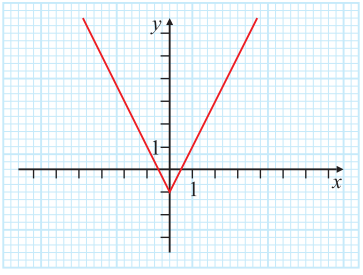


d)

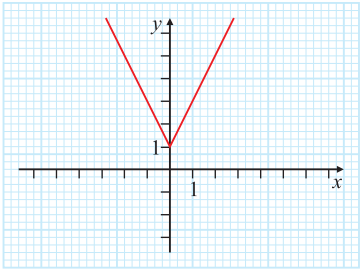


2. (IK 2006.) Koja slika prikazuje graf funkcije $f(x) = |2x| + 1$?

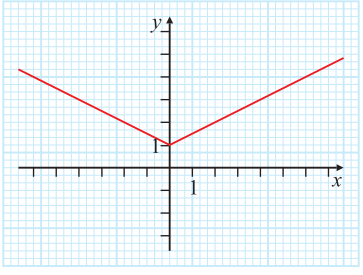
a)



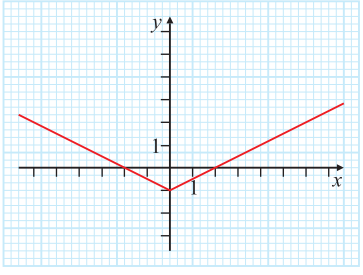
b)



c)



d)



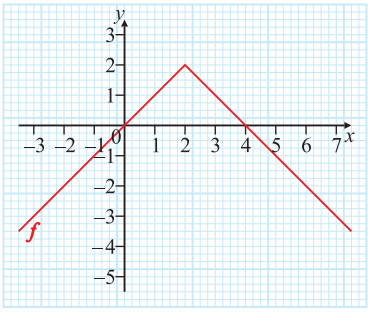
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Ako je $x < -2$, onda je $f(x) = \big|1 - \big|1 - |1 - x|\big|\big|$ jednako:

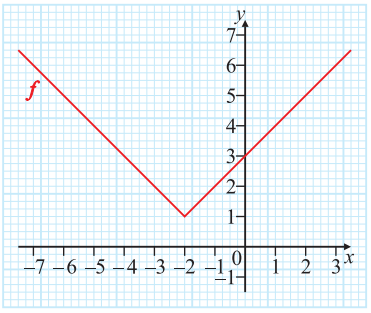
a) $x - 1$ b) $x + 1$ c) $-x + 1$ d) $-x - 1$.

2. Koja slika prikazuje graf funkcije $f(x) = 1 - |2 - x|$?

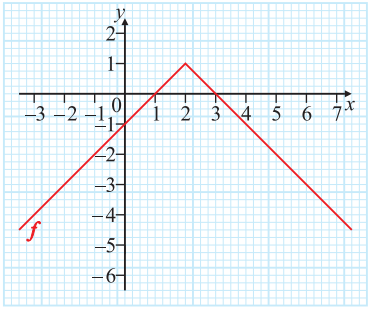
a)



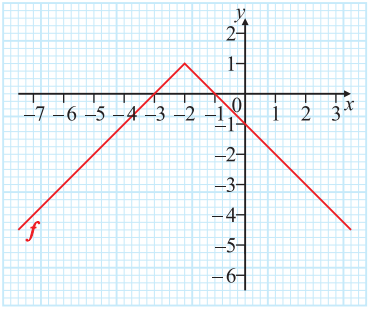
b)



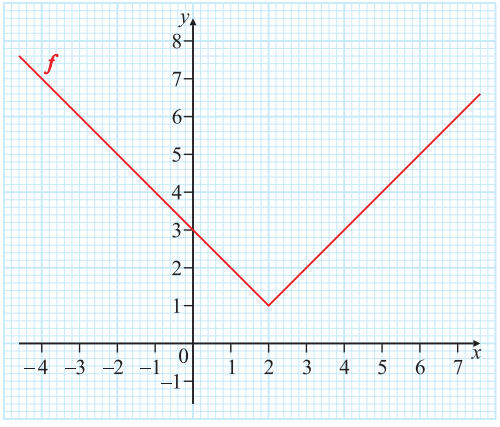
c)



d)



3. Kojom jednadžbom je zadan graf sa slike?



a) $f(x) = |x + 2| + 1$

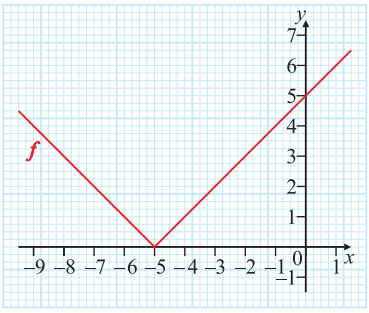
b) $f(x) = |x - 2| + 1$

c) $f(x) = |x - 2| - 1$

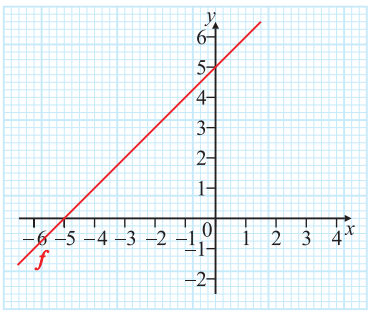
d) $f(x) = |x + 2| - 1$

4. Graf funkcije $f(x)=\sqrt{25+10x+x^2}$ je prikazan na slici:

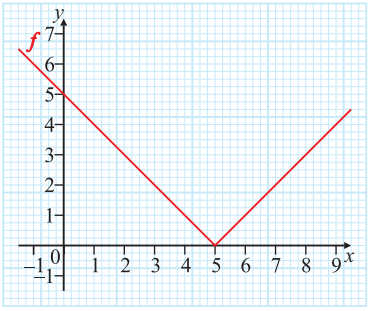
a)



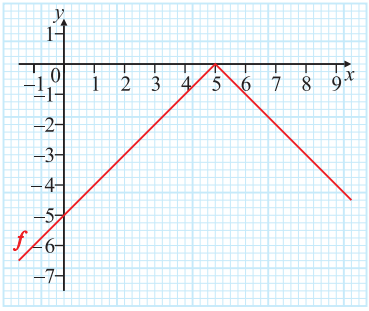
b)



c)



d)



5. Funkcija $f(x)=|x+4|+2$ ima vrh (šiljak) u točki:

a) $T(4, 2)$ b) $T(4, -2)$ c) $T(-4, -2)$ d) $T(-4, 2)$.

6. Funkcija $f(x)=|x-2|-|x+3|$ zapisana bez znaka apsolutne vrijednosti glasi:

a) $f(x)=\begin{cases} -5, & x<-3 \\ -2x-1, & -3\le x<2 \\ 5, & x\ge 2 \end{cases}$

b) $f(x)=\begin{cases} -5, & x<-3 \\ -x-2, & -3\le x<2 \\ 5, & x\ge 2 \end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases} 5, & x<-3 \\ -x-2, & -3\le x<2 \\ -5, & x\ge 2 \end{cases}$

d) $f(x)=\begin{cases} 5, & x<-3 \\ -2x-1, & -3\le x<2 \\ -5, & x\ge 2. \end{cases}$

7. Funkcija $f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2-4x+4}}{x-2}$ zapisana bez znaka apsolutne vrijednosti glasi:

a) $f(x)=\begin{cases}1, & x\geq 2\\ -1, & x<2\end{cases}$ b) $f(x)=\begin{cases}-1, & x>2\\ 1, & x<2\end{cases}$

c) $f(x)=\begin{cases}1, & x>2\\ -1, & x<2\end{cases}$ d) $f(x)=\begin{cases}-1, & x\geq 2\\ 1, & x<2.\end{cases}$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Napišite funkciju $f(x)=|x-1|-x-2$ bez znaka apsolutne vrijednosti.

2. Ako je $x\in\langle -5,1\rangle$, koliko je $f(x)=|x-1|-2|x+5|$?

3. Nacrtajte graf funkcije $f(x)=2|x-1|-3$.

4. Zadana je funkcija $f(x)=\left|\dfrac{2}{3}x-1\right|$.

a) Odredite nepoznatu koordinatu točke $A(-2, y)$ koja pripada grafu.

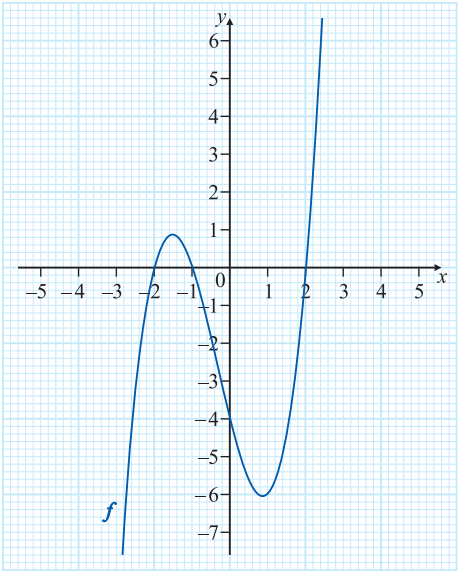
b) Pripada li točka $B(0, 1)$ grafu funkcije?

c) Pripada li točka $C(3, 1)$ grafu funkcije?

d) Koliko je $f(6)$?

e) Je li točno da je $f(-3)=3$?

5. Zadan je graf funkcije $f(x)$. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $g(x)=|f(x)|$.



6. Grafički riješite jednadžbu $|6x-3|=15$.

7. Grafički riješite nejednadžbu $|2x-3|\leq 6$.

8. Grafički riješite jednadžbu $|2-x|=3x+2$.

9. Grafički riješite jednadžbu $\frac{1}{2}x-4=-|2-x|$.

10. Grafički riješite nejednadžbu $|x-3|<-\frac{1}{2}x+\frac{9}{2}$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. d **2.** b

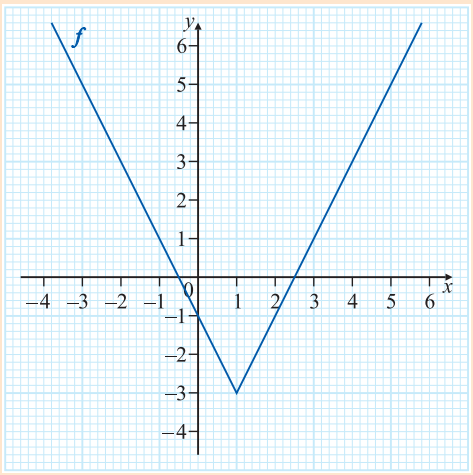
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** c **3.** b **4.** a **5.** d **6.** d **7.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

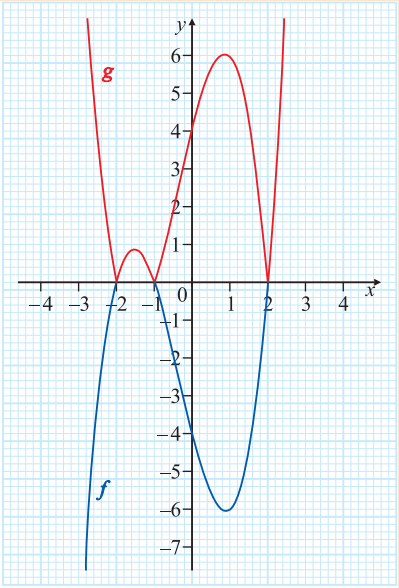
1. $f(x)=\begin{cases}-2x-1, & za \quad x<1\\ -3\ , & za \quad x\geq 1\end{cases}$ **2.** $f(x)=-3x-9$

3.

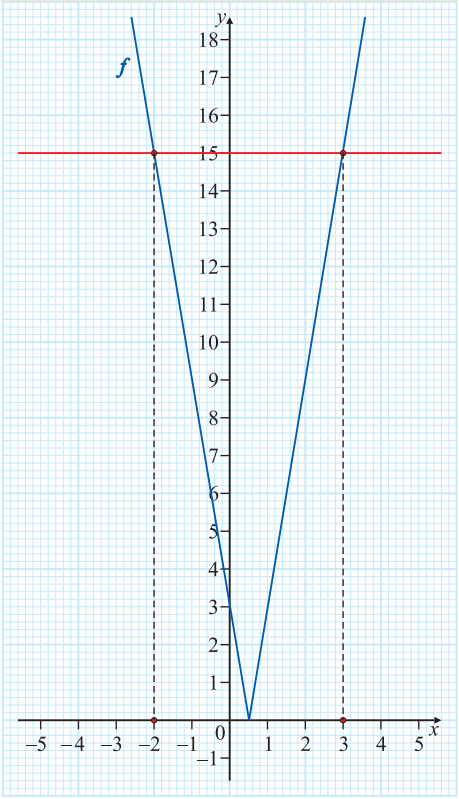


4. a) $A\left(-2,-\frac{7}{3}\right)$ b) Da. c) Da. d) $f(6)=3$ e) Da.

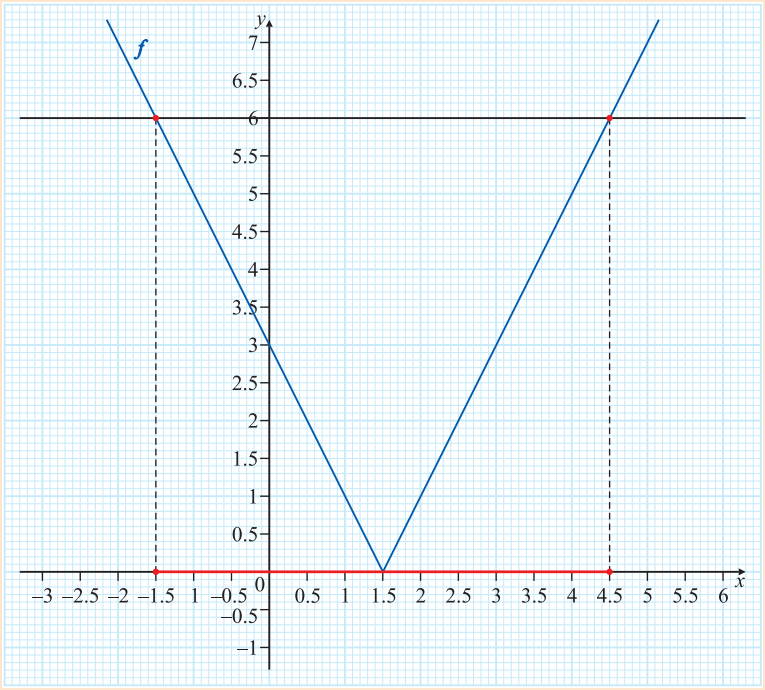
5.



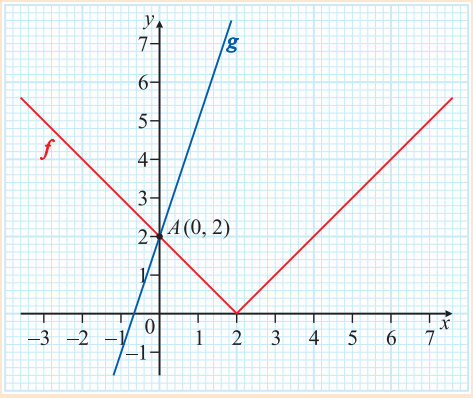
6. Sa slike vidimo da je $x_1 = -2$, $x_2 = 3$.



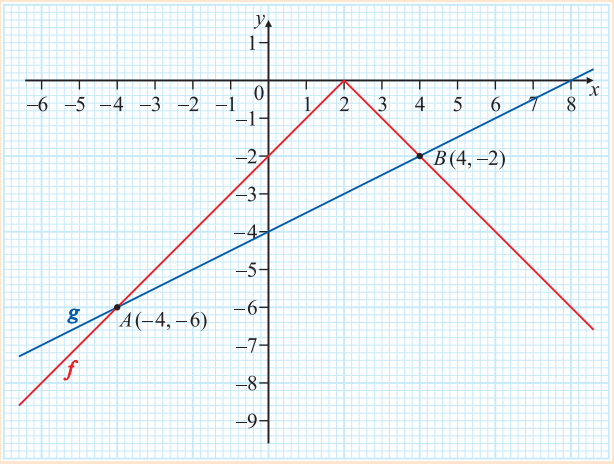
7. Sa slike vidimo da je $-1.5 \leq x \leq 4.5$ (rješenje je označeno crvenom bojom).



8. Sa slike vidimo da postoji samo jedan presjek, točka $A(0,2)$, te je rješenje jednadžbe $x = 0$.

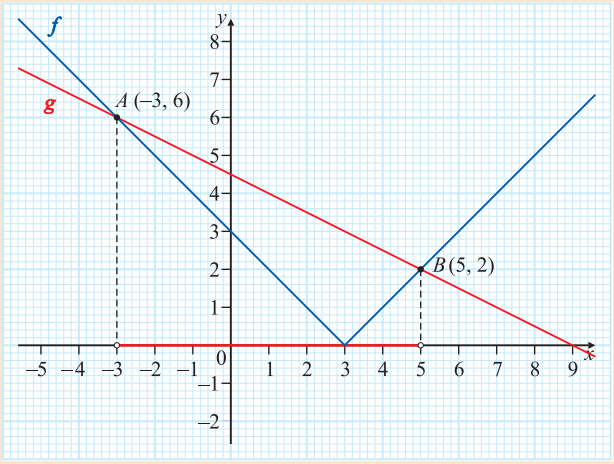


9. Rješenja su $x_1 = -4$, $x_2 = 4$.



10. Nacrtamo funkciju $f(x) = |x-3|$ i pravac $g(x) = -\frac{1}{2}x + \frac{9}{2}$ i promatramo gdje je $g(x) > f(x)$.

Rješenje je označeno crvenom bojom, $x \in \langle -3, 5 \rangle$.



2.3.2. Jednadžbe i nejednadžbe s apsolutnom vrijednosti

Ako je $|x| = a,\ a > 0$, znamo da je $x = a$ ili $x = -a$. Koristeći ovu činjenicu rješavamo jednostavne jednadžbe s apsolutnim vrijednostima.

Primjer 1: Riješimo jednadžbu: $|2x - 5| = 2$.

Rješenje: Znamo da je apsolutna vrijednost realnog broja jednaka 2 za brojeve 2 i –2.

$$2x - 5 = 2 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$2x - 5 = -2 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$$

Jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = \frac{7}{2}$ i $x_2 = \frac{3}{2}$.

Primjer 2: Riješimo jednadžbu: $|3 - |2x + 1|| = 5$.

Rješenje: Rješavamo na isti način kao u primjeru 1.

$$3 - |2x + 1| = 5 \Rightarrow -|2x + 1| = 2 \Rightarrow |2x + 1| = -2$$

Nemoguće je da apsolutna vrijednost realnog broja bude negativna i zaključujemo kako ova jednadžba nema rješenja.

$$3 - |2x + 1| = -5 \Rightarrow -|2x + 1| = -8 \Rightarrow |2x + 1| = 8$$

$$2x + 1 = 8 \Rightarrow 2x = 7 \Rightarrow x = \frac{7}{2}$$

$$2x + 1 = -8 \Rightarrow 2x = -9 \Rightarrow x = -\frac{9}{2}$$

Jednadžba ima dva rješenja: $x_1 = \frac{7}{2}$ i $x_2 = -\frac{9}{2}$.

Primjer 3: Riješimo jednadžbu: $|x + 1| - |3 - x| = 4$.

Rješenje: Pri rješavanju ovakve jednadžbe promatramo predznake izraza u apsolutnim vrijednostima i, koristeći definiciju apsolutne vrijednosti, rješavamo jednadžbu na različitim intervalima. Predznake izraza i intervale možemo odrediti i pomoću tablice.

$$|x + 1| = \begin{cases} -x - 1, & x + 1 < 0 \Rightarrow x < -1 \\ x + 1, & x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \end{cases}$$

$$|3 - x| = \begin{cases} x - 3, & 3 - x < 0 \Rightarrow x > 3 \\ 3 - x, & 3 - x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \end{cases}$$

	$-\infty$	-1	3	$+\infty$
$x+1$	$-$	$+$	$+$	
$3-x$	$+$	$+$	$-$	

Na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ $\Rightarrow$ $-x-1-3+x=4$

$\Rightarrow$ $-4=4$ $\Rightarrow$ $x\in\emptyset$

Na intervalu $[-1,3\rangle$ $\Rightarrow$ $x+1-3+x=4$

$\Rightarrow$ $2x=6$ $\Rightarrow$ $x=3$ $\Rightarrow$ $x\in\emptyset$

Na intervalu $[3,\infty\rangle$ $\Rightarrow$ $x+1+3-x=4$

$\Rightarrow$ $4=4$ $\Rightarrow$ $x\in[3,\infty\rangle$

Rješenje jednadžbe je $x\in[3,\infty\rangle$.

Primjer 4: Riješimo nejednadžbu: $|5-2x|\le 2$.

Rješenje: Koristimo svojstvo $|x|\le a,\ a>0 \Rightarrow -a\le x\le a$.

$5-2x\le 2 \Rightarrow -2x\le 2-5/:(-2) \Rightarrow x\ge\frac{3}{2}$

$5-2x\ge -2 \Rightarrow -2x\ge -2-5/:(-2) \Rightarrow x\le\frac{7}{2}$

Rješenje nejednadžbe je presjek rješenja obiju nejednadžbi:

$\frac{3}{2}\le x\le\frac{7}{2}$.

Primjer 5: Riješimo nejednadžbu: $|x+1|-|3-x|\le 4$.

Rješenje: Ovakvu nejednadžbu rješavamo na isti način kao jednadžbu iz primjera 3. uz uvažavanje intervala na kojima rješavamo nejednadžbu s rješenjima koja dobivamo.

$\langle -\infty,-1\rangle \Rightarrow -x-1-3+x\le 4 \Rightarrow -4\le 4$

$\Rightarrow x\in\langle -\infty,-1\rangle$

$[-1,3\rangle \Rightarrow x+1-3+x\le 4 \Rightarrow 2x\le 6$

$\Rightarrow x\le 3 \Rightarrow x\in[-1,3\rangle$

$[3,\infty\rangle \Rightarrow x+1+3-x\le 4 \Rightarrow 4\le 4$

$\Rightarrow x\in[3,\infty\rangle$

Rješenje nejednadžbe je unija dobivenih rješenja: $x\in\boldsymbol{R}$.

Primjer 6: Riješimo nejednadžbu: $\frac{3}{1+|x-1|}<2$.

Rješenje: Uočimo da je nazivnik pozitivan broj za svaki $x\in\boldsymbol{R}$.

$$\frac{3}{1+|x-1|}<2 \,/\cdot\left(1+|x-1|\right)>0$$

$$3<2+2|x-1|$$

$$1<2|x-1|$$

$$\frac{1}{2}<|x-1|$$

$$|x-1|>\frac{1}{2}$$

Koristimo svojstvo $|x|>a,\ a>0 \Rightarrow x<-a$ ili $x>a$.

$$x-1<-\frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad x-1>\frac{1}{2}$$

$$x<\frac{1}{2} \quad \text{ili} \quad x>\frac{3}{2}$$

$$x\in\left\langle-\infty,\frac{1}{2}\right\rangle\cup\left\langle\frac{3}{2},\infty\right\rangle$$

Nejednadžbu možemo riješiti i prevođenjem na geometrijski problem (udaljenost točaka na pravcu).

Primjer 7: Riješimo nejednadžbu: $|2x-3|<|4-3x|$.

Rješenje: Promatramo predznake izraza u apsolutnim vrijednostima i koristeći definiciju apsolutne vrijednosti rješavamo nejednadžbu na različitim intervalima.

$$|2x-3|=\begin{cases}-2x+3, & 2x-3<0\Rightarrow x<\frac{3}{2}\\ 2x-3, & 2x-3\geq 0\Rightarrow x\geq\frac{3}{2}\end{cases}$$

$$|4-3x|=\begin{cases}3x-4, & 4-3x<0\Rightarrow x>\frac{4}{3}\\ 4-3x, & 4-3x\geq 0\Rightarrow x\leq\frac{4}{3}\end{cases}$$

$$\left\langle-\infty,\frac{4}{3}\right] \Rightarrow -2x+3<4-3x \Rightarrow x<1$$

$$\Rightarrow x\in\langle-\infty,1\rangle$$

$$\left\langle\frac{4}{3},\frac{3}{2}\right\rangle \Rightarrow -2x+3<3x-4 \Rightarrow -5x<-7$$

$$\Rightarrow x>\frac{7}{5} \Rightarrow x\in\left\langle\frac{7}{5},\frac{3}{2}\right\rangle$$

$$\left[\frac{3}{2},\infty\right\rangle \quad \Rightarrow \quad 2x-3<3x-4 \quad \Rightarrow \quad -x<-1$$

$$\Rightarrow \quad x>1 \quad \Rightarrow \quad x\in\left[\frac{3}{2},\infty\right\rangle$$

Rješenje nejednadžbe je

$$x\in\langle-\infty,1\rangle\cup\left\langle\frac{7}{5},\frac{3}{2}\right\rangle\cup\left[\frac{3}{2},\infty\right\rangle \quad \Rightarrow \quad x\in\langle-\infty,1\rangle\cup\left\langle\frac{7}{5},\infty\right\rangle.$$

Primjer 8: Pri pakiranju mljekara ima toleranciju od 6.75 mL u čašici jogurta koja sadrži 180 mL jogurta. Zapišimo i riješimo nejednadžbu s apsolutnom vrijednosti koja opisuje prihvatljiv sadržaj jogurta u čašici od 180 mL.

Rješenje: Neka je x stvarni sadržaj čašice u mililitrima ako znamo da ona sadržava idealan sadržaj od 180 mililitara uz toleranciju od 6.75 mililitara jogurta. Zapisat ćemo:

$$|x-180|\le 6.75$$

$$-6.75\le x-180\le 6.75$$

$$173.25\le x\le 186.75$$

Količina jogurta u čašici može biti od 173.25 mL do 186.75 mL.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2006.) Tvrdnja „Realan broj x udaljen je od broja 2 za 5“ zapisuje se izrazom:
a) $|x-2|=5$ b) $|x+2|=5$ c) $|x+5|=2$ d) $|x-5|=2$.

2. (NI 2006.) Riješite nejednadžbu $|2x-3|<4$.

3. (IK 2006.) Zbroj rješenja jednadžbe $\left|3-\frac{1}{3}x\right|=5$ je:
a) 18 b) –18 c) 24 d) –24.

4. (NI 2007.) Riješite nejednadžbu $|x-2|>3$. Rješenje zapišite koristeći intervale.

5. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $|x-3|+x=5$.

6. (IK 2010.) Riješite nejednadžbu $|2x+3|\ge 5$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Zbroj kvadrata rješenja jednadžbe $|2x|+x=3$ iznosi:
a) 9 b) 10 c) 13 d) 25.

2. Sva rješenja jednadžbe $2x+3|x|=5$ leže u intervalu:
a) $\langle -6, 2\rangle$ b) $\langle 1, 5\rangle$ c) $\langle -5, 0\rangle$ d) $\langle 0, 2\rangle$.

3. Zbroj rješenja jednadžbe $|2x-1|=x+4$ je:
a) 4 b) 0 c) 1 d) 2.

4. Broj rješenja jednadžbe $|x|+|1-x|=10$ u skupu realnih brojeva iznosi:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 4.

5. Zbroj rješenja jednadžbe $\left|\frac{x+4}{5-x}\right|=2$ iznosi:
a) 16 b) 12 c) –5 d) 2.

6. Sva rješenja nejednadžbe $2x<|x+1|$ nalaze se u intervalu:
a) $\langle -\infty, 1\rangle$ b) $[-3, 4]$ c) $[-1, 0]$ d) $[-1, 1]$.

7. Skup svih rješenja nejednadžbe $|x-2|\leq|x+4|$ je skup:
a) $\langle -\infty, 1]$ b) $\langle -2, 3\rangle \cup \langle 5, 8\rangle$
c) $[-1, \infty\rangle$ d) $\langle -\infty, -2\rangle \cup [-1, 3\rangle$.

8. Skup svih rješenja nejednadžbe $|x-2|+|x|<4$ je skup:
a) $[-2, 0]$ b) $\langle -1, 3\rangle$ c) $[0, 2\rangle$ d) $\langle -1, 0] \cup [3, 2\rangle$.

9. Koliko rješenja u skupu prirodnih brojeva ima nejednadžba $|x|-|4-x|<4$?
a) 0 b) 5 c) 3 d) 4

10. Rješenje nejednadžbe $|x-3|<|x-1|$ je:
a) $x<2$ b) $x>2$ c) $x\in R\setminus\{2\}$ d) $x>4$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Riješite jednadžbu u skupu $\boldsymbol{R}$: $|6x-3|=15$.

2. Riješite jednadžbu u skupu $\boldsymbol{R}$: $|4x-3|=2$.

3. Riješite jednadžbu: $|x-2|-|3-2x|=1-x$.

4. Riješite jednadžbu: $|x-2|-|4-x|=1$.

5. Riješite nejednadžbu u skupu $\boldsymbol{R}$: $|3x-4|\geq 2$.

6. Riješite nejednadžbu u skupu $\boldsymbol{R}$: $|2-7x|\leq 3$.

7. Riješite nejednadžbu: $|2x+3|>3$.

8. Skicirajte na brojevnom pravcu sve točke T za koje vrijedi $|OT|\geq 3$.

9. Riješite nejednadžbu: $\left|\frac{2}{4-x}\right|\geq 1$.

10. Riješite nejednadžbu: $\left|\frac{2}{4-x}\right|\leq 1$.

11. Riješite nejednadžbu: $x^2<25$.

12. Riješite nejednadžbu: $-3(x+4)^2>12$.

13. Zapišite kao jednu nejednadžbu koristeći znak za apsolutnu vrijednost $x<-2$ ili $x>10$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a **2.** $-\frac{1}{2}<x<\frac{7}{2}$ **3.** a

4. $\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle 5,+\infty\rangle$ **5.** $x=4$ **6.** $x\in\langle-\infty,-4]\cup[1,+\infty\rangle$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

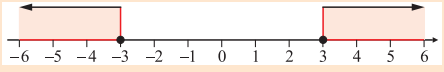
1. b **2.** a **3.** a **4.** c **5.** a **6.** a **7.** c **8.** b **9.** c **10.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x_1=3,\ x_2=-2$ **2.** $x_1=\frac{1}{4},\ x_2=\frac{5}{4}$ **3.** $x\in\{1\}\cup[2,\infty\rangle$ **4.** $x=\frac{7}{2}$

5. $\langle-\infty,\frac{2}{3}]\cup[2,\infty\rangle$ **6.** $x\in\left[-\frac{1}{7},\frac{5}{7}\right]$ **7.** $x\in\langle-\infty,-3\rangle\cup\langle 0,\infty\rangle$

8. $x\in\langle-\infty,-3]\cup[3,\infty\rangle$



9. $x\in[2,6]\setminus\{4\}$ **10.** $x\in\langle-\infty,2]\cup[6,\infty\rangle$ **11.** $x\in\langle-5,5\rangle$ **12.** $x\in\varnothing$

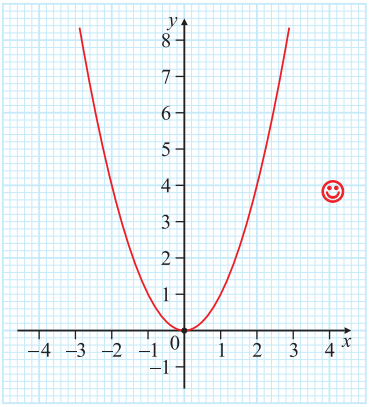
13. $|x-4|>6$

2.4. Kvadratna funkcija

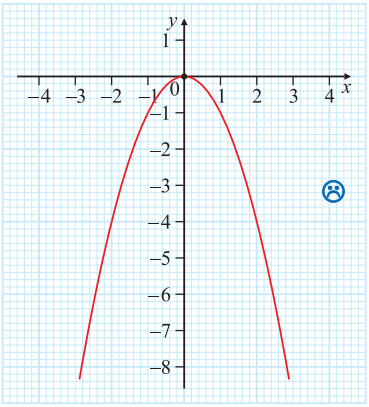
2.4.1. Kvadratna funkcija

Kvadratna funkcija je svaka funkcija oblika $f(x) = ax^2 + bx + c$, za $a, b, c \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$. Njezina domena su svi realni brojevi. Graf kvadratne funkcije zovemo parabola.

$f(x) = x^2$



$g(x) = -x^2$



Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2$ je parna funkcija, $\left(f\left(x\right) = f\left(-x\right)\right)$, simetrična je s obzirom na y-os. Ako je vodeći koeficijent $a > 0$ (☺) parabola je svojim otvorom okrenuta prema gore, a ako je vodeći koeficijent $a < 0$ (☹) parabola je svojim otvorom okrenuta prema dolje.

Točku u kojoj je parabola s pozitivnim vodećim koeficijentom najniža, a s negativnim vodećim koeficijentom najviša, nazivamo **tjeme** (vrh) **parabole**. Tjeme parabole $y = ax^2$ je u točki ishodišta, $T(0, 0)$.

Parabola $y = ax^2$ se mijenja s promjenom vodećeg koeficijenta: što je $|a|$ manji, parabola je šira, a što je $|a|$ veći, parabola je uža.

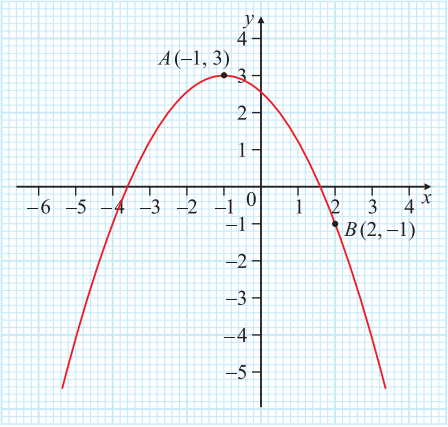
Parabola $y = ax^2$ i $y = ax^2 + bx + c$ imaju isti oblik. Graf parabole $y = ax^2 + bx + c$ dobivamo pomicanjem (translacijom) parabole $y = ax^2$ za x_0 u smjeru x-osi i za y_0 u smjeru y-osi, gdje su x_0, y_0 koordinate **tjemena pomaknute parabole** $T\left(x_0, y_0\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$. Jednadžbu parabole $y = ax^2 + bx + c$ možemo zapisati u tjemenom obliku $y = a\left(x - x_0\right)^2 + y_0$.

Primjer 1: Odredimo jednadžbu parabole kojoj je tjeme $T(-1, 3)$ i koja prolazi točkom $A(2, -1)$.

Rješenje: Jedini podatak koji nemamo jest vrijednost vodećeg koeficijenta a koji ćemo dobiti uvrštavanjem koordinata tjemena u tjemenu jednadžbu parabole $y = a\left(x - \left(-1\right)\right)^2 + 3$, a zatim uvrštavanjem koordinata točke A. Dobijemo $a = -\frac{4}{9}$.

Jednadžba parabole glasi: $y = -\frac{4}{9}\left(x + 1\right)^2 + 3$, ili u raspisanom obliku $y = -\frac{4}{9}x^2 - \frac{8}{9}x + \frac{23}{9}$. ☹

Primjer 2: Odredimo jednadžbu parabole zadane grafom.



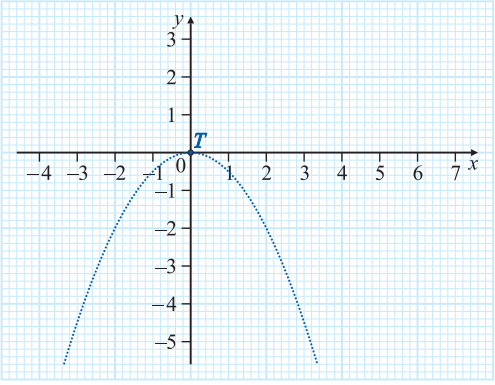
Rješenje: Vidimo da su na grafu istaknute dvije točke: A koja je tjeme i točka B. Ovaj primjer rješavamo na isti način kao i primjer 1 (uočite – podaci su isti).

Jednadžba parabole glasi $y=-\frac{4}{9}(x+1)^2+3$ ili u raspisanom obliku $y=-\frac{4}{9}x^2-\frac{8}{9}x+\frac{23}{9}$. ☹

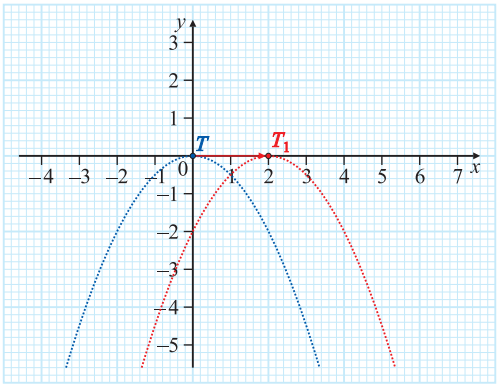
Vrijednost kvadratne funkcije $y_0=f(x_0)$ zovemo **ekstrem funkcije**, gdje su (x_0, y_0) koordinate tjemena. Ekstrem funkcije može biti **minimum ili maksimum**. Funkcija postiže svoj minimum $m(x_0, y_0)$, ako je $a>0$, a maksimum $M(x_0, y_0)$, ako je $a<0$.

Slika kvadratne funkcije je skup $[m, +\infty\rangle$ za $a>0$, a $\langle -\infty, M]$ za $a<0$ (što se vidi s grafa funkcije).

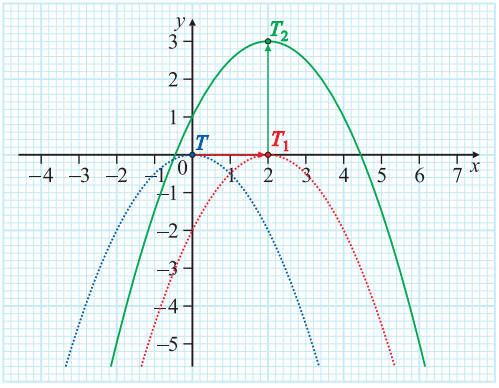
$$f(x)=-\frac{1}{2}x^2$$



$$f(x)=-\frac{1}{2}(x-2)^2$$



$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 3$$



Svaka parabola je simetrična s obzirom na **os simetrije**. Os simetrije, kod parabole $f(x) = ax^2 + bx + c$, pravac je okomit na x-os, a prolazi tjemenom parabole.

Primjer 3: Odredimo sliku parabole iz primjera 2.

Rješenje: Iz grafa parabole vidimo da je ona svojim otvorom okrenuta prema dolje i da svoju najveću vrijednost postiže u točki tjemena $T(-1, 3)$. To znači da je najveća vrijednost funkcije 3. Slika funkcije je skup realnih brojeva $\langle -\infty, 3]$. No, da nemamo sliku, ako je vodeći koeficijent negativan (☹) i parabola je svojim otvorom okrenuta prema dolje, parabola ima maksimum i to je njena najveća vrijednost. Slika je skup svih realnih brojeva do maksimuma, uključujući i maksimum.

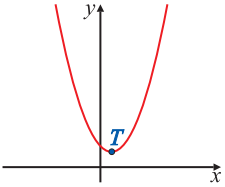
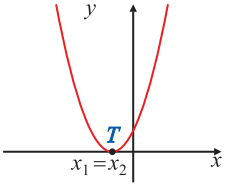
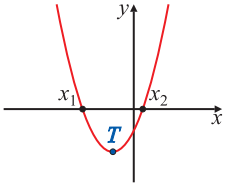
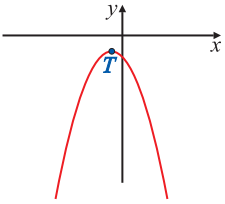
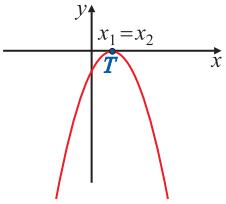
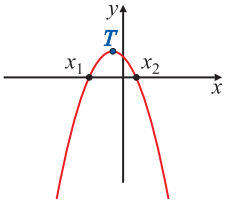
Broj x_1 je **nultočka kvadratne funkcije** $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je $f(x_1) = 0$. Nultočke su rješenja pripadne kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$. Realna

rješenja kvadratne jednadžbe su nultočke kvadratne funkcije. Nultočke su sjecišta grafa parabole s osi apscisa. Jednadžbu kvadratne funkcije možemo zapisati i pomoću nultočaka

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

gdje su x_1 i x_2 nultočke.

Izgled grafa kvadratne funkcije ovisi o diskriminanti $D = b^2 - 4ac$ i o vodećem koeficijentu a.

	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$a > 0$ ☺			
$a < 0$ ☹			

Primjer 4: Odredimo jednadžbu kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$, ako je zadano: $f(-1) = f(3) = 0$, $f(1) = 2$.

Rješenje: Iz podataka $f(-1) = f(3) = 0$ vidimo da su to nultočke. Os simetrije parabole jednako je udaljena od obje nultočke i prolazi kroz polovište dužine između njih, znači da je x_0 koordinata tjemena

$$x_0 = \frac{-1+3}{2} \Rightarrow x_0 = 1.$$

Vidimo da je zadana vrijednost funkcije upravo tjeme funkcije $T(1, 2)$. Uvrstimo naše podatke u tjemenu jednadžbu parabole.

$$f(x) = a(x-1)^2 + 2$$

$$f(3) = 0 \Rightarrow a(3-1)^2 + 2 = 0 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Jednadžba parabole je $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)^2 + 2$ ili

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{3}{2}.$$ ☹

Primjer 5: Odredimo jednadžbu kvadratne funkcije zadane s tri točke: $A(0, 1)$, $B(-1, 2)$, $C(2, 17)$.

Rješenje: Uvrstimo koordinate točaka u jednadžbu kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Dobivamo tri jednadžbe s trima nepoznanicama.

$$A(0,1) \Rightarrow f(0)=1 \Rightarrow a\cdot 0^2+b\cdot 0+c=1 \quad c=1$$
$$B(-1,2) \Rightarrow f(-1)=2 \Rightarrow a\cdot(-1)^2+b\cdot(-1)+c=2 \quad a-b+c=2$$
$$C(2,17) \Rightarrow f(2)=17 \Rightarrow a\cdot 2^2+b\cdot 2+c=17 \quad 4a+2b+c=17$$

Uvrstimo dobivenu nepoznanicu c u preostale dvije jednadžbe.

$a-b+1=2 \quad \Rightarrow \quad a-b=1$

$4a+2b+1=17 \Rightarrow 4a+2b=16/:2 \Rightarrow 2a+b=8$

Riješit ćemo ovaj sustav metodom suprotnih koeficijenata. Zbrojimo ove dvije jednadžbe. Dobijemo:

$3a=9 \Rightarrow a=3$

$2\cdot 3+b=8 \Rightarrow b=2$

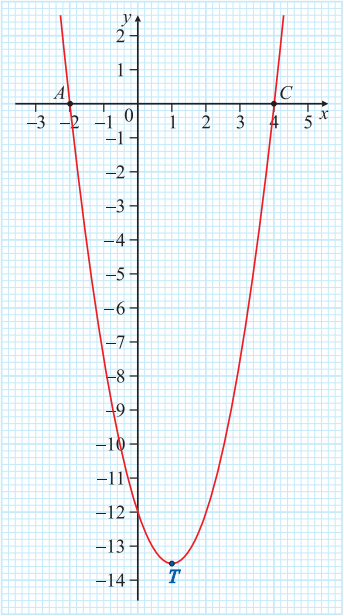
Jednadžba kvadratne funkcije je $f(x)=3x^2+2x+1$. ☺

Primjer 6: Napišimo jednu kvadratnu funkciju kojoj su brojevi 2 i –3 nultočke. Koliko ima takvih funkcija?

Rješenje: Možemo zapisati $f(x)=a(x-2)(x+3)$, a vrijednost vodećeg koeficijenta možemo uzeti po volji. Naša funkcija može biti $f(x)=(x-2)(x+3)$ ili u raspisanom obliku $f(x)=x^2+x-6$. S obzirom na to da je vodeći koeficijent bilo koji broj osim nule, ovakvih je funkcija beskonačno mnogo.

Primjer 7: Nacrtajmo graf kvadratne funkcije $f(x)=\frac{3}{2}(x-4)(x+2)$. ☺

Rješenje: Vidimo da su $x_1=4$, $x_2=-2$ nultočke parabole.



Znamo da je polovište dužine između nultočaka zapravo koordinata tjemena $x_0=\frac{4-2}{2}=1$. Uvrštavajući x_0 u jednadžbu parabole izračunat ćemo y koordinatu tjemena:

$f(1)=\frac{3}{2}(1-4)(1+2)=-\frac{27}{2}$.

Tjeme ima koordinate $T\left(1,\ -\frac{27}{2}\right)$.

Odrediti tijek funkcije znači odrediti intervale na kojima funkcija raste i intervale na kojima pada.

Funkcija s pozitivnim vodećim koeficijentom ☺ pada do svog minimuma, a nakon toga raste; funkcija s negativnim vodećim koeficijentom ☹ raste do svog maksimuma, a nakon toga pada.

Primjer 8: Odredimo tijek funkcije $f(x)=\frac{3}{2}(x-4)(x+2)$.

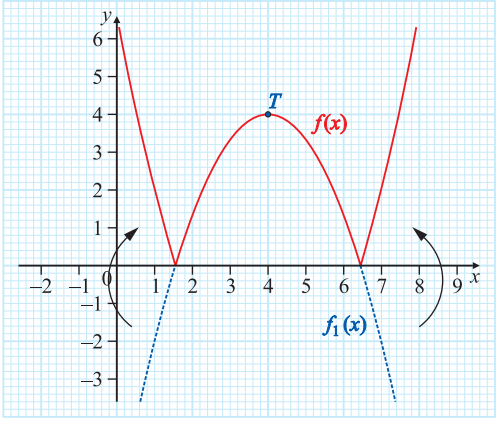
Rješenje: Tjeme parabole je točka $T\left(1,\ -\frac{27}{2}\right)$. U gornji red tablice upisujemo vrijednosti varijable x, koje se slijeva udesno povećavaju. Jedina istaknuta točka je x koordinata tjemena. U donji red upisujemo promjene vrijednosti funkcije y u ovisnosti o promjeni varijable x. Promatrajući graf parabole vidimo kako se njene vrijednosti, gledajući slijeva udesno, smanjuju do točke tjemena, a nakon postignutog minimuma se povećavaju. Kažemo da funkcija pada na intervalu $x\in\left\langle -\infty,\ -\frac{27}{2}\right\rangle$, a raste na $x\in\left\langle -\frac{27}{2},\ +\infty\right\rangle$.

x	$-\infty$	↗	$x_0=1$	↗	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$y_0=-\frac{27}{2}$	↗	$+\infty$

Primjer 9: Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\left|-\frac{2}{3}(x-4)^2+4\right|$.

Rješenje: Da bismo nacrtali graf ove funkcije, najprije ćemo nacrtati graf funkcije $f_1(x)=-\frac{2}{3}(x-4)^2+4$.

Funkcija apsolutne vrijednosti sve negativne vrijednosti mijenja u pozitivne, što znači da ćemo jednostavno prebaciti (zrcaliti) oko osi x sve one dijelove parabole koji su ispod x-osi, kako bismo dobili pozitivne vrijednosti.



Primjer 10: Odredimo realan parametar b tako da funkcija $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx - 2$ poprima maksimalnu vrijednost 6. Nacrtajmo tako dobivenu funkciju. ☹

Rješenje: Jedan od načina da riješimo ovaj zadatak jest primjena formule za tjeme parabole.

$$\frac{4ac - b^2}{4a} = y_0$$

$$\frac{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2) - b^2}{4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = 6$$

$$\frac{4 - b^2}{-2} = 6$$

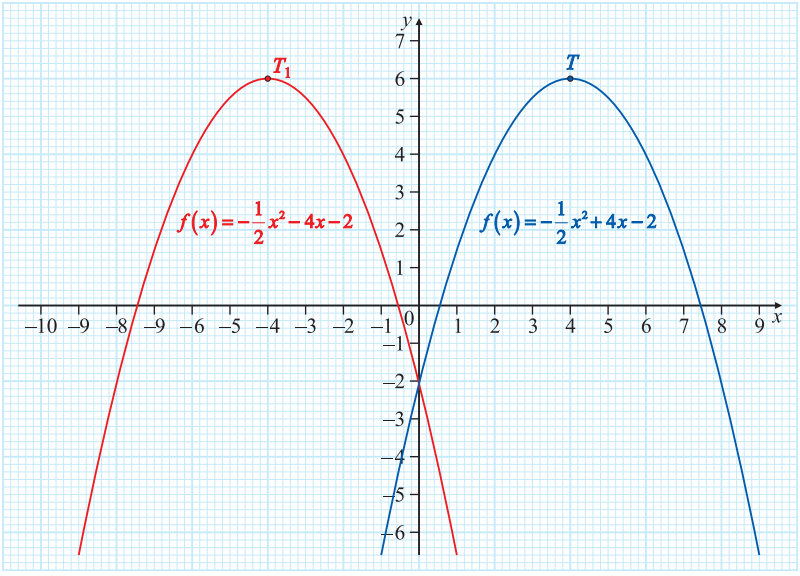
$$4 - b^2 = -12$$

$$b^2 = 16$$

$$b = \pm 4$$

Parametar b poprima dvije vrijednosti, pa imamo dvije funkcije:

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 2 \text{ i } f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 4x - 2.$$



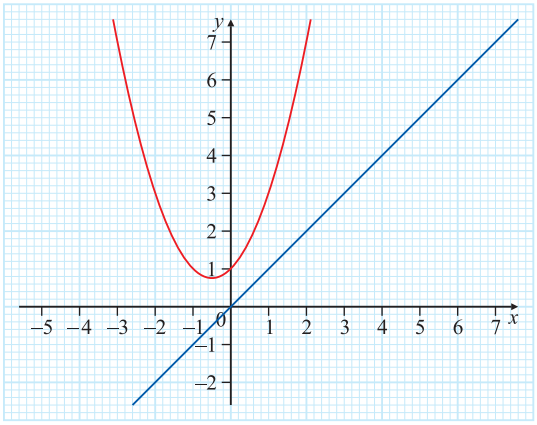
Pravac i parabola mogu se sjeći u dvije točke (takav pravac nazivamo **sekanta**), mogu se dodirivati u jednoj točki (takav pravac je **tangenta**) ili mogu ne imati zajedničkih točaka. Presjek pravca i parabole možemo odrediti grafički i računski.

Primjer 11: Odredimo u kakvom su položaju pravac $y = x$ i parabola $y = x^2 + x + 1$.

Rješenje: Ovaj zadatak vrlo brzo rješavamo grafički, no često nije lako pročitati rješenja sa slike.
Tada odabiremo računsko određivanje presjeka.

$y = x \Rightarrow y = x^2 + x + 1 \Rightarrow \cancel{x} = x^2 + \cancel{x} + 1 \Rightarrow x^2 = -1$

Vidimo da je to nemoguće i zaključujemo da nema presjeka pravca i parabole.



Primjer 12: Odredimo međusobni položaj pravca $y = -x + 5$ i parabole $y = x^2 - 8x + 15$.

Rješenje: Izjednačujemo zadane jednadžbe.

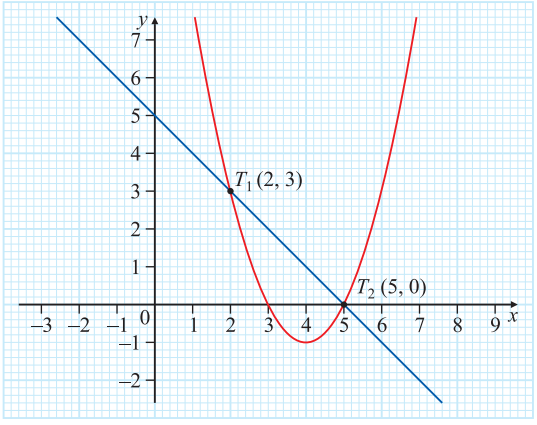
$x^2 - 8x + 15 = -x + 5$

$x^2 - 7x + 10 = 0$

$x_1 = 2, x_2 = 5$

$\Rightarrow y_1 = 3, y_2 = 0$

Pravac i parabola sijeku se u dvije točke $T_1(2, 3)$ i $T_2(5, 0)$.



Primjer 13: U dječjem vrtiću „Veselje“ imaju drvene ogradice duljine 100 metara i žele ograditi što veći dio dvorišta za djecu mlađeg uzrasta. Dvorište bi trebalo biti oblika pravokutnika. S jedne strane je zid zgrade vrtića, tako da tu stranu ne treba ograđivati.

a) Kojih dimenzija će biti dvorište?

b) Hoće li biti dovoljno drvene ograde ako žele dvorište od bar 1 000 m^2?

Rješenje: a) „Opseg dvorišta”, s obzirom da jednu stranu ne treba ograđivati, bit će $O = 2x + y$, što možemo izjednačiti s duljinom ograde $2x + y = 100$. Površina dvorišta je $P = xy$ i to će biti naša funkcija. Iz prve jednadžbe izrazimo y

$\Rightarrow \quad 2x + y = 100 \quad \Rightarrow \quad y = 100 - 2x$

i uvrstimo u našu funkciju

$P(x) = x(100 - 2x) \quad \Rightarrow \quad P(x) = -2x^2 + 100x.$ ☹

Sada tražimo za koji x funkcija P ima maksimalnu vrijednost.

$$x_0 = -\frac{100}{2\cdot(-2)} = 25 \qquad \Rightarrow \quad y = 100 - 2\cdot 25 = 50.$$

Dvorište će biti dimenzija 25 m × 50 m.

b) $P(25) = -2\cdot(25)^2 + 100\cdot 25 = 1250.$

Površina dvorišta bit će 1 250 m^2, znači imat će dosta drvene ograde.

Primjer 14: Zbroj dvaju brojeva je 30. Odredimo ta dva broja tako da im umnožak bude maksimalan.

Rješenje: Označimo ta dva broja sa x i y:

$x + y = 30 \quad \Rightarrow \quad y = 30 - x$, a njihov umnožak

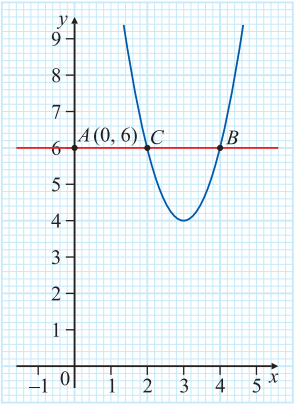
$U(x) = xy = x(30 - x) = -x^2 + 30x.$

Maksimalna vrijednost ove funkcije je u točki tjemena

$x_0 = -\frac{30}{-2} = 15$, $x = y = 15$, i iznosi

$U(15) = 15 \cdot 15 = 225.$

Primjer 15: a) Bez rješavanja jednadžbe $2(x-3)^2 + 4 = 6$ nađite broj njenih rješenja.



b) Bez rješavanja nejednadžbe $2(x-3)^2 + 4 \le 6$ odredite njeno rješenje.

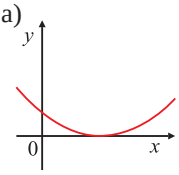
Rješenje:

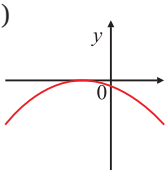
a) Ako $f(x) = 2(x-3)^2 + 4$ shvatimo kao kvadratnu funkciju i skiciramo je te presiječemo pravcem $y = 6$, vidimo da se pravac i parabola sijeku u dvije točke, čije koordinate možemo pročitati, tako da znamo i rješenja: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$.

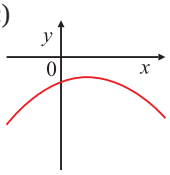
b) S iste slike vidimo da je onaj manji dio parabole ispod pravca $y = 6$ zapravo rješenje tražene nejednadžbe, tj. $x \in [2, 4]$.

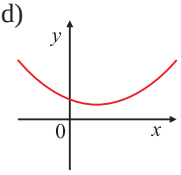
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2007.) Na slikama su grafovi funkcija $f(x) = ax^2 + bx + c$. Za koju od njih vrijedi: a je pozitivno i diskriminanta je negativna?

a) 

b) 

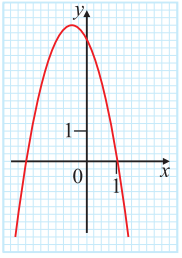
c) 

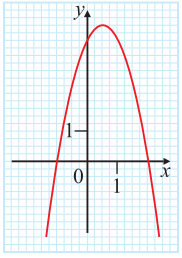
d) 

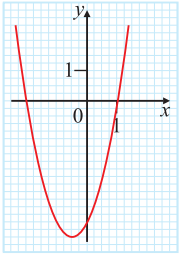
2. (NI 2007.) Pravac $y = x + 1$ i parabola $y = x^2 - 6x + 7$ sijeku se u točkama:
a) (1, 2), (6, 7) b) (2, 1), (7, 6) c) (2, 3), (3, 4) d) (3, 2), (4, 3).

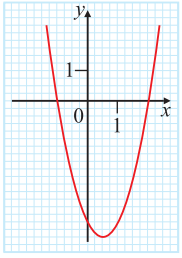
3. (NI 2007.) Koja od navedenih funkcija nema ni jednu nultočku?
a) $f(x) = 2(x - 1)^2$ b) $f(x) = 2(x - 1)^2 + 2$
c) $f(x) = 2(x - 1)^2 - 2$ d) $f(x) = 2(x - 1)(x - 2)$

4. (NI 2007.) Na kojoj je slici prikazan graf funkcije $f(x) = -2(x + 2)(x - 1)$?

a) 

b) 

c) 

d) 

5. (NI 2007.) Računala u jednoj učionici međusobno su povezana optičkim linijama. Ukupan broj optičkih linija određen je funkcijom $l(n) = \frac{n(n-3)}{2} + n$ gdje je n broj računala u učionici. Ako je ukupan broj linija 28, tada je broj računala u učionici jednak:
a) -8 b) -7 c) 7 d) 8.

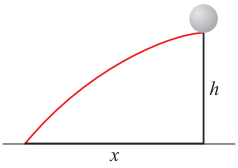
6. (NI 2007.) Funkcija $f(x) = -x^2 + bx + c$ ima nultočke 1 i 7. Maksimalna vrijednost funkcije je:
a) -9 b) 4 c) 9 d) 23.

7. (NI 2007.) Odredite koordinate tjemena grafa funkcije $f(x) = x^2 + 2x - 8$ i sjecišta grafa s koordinatnim osima. Nacrtajte graf funkcije.

8. (NI 2007.) Odredite drugu nultočku funkcije $f(x) = a(x - 3)^2 + 2$, ako je jedna njena nultočka -1.

9. (NI 2007.) Napišite neku kvadratnu funkciju čiji graf prolazi točkom (2, 3).

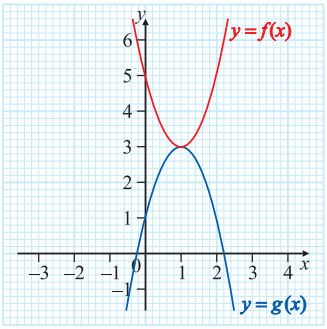
10. (NI 2007.) Na nogometnoj utakmici vratar ispucava loptu. Putanja lopte opisana je funkcijom $h = -0.0126x^2 + 0.635x$, gdje je h visina lopte iznad zemlje, a x horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja. Veličine h i x su izražene u metrima.



a) Na kojoj je visini lopta kad je njezina horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja 15 m?
b) Na kojoj udaljenosti od mjesta ispucavanja lopta pada na zemlju?
c) Koju najveću visinu lopta postiže?

11. (IK 2007.) Funkcija $f(x) = x^2 + 3$ ima:
a) nula nultočaka b) jednu nultočku c) dvije nultočke d) tri nultočke.

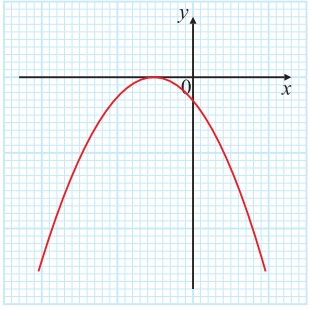
12. (IK 2007.) Na slici su grafovi funkcije $f(x) = (2x - 1)^2 + 3$ i funkcije g. Funkcija g zadana je sa:



a) $g(x) = -(2x - 1)^2 + 3$
b) $g(x) = -2(x + 1)^2 - 3$
c) $g(x) = 2(x + 1)^2 + 3$
d) $g(x) = 2(x - 1)^2 - 3$.

13. (IK 2007.) Putanja lopte opisana je funkcijom $h = -\frac{1}{100}x^2 + \frac{2}{5}x + 1$, gdje je h visina lopte iznad zemlje, a x horizontalna udaljenost od mjesta ispucavanja. Veličine h i x izražene su u metrima. Visina najvišeg položaja lopte iznad zemlje je:
a) 4.5 m b) 5 m c) 9 m d) 10 m.

14. (IK 2007.) Za graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ sa slike vrijedi:



a)

a	*pozitivno*
c	*pozitivno*
diskriminanta	*pozitivna*

b)

a	*negativno*
c	0
diskriminanta	0

c)

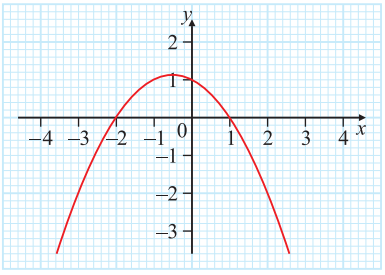
a	*negativno*
c	*negativno*
diskriminanta	0

d)

a	*pozitivno*
c	0
diskriminanta	*negativna*

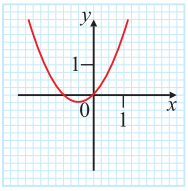
15. (IK 2007.) Izračunajte nultočke funkcije $f(x) = 2x^2 - 6x + 2.5$. Odredite koordinate tjemena njezinoga grafa te nacrtajte graf.

16. (IK 2007.) Odredite koeficijente a, b, c kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ čiji je graf prikazan na slici.

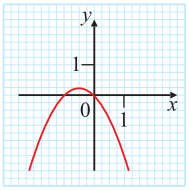


17. (IK 2008.) Na kojoj je slici prikazan graf funkcije $f(x) = -x^2 - x$?

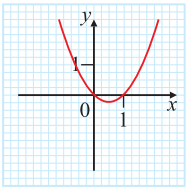
a)



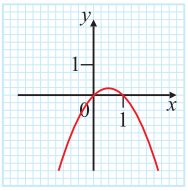
b)



c)

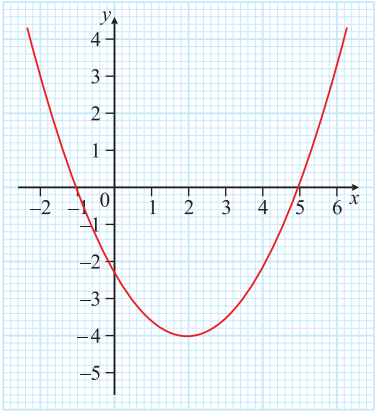


d)



18. (IK 2008.) Zadane su funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$ i $g(x) = -x - 1$. Prikažite njihove grafove u istome koordinatnome sustavu.

19. (NI 2008.) Funkcija čiji je graf prikazan na slici postiže najmanju vrijednost:



a) za $x = 2$
b) za $x = -1$
c) za $x = -2$
d) za $x = -4$.

20. (NI 2008.) U koordinatnome sustavu prikažite graf funkcije $f(x) = -(x + 1)(x - 3)$. Obavezno ucrtajte nultočke i tjeme.

21. (NI 2008.) Nacrtajte grafove funkcija u zadanome koordinatnome sustavu.

a) $f(x) = x^2 - 1$

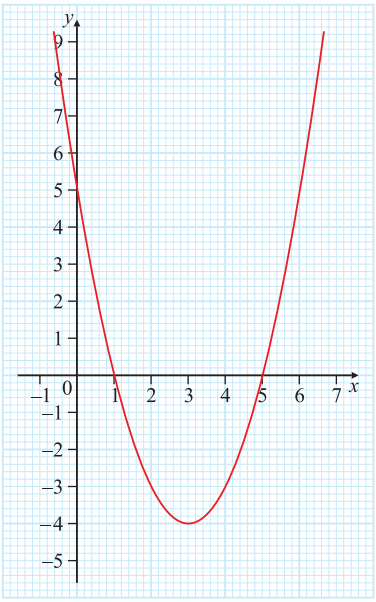
b) $f(x) = |x^2 - 1|$

22. (NI 2008.) Zadana je funkcija $f(x) = ax^2 + 3x - 4.5$.

a) Odredite sjecište grafa funkcije s y-osi.

b) Najveća vrijednost funkcije $f(x) = ax^2 + 3x - 4.5$ jednaka je -1. Odredite a.

23. (NI 2009.) Koju funkciju prikazuje sljedeći graf?



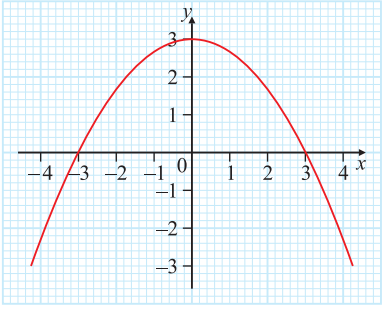
a) $f(x) = (x + 3)^2 + 4$

b) $f(x) = (x + 3)^2 - 4$

c) $f(x) = (x - 3)^2 + 4$

d) $f(x) = (x - 3)^2 - 4$

24. (NI 2009.) Funkcija $f(x) = ax^2 + c$ prikazana je grafom na slici. Koeficijent a jednak je:



a) -3

b) $-\frac{1}{3}$

c) $\frac{1}{3}$

d) 3.

25. (NI 2009.) Temperatura T (u °C) u stakleniku t sati nakon početka sumraka dana je formulom $T(t) = \frac{1}{4}t^2 - 5t + 30$, $0 \le t \le 12$. Uzima se da sumrak počinje u 19:00 sati.

a) Kolika je temperatura bila u 21:00 sat?

b) U koliko je sati temperatura bila minimalna?

c) Koliko je iznosila minimalna temperatura u stakleniku?

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Funkcija $f(x) = (m-2)x^2 + 3x + m + 2$ ima barem jednu nultočku ako realni parametar m pripada intervalu:

a) $\langle -\infty, 2.5\rangle$ b) $\langle 2.5, +\infty\rangle$ c) $[-2.5, 2.5]$ d) $\langle -2.5, 2.5\rangle$.

2. Za koji realni parametar b polinom $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + bx + 5$ poprima najveću vrijednost 13?

a) ± 1 b) ± 2 c) ± 3 d) ± 4

3. Kvadratna funkcija $f(x) = ax^2 + bx + 5$ ima minimum u točki $(1, 4)$. Zbroj nepoznatih koeficijenata funkcije je:

a) -1 b) 1 c) 3 d) 5.

4. Graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ prolazi točkama $A(-1, -16)$, $B(2, -1)$ i $C(3, 0)$. Odredite koordinate tjemena.

a) $M(3, 0)$ b) $M(5, 2)$ c) $M(7, 4)$ d) $M(9, 6)$

5. Najveća vrijednost polinoma $f(x) = ax^2 + bx + c$, čije su nultočke 2 i -4 i $f(1) = 5$, iznosi:

a) 8 b) -1 c) 9 d) 5.

6. Odredite sve parametre $k \in \boldsymbol{R}$ takve da graf funkcije $f(x) = kx^2 - 3x + k$ ima dvije nultočke.

a) $k \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]$ b) $k \in \left\langle -\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right\rangle$

c) $k \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{2}\right\rangle$ d) $k \in \left\langle -\infty, -\frac{9}{4}\right\rangle \cup \left\langle \frac{9}{4}, +\infty\right\rangle$

7. Za koje vrijednosti realnog parametra k graf funkcije $f(x) = x^2 + k^2x + kx + 9$ dodiruje x-os?

a) 3 i 2 b) -3 i -2 c) -3 i 2 d) 3 i -2

8. Ako graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx - 14$ siječe os x u $-\frac{7}{3}$ i 2, tada je apscisa vrha te parabole jednaka:

a) $-\frac{1}{9}$ b) $-\frac{1}{8}$ c) $-\frac{1}{7}$ d) $-\frac{1}{6}$.

9. Odredite realni broj b takav da graf funkcije $f(x) = x^2 + bx + c$ siječe x-os u točkama $(3, 0)$ i $(5, 0)$.

a) -8 b) -10 c) -12 d) -14

10. Graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ dira x-os, y-os siječe u točki s ordinatom 2, te prolazi točkom $A(2, 2)$. Umnožak koeficijenata te parabole je:

a) -12 b) -14 c) -16 d) -18.

11. Graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ siječe os apscisa u 5, a os ordinata u -15, te prolazi točkom $A(-1, -6)$. Zbroj svih koeficijenata te funkcije je:

a) -40 b) -20 c) 0 d) 20.

12. Odredite sve parametre $t \in \boldsymbol{R}$ takve da graf funkcije $f(x) = tx^3 + 2x^2 + x$ ima samo jednu nultočku.

a) $t \in \langle 1, +\infty \rangle$ b) $t \in \langle -\infty, 0 \rangle$

c) $t \in \langle 2, +\infty \rangle$ d) Ne postoji takav $t \in \boldsymbol{R}$.

13. Tjeme parabole $y = 2x - x^2$ je točka:

a) (0, 2) b) (2, –1) c) (1, 1) d) (–1, 2).

14. Za koje $m \in \boldsymbol{R}$ je vrijednost funkcije $f(x) = mx^2 + (2m - 1)x + m + 1$ pozitivna za svaki $x \in \boldsymbol{R}$?

a) $m > \frac{1}{8}$ b) $m < \frac{1}{8}$ c) $0 < m \leq \frac{1}{8}$ d) $m < -\frac{1}{8}$

15. Ako je $f(x) = x^2 - x - 2$, onda je $f(x) \geq 4$ za sve x iz intervala:

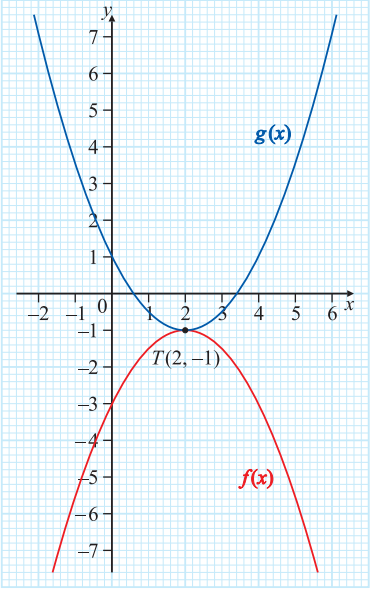
a) $-2 \leq x \leq 3$ b) $x \leq -2$ ili $x \geq 3$

c) $x > -2$ d) $x \leq 3$.

16. Koje su koordinate tjemena parabole zadane formulom $y = 2x^2 + 3$?

a) (2, 3) b) (1, 3) c) (0, 3) d) (–1, 3)

17. Na slici su grafovi funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$ i funkcije g. Funkcija g zadana je sa:



a) $g(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

b) $g(x) = -\frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$

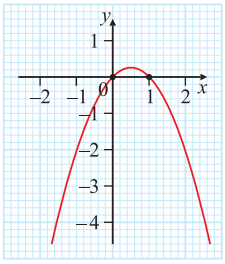
c) $g(x) = \frac{1}{2}(x-2)^2 - 1$

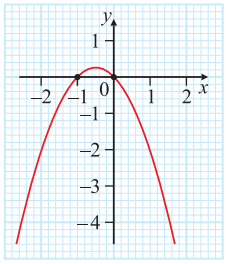
d) $g(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 1$.

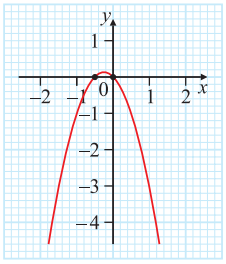
18. Ako je diskriminanta kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ manja od nule, a vodeći koeficijent pozitivan, rješenje nejednadžbe $ax^2 + bx + c < 0$ je:

a) $x \in \varnothing$ b) $x \in \boldsymbol{R}$ c) $x \in \langle -\infty, 3 \rangle$ d) $x = 0$.

19. Na kojoj je slici prikazan graf funkcije $f(x) = -x^2 + x$?

a) 

b) 

c) 

20. Slika funkcije $f(x) = x^2 - 2x - 3$ je skup:

a) $\langle -\infty, -4]$ b) $[-4, 4]$ c) $[-4, +\infty \rangle$ d) $[1, +\infty \rangle$.

21. Funkcija $f(x) = -2x^2 + 6x - \frac{9}{2}$ pada na intervalu:

a) $\langle 0, +\infty \rangle$ b) $\left\langle \frac{3}{2}, +\infty \right\rangle$ c) $\left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right\rangle$ d) $\langle -\infty, 0 \rangle$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Kvadratna funkcija ima minimum ako je koeficijent a _____ .

2. Tjeme parabole $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ je točka T (_____, _____).

3. Parabola $y = -2(x + 3)^2 - 4$ raste na intervalu _____, a tjeme joj je točka T (_____, _____).

4. Navedite međusobne odnose pravca i parabole.

5. Odrediti tijek kvadratne funkcije znači odrediti _____

_____ .

6. Nultočke parabole su točke _____

_____ .

7. Tjeme parabole koja dodiruje x-os nalazi se na _____ .

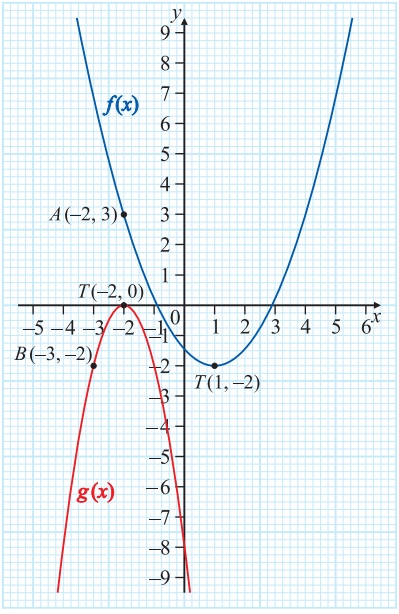
8. Os simetrije parabole je pravac koji _____

_____ .

9. Napišite jednadžbu parabole s tjemenom $T(-2, 1)$ i vodećim koeficijentom 4.

10. Za funkciju $f(x) = x^2 - x + 1$ izračunajte $f(0)$, $f(-1)$, $f(1)$.

11. Odredite jednadžbe kvadratnih funkcija sa slike.



12. Napišite jednadžbu parabole i nacrtajte njezin graf ako ona prolazi točkama $A(2, -1)$, $B(-1, 2)$ i $C(5, 2)$.

13. Zamislite da se graf funkcije $f(x) = -2(x-5)^2 + 4$ pomakne za 8 jedinica udesno i 6 jedinica dolje. Kako bi tada glasila jednadžba funkcije?

14. Graf funkcije $f(x) = 2x^2 - 3x + 4$ ima _____ nultočaka jer je diskriminanta D ☐ 0.

15. Za funkciju $f(x) = 2(x-3)^2 + 1$ vrijedi da je $f(1) = f($_____$)$.

16. U koordinatnom sustavu skicirajte grafove funkcija:

a) $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)^2 - 1$ b) $f(x) = 2x^2 - 3x + 6$.

17. Zadana je kvadratna funkcija $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + x - 4$.

a) Odredite nultočke kvadratne funkcije.
b) Za koji x ova funkcija ima ekstremnu vrijednost? Je li taj ekstrem minimum ili maksimum funkcije? Koliko on iznosi?
c) Nacrtajte graf kvadratne funkcije!
d) Za koje realne brojeve x je $f(x) \geq 0$?

18. Odredite jednadžbu kvadratne funkcije ako je $f(0) = -1$, $f(2) = -12$, $f(-2) = -14$.

19. Odredite jednadžbu parabole ako ima jednu nultočku $x = 1$ i ako os y siječe u točki $(0, 2)$.

20. Odredite sjecište pravca $y = x - 1$ i parabole $y = x^2 + x$.

21. U kojim točkama se sijeku pravac $x - y - 3 = 0$ i parabola $y = \frac{1}{2}x^2 - 2x - 3$?

22. Vozač specijalnog vozila za prijevoz automobila naplaćuje 6 000 kuna za jedan automobil, a za svaki dodatni spušta cijenu za 200 kuna. (Prijevoz jednog automobila košta 6 000 kuna, dva 5 800 po automobilu, tri 5 400 po automobilu, …) Koliko automobila treba uzeti kako bi najviše zaradio? (U vozilo stanu 22 automobila.)

23. Od svih brojeva čiji je zbroj 8 odredite ona dva čiji je umnožak najveći.

24. Za vrijeme oluje pukla je antena na visini od 44 metra i nakon toga je počela padati. Udaljenost antene d od površine zemlje nakon t sekundi dana je formulom $d = -4.88t^2 + 44$.

a) Nacrtajte graf funkcije d za vrijednosti od t, $0 \leq t \leq 3$ (na osi x su vrijednosti t, a na y vrijednosti d). Prilagodite omjer osi x i y kako bi vam taj dio slike stao na graf.
b) Za koliko će sekundi antena pasti na zemlju? (Zaokružite rješenje na dvije decimale.)
c) Izračunajte koliko će sekundi antena biti na visini od 30 metara iznad zemlje? (Zaokružite rješenje na dvije decimale.)

25. Visina u stopama koju postiže loptica za golf nakon što je palicom izbačena u zrak dana je formulom $h = -16t^2 + 64t$, gdje je t broj sekundi nakon udara o lopticu.

a) Nacrtajte graf funkcije h za vrijednosti od t, $0 \leq t \leq 4$ (na osi x su vrijednosti t, a na y vrijednosti h). Spretno izaberite podjelu na osi x i y kako bi vam taj dio slike stao na graf.
b) Koju će najveću visinu postići loptica?
c) Koliko vremena treba loptici da dosegne najveću visinu?
d) Koliko će vremena proći dok loptica ne udari o tlo?
e) Koliko je sekundi loptica na visini većoj od 48 stopa?
f) Označite na grafu i izračunajte sve vrijednosti od t za koje je $h > 48$.

26. U planinarskom domu „Borovnica“ cijene iznajmljivanja soba uobičajeno su 100 kuna po sobi, ali ako dolazi grupa koja će uzeti više soba, cijena se umanjuje za 3 kune po sobi. Na primjer, 1 soba košta 100 kuna, 2 sobe koštaju $2 \cdot 97 = 194$ kune, 3 sobe koštaju $3 \cdot 94 = 282$ kune itd. U domu su 23 sobe.

a) Napišite kvadratnu funkciju C koja izražava cijenu za iznajmljivanje x soba.
b) Koja je konačna cijena za iznajmljivanje 6 soba?
c) Koliko je soba iznajmljeno ako je konačna cijena 730 kuna?
d) S koliko najviše iznajmljenih soba se najviše zarađuje?

27. Cijena y_1, u stotinama kunama po dionici poduzeća „Hitnica“, u periodu od 8 godina rasla je i padala kao i funkcija $y_1 = -x^2 + 8x$, gdje je x vrijeme u godinama. Cijena y_2, u stotinama kunama po dionici mobilnog operatera „Line“, sustavno je pratila tijek funkcije $y_2 = -x + 14$.

a) Nacrtajte grafove obiju funkcija za $0 \leq x \leq 8$.
b) Koja je najveća vrijednost dionica poduzeća „Hitnica“? Kada je vrijednost dionice bila najveća?
c) U koje vrijeme su dionice obiju tvrtki jednako vrijedile i kolika im je bila vrijednost?

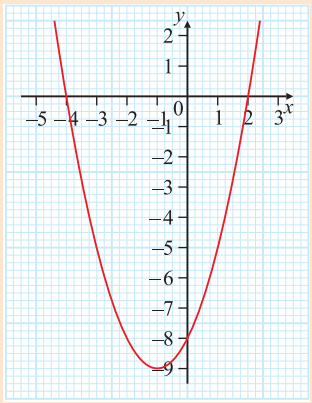
28. Skicirajte graf funkcije $f(x) = \left|\frac{1}{2}x^2 - 4x + 6\right|$. Odredite tijek funkcije.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. d **2.** a **3.** b **4.** a **5.** d **6.** c

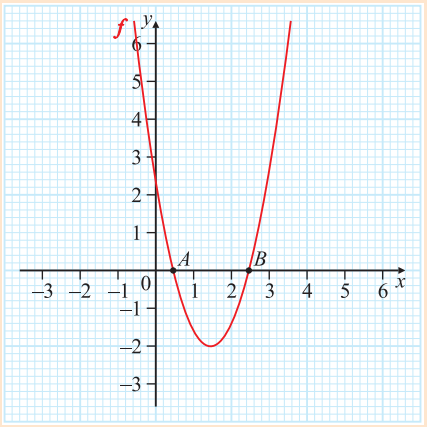
7. $T(-1, -9)$, sjecišta s osi x su $(2, 0)$, $(-4, 0)$, sjecište s osi y $(0, -8)$



8. $x_2 = 7$ **9.** Rješenje nije jedinstveno $f(x) = 2(x-2)^2 + 3$

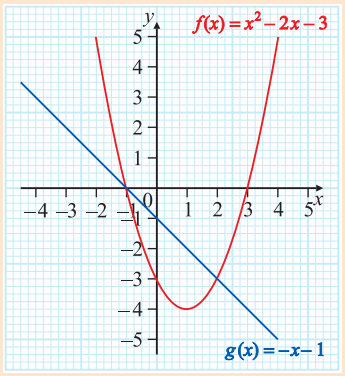
10. a) 6.69 m b) 50.4 m c) 8 m **11.** a **12.** a **13.** b **14.** b

15. Nultočke: $A\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $B\left(\frac{5}{2}, 0\right)$, tjeme: $T\left(\frac{3}{2}, -2\right)$

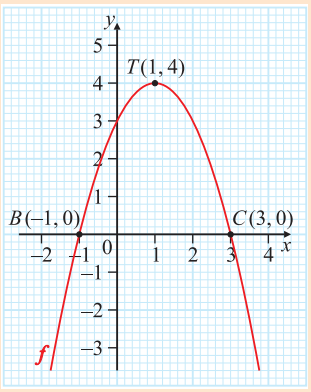


16. $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x + 1$ **17.** b

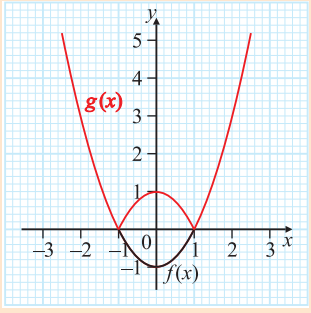
18.



19. a **20.**



21. $f(x) = x^2 - 1$, $g(x) = |x^2 - 1|$



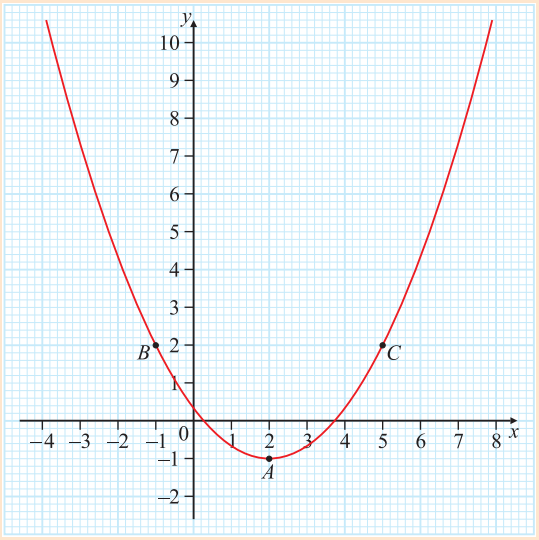
22. a) (0, −4.5) b) $a = -\frac{9}{14}$ **23.** d **24.** b **25.** a) 21° b) 5 c) 5°

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

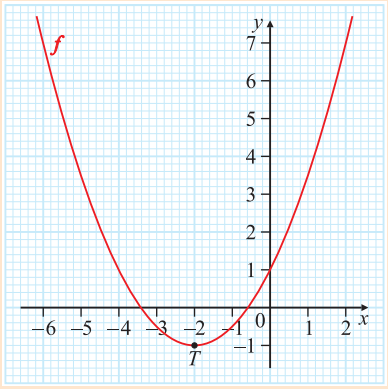
1. c **2.** d **3.** a **4.** a **5.** c **6.** b **7.** c **8.** d **9.** a **10.** c **11.** b
12. a **13.** c **14.** a **15.** b **16.** c **17.** c **18.** a **19.** a **20.** c **21.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

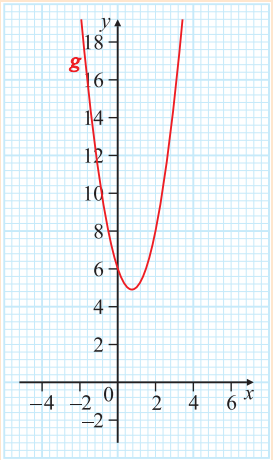
1. $a > 0$ **2.** $T(0, 0)$ **3.** Raste na $\langle -\infty, -3\rangle$, $T(-3, -4)$
4. Pravac i parabola se sijeku u dvije točke, dodiruju u jednoj točki (tangenta), ne sijeku se.
5. Područje rasta i pada funkcije, minimum ili maksimum i njene nultočke.
6. U kojima parabola siječe x-os
7. x-osi
8. Prolazi kroz tjeme parabole okomito na x-os.
9. $y = 4(x + 2)^2 + 1$ **10.** $f(0) = 1, f(-1) = 3, f(1) = 1$
11. $f(x) = \frac{5}{9}(x-1)^2 - 2, \quad g(x) = -2(x+2)^2$
12. $f(x) = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{1}{3}$



13. $f(x) = -2(x - 13)^2 - 2$
14. Graf funkcije ima 0 nultočaka jer je $D = -23 < 0$.
15. $f(1) = f(5)$
16. a)



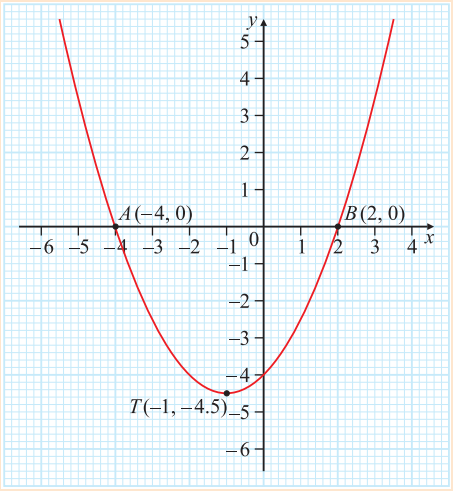
b)



17. a) $x_1 = 2,\ x_2 = -4$

b) $x_0 = \dfrac{-1}{2 \cdot \dfrac{1}{2}} = -1 \Rightarrow$ minimum, $y_0 = f(-1) = -\dfrac{9}{2}$

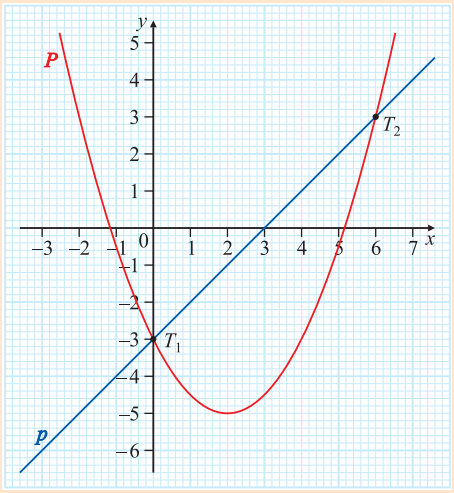
c)



d) $f(x) \geq 0 \Rightarrow x \in \langle -\infty, -4] \cup [2, \infty \rangle$

18. $f(x) = -3x^2 + \dfrac{1}{2}x - 1$ **19.** $f(x) = 2x^2 - 4x + 2$ **20.** Ne sijeku se.

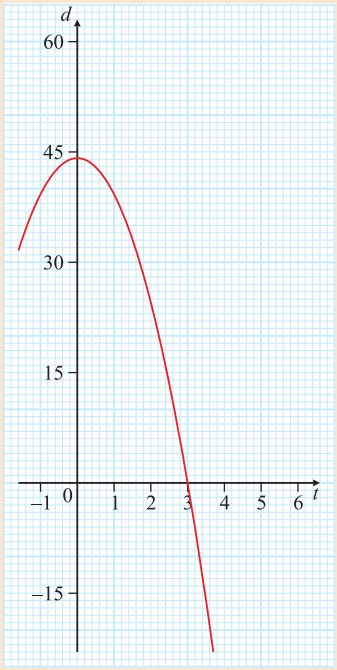
21. $T_1(0, -3),\ T_2(6, 3)$



22. Najviše mu se isplati uzeti 14 ili 15 automobila.
(Uputa: Za x-ti automobil naplaćuje $6\,000 - 200(x-1)$
$\Rightarrow \quad f(x) = x\big(6\,000 - 200(x-1)\big) \quad \Rightarrow \quad f(x) = -200x^2 + 5\,800x$
$\Rightarrow \quad x_0 = -\dfrac{5\,800}{2 \cdot (-200)} \quad \Rightarrow x_0 = 14.5$
Zarada je: $f(14) = f(15) = -200\,(15)^2 + 5\,800\,(15) = 42\,000$ kuna

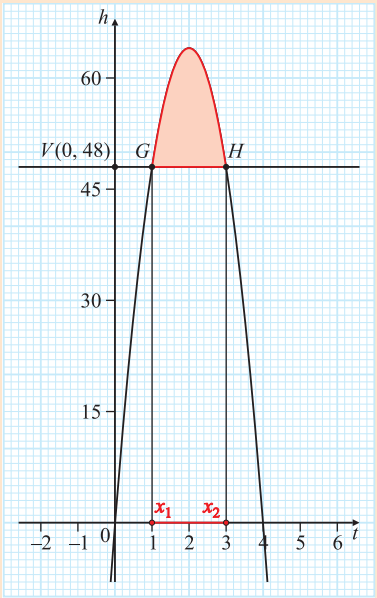
23. To su brojevi 4 i 4.

24. a)



b) Nakon 3 sekunde.
c) Nakon 1.69 sekundi.

25. a)



b) Vidimo sa slike da će najveću vrijednost postići u tjemenu za

$$x_0 = -\frac{64}{-16 \cdot 2} = 2, \quad y_0 = f(2) = -16 \cdot 4 + 64 \cdot 2 = 64$$

c) Treba joj 2 sekunde $x_0 = 2$.
d) 4 sekunde
e) 2 sekunde
f) $-16t^2 + 64t > 48 \Rightarrow t \in \langle 1, 3 \rangle$

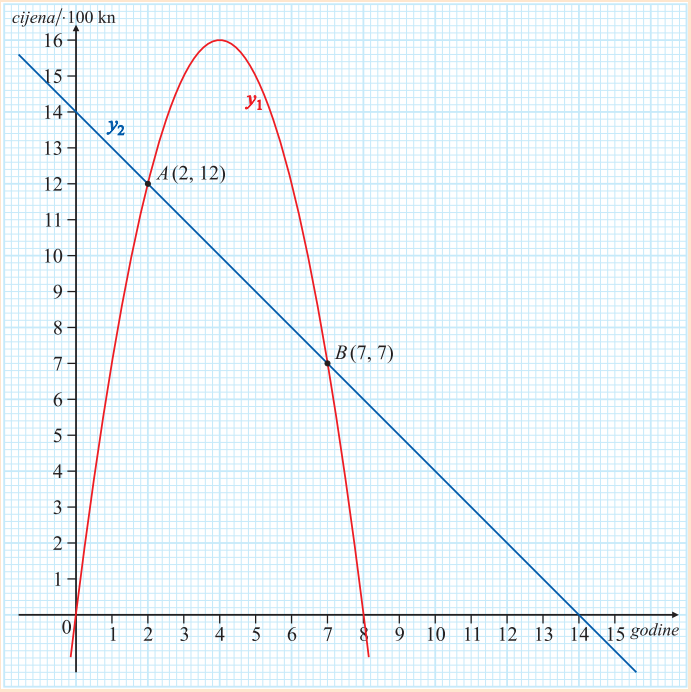
26. a) $C(x) = x\big(100 - 3(x-1)\big) = -3x^2 + 103x$

b) 510 kuna

c) 10 soba

d) $x_0 = 17.1\dot{6} \approx 17$ soba

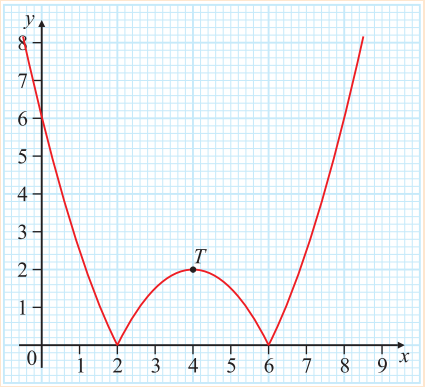
27. a)



b) $x_0 = 4$, $y_0 = 16$. Najveća cijena je 400 kuna, a bila je prije 4 godine.

c) Prije 6 godina su dionice vrijedile 1200 kuna i prije 1 godine su vrijedile 700 kuna.

28.



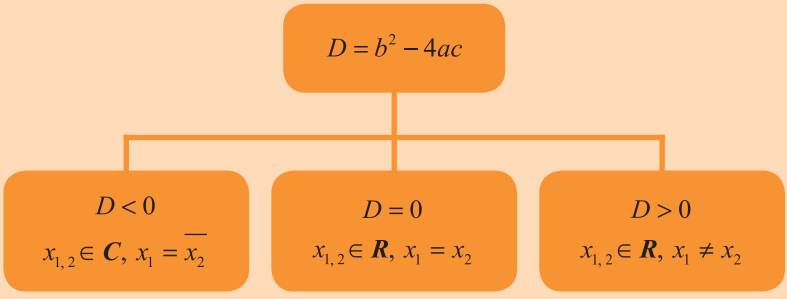
x	$-\infty$	↗	$x_1 = 2$	↗	$x_0 = 4$	↗	$x_2 = 6$	↗	$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	$y_1 = 0$	↗	$y_0 = 2$	↗	$y_2 = 0$	↗	$+\infty$

2.4.2. Kvadratna jednadžba

Jednadžbu oblika $ax^2 + bx + c = 0,\ a, b, c \in \boldsymbol{R}, a \neq 0$ nazivamo **kvadratna jednadžba**. Koeficijent a nazivamo vodeći, b linearni i c slobodni član (koeficijent). Rješenja $x_{1,2}$ zovemo još i korijeni kvadratne jednadžbe.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Broj i priroda rješenja ovise o diskriminanti, $D = b^2 - 4ac$.



Rješenja su konjugirano-kompleksni brojevi.

Rješenja su realna i jednaka.

Rješenja su realni i različiti brojevi.

Zbroj rješenja kvadratne jednadžbe je $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$, a umnožak $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$ (Vièteove formule).

Svaki algebarski izraz $ax^2 + bx + c$ može se, koristeći rješenja x_1, x_2 kvadratne jednadžbe $ax^2 + bx + c = 0$, napisati u obliku umnoška:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

Bikvadratna jednadžba oblika $ax^4 + bx^2 + c = 0$, rješava se kao i kvadratna uz zamjenu $t = x^2$.

Primjer 1: Riješimo sljedeće kvadratne jednadžbe:

a) $3x^2 + 4x = 0$ b) $16x^2 - 4 = 0$ c) $x^2 - 2x - 15 = 0$.

Rješenje: a) Ovakvu nepotpunu kvadratnu jednadžbu rješavamo tako da prvo izlučimo x.

$$3x^2 + 4x = 0 \ \Rightarrow\ x(3x + 4) = 0 \ \Rightarrow\ x_1 = 0,\ x_2 = -\frac{4}{3}.$$

b) Ovo je također nepotpuna kvadratna jednadžba i rješavamo je ovako:

$$16x^2 - 4 = 0 \ \Rightarrow\ 16x^2 = 4 \,/\, :16$$

$$\Rightarrow\ x^2 = \frac{1}{4} \,/\, \sqrt{\ } \ \Rightarrow\ x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}.$$

c) $x^2 - 2x - 15 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-15)}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{64}}{2}$$

$$x_1 = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

$$x_2 = \frac{2 - 8}{2} = \frac{-6}{2} = -3$$

Primjer 2: Riješimo jednadžbu $\frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1} + \frac{2(x-2)}{x+2} = \frac{5(x^2 - x - 1)}{x^2 - 1}$.

Rješenje: $\frac{3x^2 + 2}{x^2 - 1} + \frac{2(x-2)}{x+2} = \frac{5(x^2 - x - 1)}{x^2 - 1}$

$\frac{2(x-2)}{x+2} = \frac{5x^2 - 5x - 5 - 3x^2 - 2}{x^2 - 1}$ uvjeti: $x \neq -2$, $x \neq 1$, $x \neq -1$

$\frac{2x-4}{x+2} = \frac{2x^2 - 5x - 7}{x^2 - 1} \;/ \cdot (x+2)(x^2 - 1)$

$(2x-4)(x^2 - 1) = (x+2)(2x^2 - 5x - 7)$

$\cancel{2x^3} - 2x - 4x^2 + 4 = \cancel{2x^3} - 5x^2 - 7x + 4x^2 - 10x - 14$

$-3x^2 + 15x + 18 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-15 \pm \sqrt{15^2 + 216}}{-6} = \frac{-15 \pm 21}{-6}$$

$x_1 = -1$ (ne može biti zbog uvjeta)

$x_2 = 6$

Primjer 3: Dana je kvadratna jednadžba $2(k-2) = (x+k)^2$, $k \in \boldsymbol{R}$. Za koje k ova jednadžba nema realna rješenja?

Rješenje: $2(k-2) = (x+k)^2$

$2k - 4 = x^2 + 2kx + k^2$

$x^2 + 2kx + k^2 - 2k + 4 = 0 \Rightarrow a = 1,\ b = 2k,\ c = k^2 - 2k + 4$

$D = (2k)^2 - 4(k^2 - 2k + 4) = 4k^2 - 4k^2 + 8k - 16 = 8k - 16$

$D < 0 \Rightarrow 8k - 16 < 0 \quad \Rightarrow \quad k < 2$

Primjer 4: Napišimo kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima ako su njena rješenja 4 i –3.

Rješenje: Koristimo Viéteove formule.

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad 4 - 3 = -\frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = -1$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad 4 \cdot (-3) = \frac{c}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{c}{a} = -12$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - x - 12 = 0.$

Primjer 5: Napišimo kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima ako je broj $1 + \frac{\sqrt{3}}{i}$ jedno njezino rješenje.

Rješenje: Racionalizirajmo dano rješenje.

$$x_1 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{i} \cdot \frac{-i}{-i} = 1 - \sqrt{3}i \quad \Rightarrow \quad x_2 = 1 + \sqrt{3}i$$

Iz Viètеovih formula slijedi:

$$-\frac{b}{a} = \left(1 - \sqrt{3}i\right) + \left(1 + \sqrt{3}i\right) \Rightarrow \frac{b}{a} = -2 \quad \text{i}$$

$$\frac{c}{a} = \left(1 - \sqrt{3}i\right) \cdot \left(1 + \sqrt{3}i\right) = 1 + 3 = 4.$$

Uvrštavanjem u jednadžbu $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0.$

Primjer 6: Skratimo razlomak $\frac{6x^2 + 23x + 21}{15 + 7x - 2x^2}$.

Rješenje: Rješenja jednadžbe $6x^2 + 23x + 21 = 0$ su $x_1 = -\frac{3}{2}$ i $x_2 = -\frac{7}{3}$, a jednadžbe $15 + 7x - 2x^2 = 0$ su $x_1 = -\frac{3}{2}$ i $x_2 = 5$.

Zapišimo izraze u obliku umnoška $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$ i skratimo.

$$\frac{6x^2 + 23x + 21}{15 + 7x - 2x^2} = \frac{6\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{7}{3}\right)}{-2\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 5)} = \frac{3\left(x + \frac{7}{3}\right)}{-(x - 5)} = \frac{3x + 7}{5 - x}$$

Primjer 7: Odredite vrijednost realnog broja k tako da rješenja kvadratne jednadžbe $2x^2 + 5x - k - 3 = 0$ budu recipročni brojevi.

Rješenje: Rješenja su recipročni brojevi:

$$x_1 = \frac{1}{x_2} \Rightarrow x_1 x_2 = 1.$$

Iz Viètеove formule $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$ slijedi:

$$\frac{c}{a} = 1 \Rightarrow a = c \Rightarrow -k - 3 = 2 \Rightarrow k = -5.$$

Primjer 8: Riješimo bi kvadratnu jednadžbu $4x^4 + 7x^2 - 2 = 0$.

Rješenje: Uvedimo zamjenu $x^2 = t$.

$$4t^2 + 7t - 2 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 32}}{8}$$

$$t_{1,2} = \frac{-7 \pm 9}{8}$$

$$t_1 = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \pm\frac{1}{2}$$

$$t_2 = -2 \quad \Rightarrow \quad x_{3,4} = \pm\sqrt{2}i$$

Primjer 9: Zbroj dvaju brojeva je 2, a zbroj njihovih kvadrata je 10. Odredimo ta dva broja.

Rješenje: $x + y = 2$

$$\underline{x^2 + y^2 = 10}$$

$$x = 2 - y$$

$$\underline{x^2 + y^2 = 10}$$

$$(2 - y)^2 + y^2 = 10$$

$$4 - 4y + y^2 + y^2 - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad 2y^2 - 4y - 6 = 0 \,/ : 2$$

$$\underline{y^2 - 2y - 3 = 0}$$

$$y_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2} = \frac{2 \pm 4}{2} \quad \Rightarrow y_1 = 3,\ y_2 = -1$$

$$\Rightarrow \ (-1, 3), (3, -1)$$

Traženi brojevi su 3 i –1.

Primjer 10: Zbroj kvadrata dvaju uzastopnih prirodnih brojeva je 2 113. Odredimo te brojeve!

Rješenje: Mnogi problemski zadaci svode se na rješavanje kvadratne jednadžbe.

Dva uzastopna prirodna broja su n i $n + 1$.

$$n^2 + (n+1)^2 = 2\,113$$

$$n^2 + n^2 + 2n + 1 = 2\,113$$

$$2n^2 + 2n - 2\,112 = 0 \,/ : 2$$

$$n^2 + n - 1\,056 = 0$$

$$n_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\,224}}{2} = \frac{-1 \pm 65}{2}$$

$$n_1 = 32$$

$n_2 = -33 < 0$ (ne može biti rješenje)

Traženi brojevi su 32 i 33.

Primjer 11: Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} x+y=41 \\ x^2+y^2=29^2. \end{cases}$

Rješenje: Da bismo riješili sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice, odabrat ćemo jednostavniju (najčešće linearnu) jednadžbu i izrazimo jednu nepoznanicu $x = 41 - y$, te ju uvrstimo u drugu jednadžbu.

$(41-y)^2 + y^2 = 29^2$

$1681 - 82y + y^2 + y^2 = 841$

$2y^2 - 82y + 840 = 0 \ / :2$

$y^2 - 41y + 420 = 0$

$y_1 = 20 \Rightarrow x_1 = 41 - 20 \Rightarrow x_1 = 21$

$y_2 = 21 \Rightarrow x_2 = 41 - 21 \Rightarrow x_2 = 20$

Rješenja zapisujemo kao uređene parove (21, 20), (20, 21).

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2007.) Ako je jedno rješenje jednadžbe $3x^2 + 2mx - 1 = 0$ jednako 2, tada je m jednako:

a) $\frac{11}{4}$ b) $\frac{5}{2}$ c) $-\frac{11}{4}$ d) $-\frac{5}{2}$.

2. (IK 2007.) Koja od ovih jednadžbi ima rješenja $x_1 = 0$ i $x_2 = 3$?

a) $x^2 + x + 6 = 0$ b) $x^2 - x + 6 = 0$

c) $x^2 + x - 6 = 0$ d) Niti jedna od ponuđenih.

3. (IK 2007.) Jednadžba $2x^2 - 3x + k = 0$ ima samo jedno rješenje ako je:

a) $6 - 4k = 0$ b) $6 + 8k = 0$ c) $9 + 4k = 0$ d) $9 - 8k = 0$.

4. (IK 2007.) Riješite jednadžbu $2x^2 - 5x - 12 = 0$.

5. (NI 2007.) Zbroj rješenja jednadžbe $\frac{1}{3}(x-1)^2 - 3 = 0$ je:

a) -6 b) -2 c) 2 d) 6.

6. (NI 2007.) Ako je $x_1 = 3$ jedno rješenje jednadžbe $2(x - 3m)(x + 5) = 0$, tada je m jednako:

a) -3 b) -1 c) 1 d) 3.

7. (NI 2007.) Odredite vrijednost realnoga broja k tako da rješenja jednadžbe $2x^2 + (k - 3)x - 5 = 0$ budu suprotni brojevi.

8. (NI 2008.) Riješite jednadžbu $2x^2 - 3x - 2 = 0$.

9. (NI 2009.) Ako su -1 i $\frac{3}{5}$ rješenja jednadžbe $5x^2 + kx - 3 = 0$, koliko je k?

a) $k = 2$ b) $k = 1$ c) $k = -1$ d) $k = -2$

10. (NI 2009.) Riješite jednadžbu $2x^2 + 5x + 2 = 0$.

11. (NI 2009.) Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2 - 3x + 2 = 0$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Odredite vrijednost koeficijenta c jednadžbe $x^2 + 14x + c = 0$ tako da razlika njezinih rješenja bude 6.

a) 32 b) 36 c) 40 d) 44

2. Ako su x_1, x_2 rješenja jednadžbe $x^2 - 4x + 9 = 0$, onda izraz $(x_1 - x_2)^2$ ima vrijednost:

a) -45 b) -20 c) 0 d) 15.

3. Koji od ponuđenih odgovora nije rješenje sustava $\begin{cases} x^2 + y = 13 \\ x^2 + y^2 = 25 \end{cases}$?

a) $(-3, 4)$ b) $(4, -3)$ c) $(-4, 3)$ d) $(-4, -3)$

4. Kvadratna jednadžba kojoj je jedno rješenje $2 - i\sqrt{3}$ je:

a) $x^2 + 4x + 7 = 0$ b) $x^2 + 7 = 0$
c) $x^2 - 4x + 7 = 0$ d) $x^2 + 4x - 7 = 0$.

5. Zbroj kvadrata rješenja jednadžbe $4x^2 + 5x + m = 0$ jednak je 1. Kolika je vrijednost broja m?

a) 6 b) $\frac{1}{4}$ c) $\frac{9}{8}$ d) 2

6. Da bi jednadžba $2x^2 - (4a+1)x + 3(2a-1) = 0$ imala dva realna različita rješenja, parametar a mora biti:

a) $a \neq \frac{4}{5}$ b) $a < 1$ c) $a > 2$ d) $a \neq \frac{5}{4}$.

7. Odredite kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima čije je jedno rješenje $\frac{2-4i}{2+4i}$.

a) $6x^2 + 6x + 5 = 0$ b) $x^2 + 9x + 25 = 0$
c) $5x^2 + 6x + 5 = 0$ d) $5x^2 - 6x - 5 = 0$

8. Koeficijent b kvadratne jednadžbe $x^2 + bx + c = 0$ kojoj su rješenja $\frac{3}{2}$ i $\frac{2}{3}$ jednak je:

a) $-\frac{7}{6}$ b) $-\frac{11}{6}$ c) $-\frac{13}{6}$ d) $-\frac{17}{6}$.

9. Odredite kvadratnu jednadžbu s realnim koeficijentima čije je jedno rješenje $\frac{1}{i\sqrt{b}-1}$, $b \in \boldsymbol{R}$, $b \geq 0$.

a) $(1+b)x^2 + 2x + 1 = 0$ b) $(1+b)x^2 + 2x + (1+b) = 0$

c) $\frac{2}{1+b}x^2 + x + \frac{1}{1+b} = 0$ d) $(1+b)x^2 + 2x + \frac{1}{(1+b)} = 0$

10. Skup svih rješenja jednadžbe $x^2 - 11x + 43 = 25$ je:

a) $\{2\}$ b) $\{2, 9\}$

c) $\{9\}$ d) $\left\{\frac{11+\sqrt{57}}{2}, \frac{11-\sqrt{57}}{2}\right\}$.

11. Zadani su skupovi $A = \{x \in \boldsymbol{R} : 2x^2 - 5x + 2 = 0\}$ i $B = \{x \in \boldsymbol{R} : x - 2 < 0\}$. Skup $A \cap B$ je:

a) $\{2\}$ b) $\left\{2, \frac{1}{2}\right\}$ c) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ d) $\{0\}$.

12. Jednadžba $2x^2 - 2x + 2 = 3x$ ima:

a) produkt korijena negativan b) sumu korijena -5

c) dvostruki korijen d) recipročne korijene.

13. Ako je umnožak korijena jednadžbe $8(x^2 - 1) = (m-2)x - m$ jednak -1, onda je m :

a) 2 b) 0 c) -2 d) 8.

14. Rješenja jednadžbe $ax^2 + c = 0$ su:

a) recipročni brojevi b) suprotni brojevi

c) jednaki brojevi d) jednadžba nema rješenja.

15. Ako su rješenja kvadratne jednadžbe 2 i 3, odredite zbroj koeficijenata b i c jednadžbe $2x^2 + bx + c = 0$.

a) 22 b) -22 c) 2 d) -2

16. Rješenje jednadžbe $x + \sqrt{x^2 + 5} = 5$ nalazi se u intervalu:

a) $[-6, -2]$ b) $[-5, -1]$ c) $[-2, 2]$ d) $[-4, 0]$

17. Rješenja jednadžbe $\sqrt{2x^2 - x} = x - 2$ pripadaju skupu:

a) $[-4, 1]$ b) $[-2, 0]$ c) $[0, 4]$ d) $\varnothing$.

18. Ako je jedan korijen bikvadratne jednadžbe 2, a drugi $2\sqrt{2}$, tada ta jednadžba glasi:

a) $x^4 - 8\sqrt{2}x^2 + 8\sqrt{2} = 0$ b) $x^4 - 10\sqrt{2}x^2 + 8\sqrt{2} = 0$

c) $x^4 + 12\sqrt{2}x^2 + 8\sqrt{2} = 0$ d) $x^4 - 12x^2 + 32 = 0$.

19. U kinodvorani svaki red sjedala ima jednak broj stolaca. Broj redova jednak je broju stolaca u jednom redu. Kad bi se udvostručio broj redova, a smanjio broj stolaca za 10 u svakom redu, onda bi se broj sjedećih mjesta u dvorani povećao za 300. Koliko redova ima u dvorani?

a) 28 b) 34 c) 36 d) 30

20. Rješenje jednadžbe $\frac{3x-1}{3x^2+9x}-\frac{x-1}{2x^2-6x}=\frac{x-2}{2x^2-18}$ je:

a) $\frac{3}{4}$ b) 3

c) -3 d) Ima beskonačno mnogo rješenja.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Koeficijent a u jednadžbi $ax^2 + bx + c$ nazivamo _____

_____ .

2. Odredite umnožak rješenja jednadžbe $-2x^2 + 5x + 7 = 0$.

3. Ako je diskriminanta jednaka nuli, rješenja kvadratne jednadžbe su

_____ .

4. Nadopunite simetričnu jednadžbu $10x^3 + 7x^2$ _____ $= 0$.

5. Ako su rješenja kvadratne jednadžbe jednaka 4 i -3, jednadžba glasi

_____ .

6. Koristeći diskriminantu $D = b^2 - 4ac$, odgovorite je li kvadratna jednadžba $2x^2 - 4x + 3 = 0$ rješiva u skupu realnih brojeva.

7. Riješite jednadžbu $8x^2 - 2x - 1 = 0$.

8. Riješite jednadžbu $\frac{2x+3}{x}-\frac{2x}{x+3}=2$.

9. Riješite jednadžbu $y^4 - 9y^2 + 8 = 0$.

10. Za koju vrijednost realnog parametra a jednadžba $x^2 + x - a + 4 = 0$ ima konjugirano-kompleksna rješenja?

11. Skratite razlomak $\frac{x^2-22x+40}{x^2-5x+6}$.

12. Koju vrijednost ima parametar m u jednadžbi $2x^2-(2m+1)x+m^2-9m+39=0$ ako je jedno rješenje dva puta veće od drugog?

13. Riješite sustave jednadžbi.

a) $\begin{cases} xy=2 \\ x+y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x+y=18 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{4} \end{cases}$ c) $\begin{cases} x+y=20 \\ xy=96 \end{cases}$

14. Odredite parametar $a \in \boldsymbol{R}$, $a \neq 0$, takav da je zbroj rješenja jednadžbe $(2x-1)^2=2\left(x-\frac{1}{a}\right)$ jednak šesterostrukom umnošku tih rješenja.

15. Odredite realni broj c tako da jedan korijen jednadžbe $x^2+x+c=0$ bude dva puta veći od drugog.

16. Ako su x_1 i x_2 i rješenja jednadžbe $5x^2-x+2=0$, odredite $x_1^3+x_2^3$.

17. Jedno rješenje kvadratne jednadžbe $ax^2+bx=0$ jednako je _____ .

18. Riješite jednadžbu: $\sqrt{x^2-2x}=\sqrt{3x-6}$.

19. Riješite jednadžbu u skupu $\boldsymbol{Z}$: $\sqrt{x-3}=2\sqrt{x}-\sqrt{2x+1}$.

20. Riješite jednadžbu $x^4-5x^2+6=0$ u skupu: a) $\boldsymbol{Z}$, b) $\boldsymbol{Q}$, c) $\boldsymbol{R}$.

21. Rastavite broj 53 na dva pribrojnika čiji je umnožak 700.

22. Hipotenuza pravokutnog trokuta dulja je za 2 cm od jedne katete, a za 4 cm od druge katete. Kolika je duljina hipotenuze tog trokuta?

23. Biciklisti Ana i Dado voze putem dugačkim 72 km. Prosječna brzina kojom vozi Dado je za 1.5 km/h veća od one kojom vozi Ana. Dado stiže do kraja puta 1 sat i 36 minuta prije Ane. Kojom prosječnom brzinom vozi Ana?

24. Radeći zajedno, Ana i Marko mogu obojiti dnevnu sobu za 4 sata. Ako radi sam, Marko će trebati 6 sati više nego Ana, ako radi sama. Koliko svakome od njih treba vremena ako rade sami?

25. Grupa studenata iznajmi autobus koji će ih odvesti na bučijadu u Ivanić Grad. Cijena autobusa je 720 kuna. Ako im se pridruži još 6 studenata, svaki student će platiti 4 kune manje. Koliko je studenata u grupi?

26. Osnovica trokuta je za 2 cm manja od dvostruke visine na osnovicu. Ako je površina trokuta 110 cm^2, kolike su duljina osnovice i visine na osnovicu?

27. Zbroj broja i njegove recipročne vrijednosti iznosi 2. Koji je to broj?

28. Napišite kvadratnu jednadžbu čije je jedno rješenje 5.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. c **2.** d **3.** d **4.** $x_1 = 4,\ x_2 = -\frac{3}{2}$ **5.** c **6.** c **7.** $k = 3$

8. $x_1 = 2,\ x_2 = -\frac{1}{2}$ **9.** a **10.** $x_1 = 2,\ x_2 = \frac{1}{2}$ **11.** $x_1 = 2,\ x_2 = 1$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** b **3.** c **4.** c **5.** c **6.** d **7.** c **8.** c **9.** a **10.** b
11. c **12.** d **13.** b **14.** b **15.** c **16.** c **17.** d **18.** d **19.** d **20.** 3/4

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. vodeći koeficijent **2.** $-\frac{7}{2}$ **3.** realna i jednaka **4.** „ $+7x+10$ ”

5. $x^2 - x - 12 = 0$ **6.** ne **7.** $x_1 = \frac{1}{2},\ x_2 = -\frac{1}{4}$ **8.** $x_1 = 3,\ x_2 = -\frac{3}{2}$

9. $y_{1,2} = \pm 1,\ y_{3,4} = \pm 2\sqrt{2}$ **10.** $a < \frac{15}{4}$ **11.** $\frac{x-20}{x-3}$ **12.** $m_1 = 7,\ m_2 = 10$

13. a) (–2, –1), (–1, –2) b) (12, 6), (6, 12) c) (12, 8), (8, 12)

14. takav a ne postoji **15.** $\frac{2}{9}$ **16.** $-\frac{29}{125}$ **17.** 0 ili $-\frac{b}{a}$

18. $x_1 = 3,\ x_2 = 2$ **19.** $x = 4$ **20.** a) $\varnothing$, b) $\varnothing$, c) $x_{1,2} = \pm\sqrt{2},\ x_{3,4} = \pm\sqrt{3}$

21. Traženi brojevi su 25 i 28.
22. 10
23. Ana vozi prosječnom brzinom od 7.5 km/h.
24. Ani treba 6, a Marku 12 sati da oboji dnevnu sobu.
25. U grupi je 30 studenata.
26. $v_a = 11$ cm, $a = 20$ cm
27. Taj broj je 1.
28. Svaka jednadžba oblika $a\left(x^2 - x\left(5 + x_1\right) + 5x_1\right) = 0$, kao $3x^2 - 21x + 30 = 0,\ \ x^2 - 2x - 15 = 0$

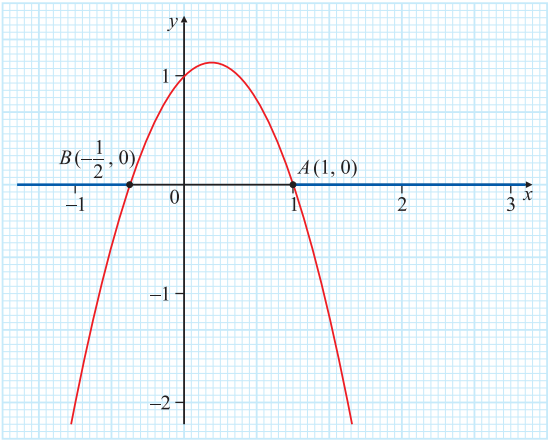
2.4.3. Kvadratna nejednadžba

Za rješavanje kvadratne nejednadžbe pomoći će nam poznavanje grafa kvadratne funkcije. Vrijednosti parabole su pozitivne iznad osi x, a negativne ispod te osi.

Primjer 1: Riješimo nejednadžbu $-2x^2 + x + 1 \leq 0$.

Rješenje: Skicirajmo graf kvadratne funkcije $f(x) = -2x^2 + x + 1$. Za rješavanje nejednadžbe dovoljna je skica u kojoj su istaknute nultočke parabole. Nultočke ćemo izračunati tako da riješimo pripadnu kvadratnu jednadžbu $-2x^2 + x + 1 = 0$.

Rješenja su $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$. Skicirajmo parabolu.



Vidimo da je parabola svojim manjim dijelom iznad x-osi (pozitivna), a na preostalim dijelovima je negativna. Gledamo gdje je $f(x) \leq 0$, dakle gdje je funkcija negativna i jednaka nuli. Čitamo za koje vrijednosti x je parabola negativna (plavo označeni dijelovi x-osi) i vidimo da je to na intervalima $x \in \left\langle -\infty, -\frac{1}{2} \right] \cup \left[1, +\infty \right\rangle$ što je i rješenje naše nejednadžbe.

Primjer 2: Riješimo nejednadžbe: a) $x^2 - 2x + 3 \leq 0$; b) $x^2 - 2x + 3 > 0$.

Rješenje: a) Nađimo nultočke parabole $x^2 - 2x + 3 = 0$.

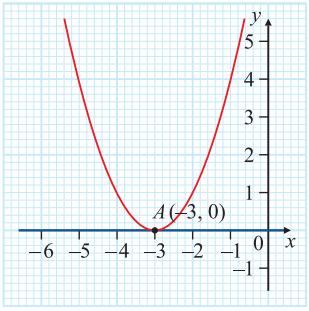
$$x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{2}$$

Dobili smo negativnu diskriminantu → ova parabola nema nultočaka, a vodeći koeficijent je pozitivan, te zaključujemo da je ona u cijelosti iznad osi x. Parabola je pozitivna za svaki realan broj x, a mi tražimo gdje je $f(x) \leq 0$. Zaključujemo da ova nejednadžba nema rješenja: $x \in \emptyset$.

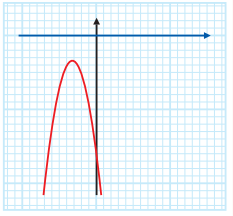
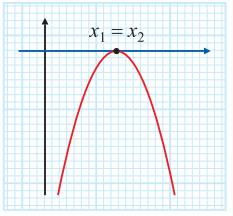
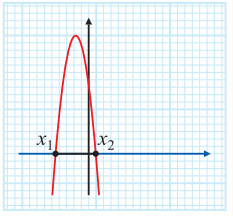
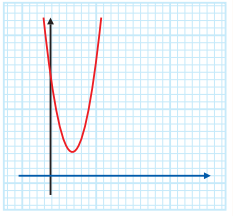
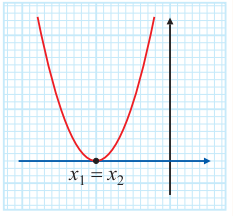
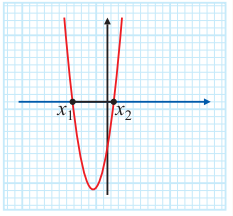
b) Iz primjera a) odmah vidimo da je $x \in \boldsymbol{R}$ rješenje nejednadžbe $x^2 - 2x + 3 > 0$.

Primjer 3: Riješimo nejednadžbu $x^2 + 6x + 9 \geq 0$.

Rješenje: Izraz $x^2 + 6x + 9$ prepoznajemo kao $(x + 3)^2$ što znači da ova parabola ima jednu nultočku $x = -3$. Vidimo da je cijela parabola, osim tjemena, iznad osi x, te zaključujemo da je rješenje cijeli skup realnih brojeva, $x \in \boldsymbol{R}$.



RJEŠENJA KVADRATNIH NEJEDNADŽBI U OVISNOSTI O VODEĆEM KOEFICIJENTU I DISKRIMINANTI PRIPADNE KVADRATNE JEDNADŽBE

	$D < 0$	$D = 0$	$D > 0$
$a < 0$			
$f(x) < 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R} \setminus \{x_1\}$	$x \in \langle -\infty, x_1 \rangle \cup \langle x_2, +\infty \rangle$
$f(x) \leq 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \langle -\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty \rangle$
$f(x) > 0$	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$	$x \in \langle x_1, x_2 \rangle$
$f(x) \geq 0$	$x \in \varnothing$	$x \in \{x_1\}$	$x \in [x_1, x_2]$
$a > 0$			
$f(x) < 0$	$x \in \varnothing$	$x \in \varnothing$	$x \in \langle x_1, x_2 \rangle$
$f(x) \leq 0$	$x \in \varnothing$	$x \in \{x_1\}$	$x \in [x_1, x_2]$
$f(x) > 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R} \setminus \{x_1\}$	$x \in \langle -\infty, x_1 \rangle \cup \langle x_2, +\infty \rangle$
$f(x) \geq 0$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \boldsymbol{R}$	$x \in \langle -\infty, x_1] \cup [x_2, +\infty \rangle$

Primjer 4: Riješimo sustav nejednadžbi $\begin{cases} x^2 - 2x > 0 \\ x^2 + x - 2 \geq 0. \end{cases}$

Rješenje: Svaku nejednadžbu rješavamo zasebno.

$x^2 - 2x > 0$

$x(x-2) > 0$

$(a > 0,\ D > 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 2, +\infty \rangle$

$x^2 + x - 2 \geq 0$

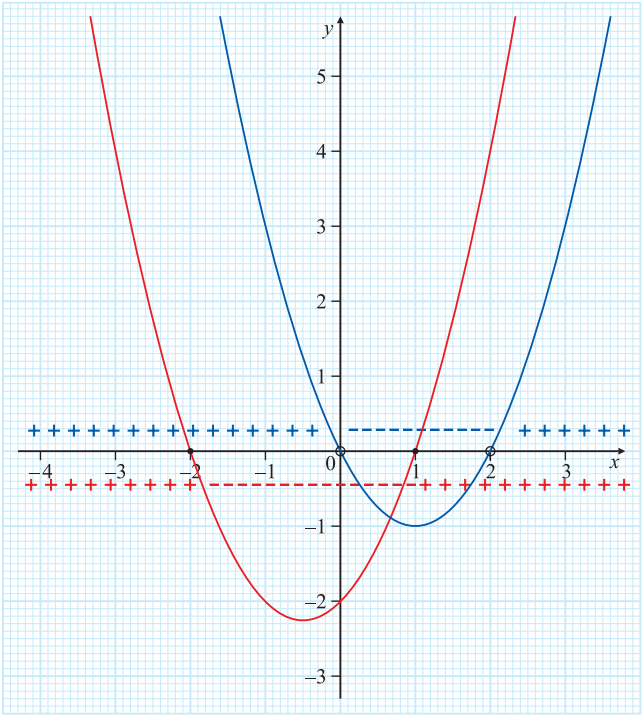
$x_{1,2} = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} = \dfrac{-1 \pm 3}{2}$

$x_1 = 1,\ x_2 = -2$

$\Rightarrow (a > 0,\ D > 0) \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad x \in \langle -\infty, -2] \cup [1, +\infty \rangle$

Rješenje sustava nejednadžbi je presjek rješenja obiju nejednadžbi: $\langle -\infty, -2] \cup \langle 2, +\infty \rangle$.



Primjer 5: Riješimo nejednadžbu $\dfrac{3x+2}{-x+1} \leq 0.$

Rješenje: Rješavanje ove nejednadžbe možemo svesti na rješavanje kvadratne nejednadžbe tako da cijelu nejednadžbu pomnožimo kvadratom nazivnika (kvadrat realnog broja je nenegativan broj i množenjem nejednadžba neće promijeniti smisao).

Uvjetovat ćemo da nazivnik ne bude nula, $x \neq 1$.

$\Rightarrow \quad (3x + 2)(-x + 1) \leq 0$

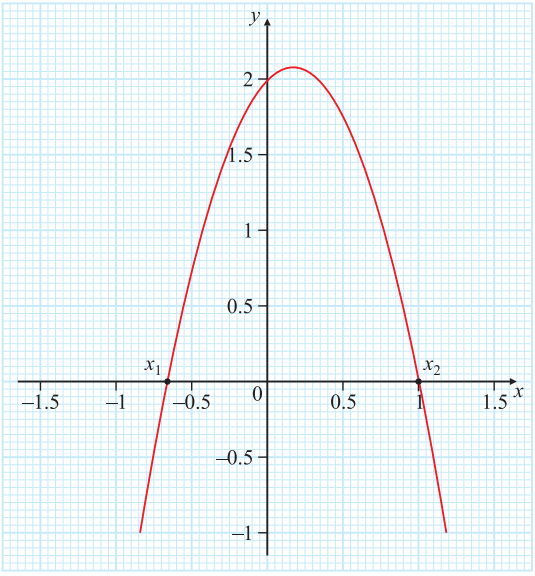
Dobili smo kvadratnu nejednadžbu koju možemo riješiti koristeći graf funkcije $f(x) = (3x + 2)(-x + 1)$ čije nultočke znamo:

$3x + 2 = 0 \Rightarrow x_1 = -\frac{2}{3}$

$-x + 1 = 0 \Rightarrow x_2 = 1.$

Vodeći koeficijent odredit ćemo predznakom umnoška vodećih koeficijenata u zagradama $(3x \cdot (-x) = -3x^2)$ i vidimo da je koeficijent negativan.

Očitamo rješenje: $x \in \left\langle -\infty, -\frac{2}{3} \right] \cup \langle 1, +\infty \rangle$.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2007.) Skup $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$ je rješenje nejednadžbe:

a) $2(x - 1)(x + 3) > 0$ b) $2(x + 1)(x - 3) > 0$

c) $-2(x - 1)(x + 3) > 0$ d) $-2(x + 1)(x - 3) > 0.$

2. (NI 2007.) Riješite nejednadžbu $x^2 + 2x \leq 3$.

3. (NI 2008.) Riješite nejednadžbu $x^2 - 4 > 0$.

4. (NI 2009.) Riješite nejednadžbu $2x^2 + 5x + 2 < 0$.

5. (IK 2009.) Riješite nejednadžbu $x(x - 2) > 0$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Skup rješenja nejednadžbe $\frac{x^3-1}{(x-1)(x^2-1)} > 0$ je:

a) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ b) $\langle -1, 1\rangle$
c) $R \setminus \langle -1, 1\rangle$ d) $R \setminus \{-1, 1\}$.

2. Vrijednosti funkcije $f(x) = (x^2 + x - 2)^{-1}$ negativne su za svaki x iz intervala:

a) $\langle -2, 1\rangle$ b) $\langle -\infty, 1\rangle$ c) $\langle -2, +\infty\rangle$ d) $[-2, 1]$.

3. Skup svih realnih rješenja nejednadžbe $\frac{x}{x+1} < 0$ je:

a) $\langle -1, 0]$ b) $\langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$
c) $[1, 0\rangle$ d) $\langle -1, 0\rangle$.

4. Skup svih realnih brojeva koji su manji od svoje recipročne vrijednosti na intervalu $[-8, 8\rangle$ je:

a) $\langle -1, 1\rangle$ b) $[-8, -1\rangle \cup \langle 0, 1\rangle$
c) $[-8, -1\rangle \cup \langle 1, 8\rangle$ d) $[-8, -1\rangle \cup [0, 1\rangle$.

5. Rješenje nejednadžbe $\frac{1}{2} + \frac{7}{4}x - x^2 > 0$ je:

a) $\left\langle -\frac{1}{4}, 2\right\rangle$ b) $\langle -\infty, -2\rangle \cup \left\langle \frac{1}{4}, +\infty\right\rangle$
c) $\left\langle -\infty, \frac{1}{4}\right\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$ d) $\left\langle \frac{1}{4}, 2\right\rangle$.

6. Skup rješenja sustava nejednadžbi $\begin{cases} (x+1)^2 \geq 1 \\ -x^2 - x \geq 0 \end{cases}$ je:

a) $[-1, 0]$ b) $\langle -\infty, -2] \cup [0, +\infty\rangle$
c) $\{0\}$ d) $[-1, +\infty\rangle$.

7. Realni brojevi x za koje je $x^2 + 2x - 3 > 0$ i $x^2 + 4x < 0$ leže u intervalu:

a) $\langle -\infty, -4\rangle$ b) $\langle -4, -3\rangle$ c) $\langle -3, 0\rangle$ d) $\langle 0, 1\rangle$.

8. Sva rješenja nejednadžbe $\frac{x-1}{x+2} < 0$ pripadaju intervalu:

a) $\langle -\infty, 1\rangle$ b) $\langle -2, \infty\rangle$ c) $\langle -\infty, -2\rangle$ d) $\langle -2, 1\rangle$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Riješite nejednadžbe.

1. $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$

2. $\frac{1+3x}{x-2} > 2$

3. $x^2 - 6x - 7 \leq 0$ (u skupu prirodnih brojeva).

4. $(2-3x) - (x-1) \geq -4 - (x-2)^2$

5. $\frac{\sqrt{x}-3}{x-2} \geq 0$

6. $\frac{x^2-x-2}{x^2+x-12} \leq 0$

Riješite sustave nejednadžbi.

7. $\begin{cases} 3x-2 \geq 0 \\ -8x^2+2x+3 < 0 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x-\frac{3}{2} \geq 0 \\ 12x^2-x-6 < 0 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 4x > 3x^2 \\ 4x \geq 5 \end{cases}$

10. Odredite vrijednost realnog parametra a, tako da jednadžba $4-a=\frac{2}{x-1}$ ima pozitivna rješenja.

11. Odredite vrijednost realnog parametra m, tako da jednadžba $\frac{3x-1}{m}-5=2x$ ima rješenja veća ili jednaka 4.

12. Za koje vrijednosti realnog parametra a su rješenja sustava jednadžbi $\begin{cases} \frac{x-a}{y}=\frac{1}{2} \\ \frac{a}{x}=\frac{3}{y} \end{cases}$ negativni brojevi?

13. Grafički riješite nejednadžbu $f(x) \leq g(x)$ ako je $f(x)=2x^2-2x+3$, a $g(x)=2x+3$.

14. Grafički riješite nejednadžbu $g(x) \geq f(x)$ ako je $f(x)=2x^2-2x+3$, a $g(x)=-2x^2+3$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. b **2.** $x \in [-3,1]$ **3.** $x \in \langle -\infty,-2\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$ **4.** $x \in \left\langle \frac{1}{2},2\right\rangle$ **5.** $x \in \langle -\infty,0\rangle \cup \langle 2,+\infty\rangle$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** a **3.** d **4.** b **5.** a **6.** c **7.** b **8.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

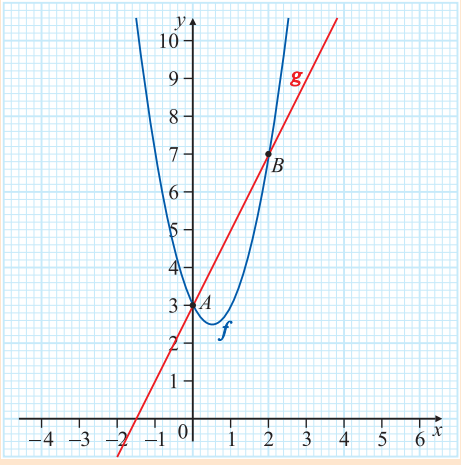
1. $x \in \left[1,\frac{4}{3}\right]$ **2.** $x \in \langle -\infty,-5\rangle \cup \langle 2,\infty\rangle$ **3.** $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

4. $x \in \left\langle -\infty,4-\sqrt{5}\right] \cup \left[4+\sqrt{5},+\infty\right\rangle$ **5.** $x \in [0,2\rangle \cup [9,+\infty\rangle$ **6.** $x \in \langle -4,-1] \cup [2,3\rangle$

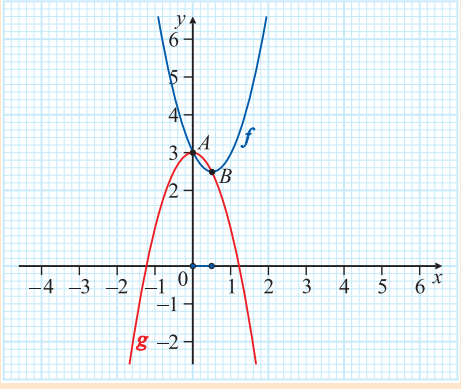
7. $x \in \left\langle \frac{3}{4},+\infty\right\rangle$ **8.** $x \in \left[\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right\rangle$ **9.** $x \in \left[\frac{5}{4},\frac{4}{3}\right\rangle$

10. $a \in \langle -\infty,4\rangle \cup \langle 6,\infty\rangle$ **11.** $m \in \left[\frac{11}{13},\frac{3}{2}\right\rangle$ **12.** $a \in \left\langle 0,\frac{3}{2}\right\rangle$

13. Ponekad možemo pročitati rješenja sa slike, kao u ovom zadatku, $x \in [0,2]$.

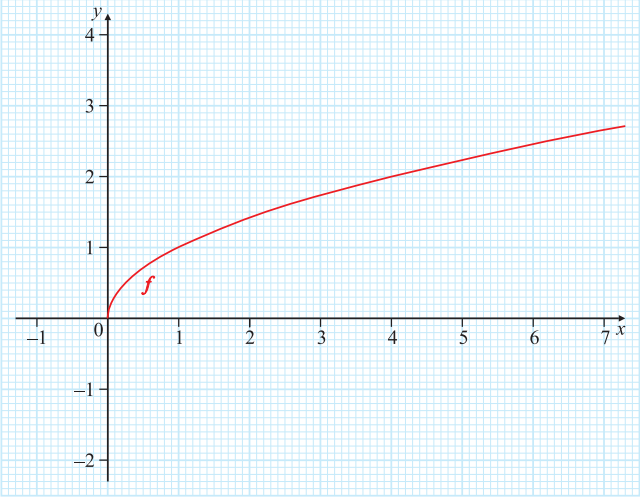


14.



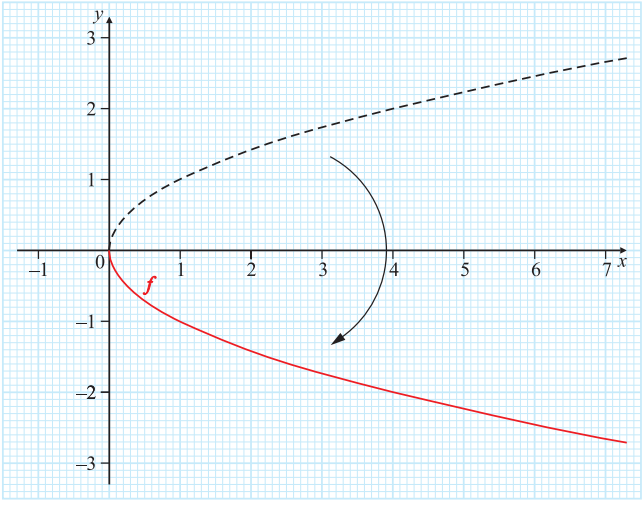
2.4.4. Funkcija drugog korijena

Funkcija kvadratnog korijena je funkcija oblika $f(x)=\sqrt{x}$, $x\in \boldsymbol{R}^{+}$. Njezina su domena svi pozitivni realni brojevi, kao i njezina kodomena (slika). Inverzna funkcija kvadratne funkcije je funkcija drugog korijena. Graf je smješten iznad osi *x*, osim za $x=0$; na intervalu $[0,+\infty\rangle$ raste, a u ishodištu postiže svoju najmanju vrijednost.



Primjer 1: Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=-\sqrt{x}$.

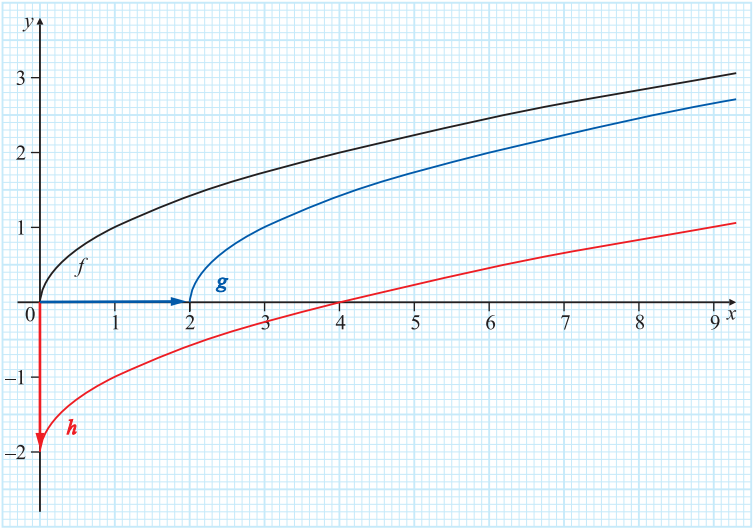
Rješenje: Domena ove funkcije su svi pozitivni realni brojevi, ali negativan predznak svim vrijednostima funkcije daje negativnu vrijednost, tako da je slika naše funkcije skup svih brojeva manjih ili jednakih nuli. Graf dobivamo zrcaljenjem grafa funkcije $\sqrt{x}$ oko osi *x*.



Primjer 2: Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x)=\sqrt{x}$, $g(x)=\sqrt{x-2}$ i $h(x)=\sqrt{x}-2$.

Rješenje: Kao što vidimo, domena funkcije $g(x)=\sqrt{x-2}$ bit će $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$.
To znači da funkcija postoji za sve brojeve koji su veći ili jednaki 2. Graf ove funkcije dobit ćemo jednostavnim pomicanjem grafa funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ po osi x za 2 udesno.

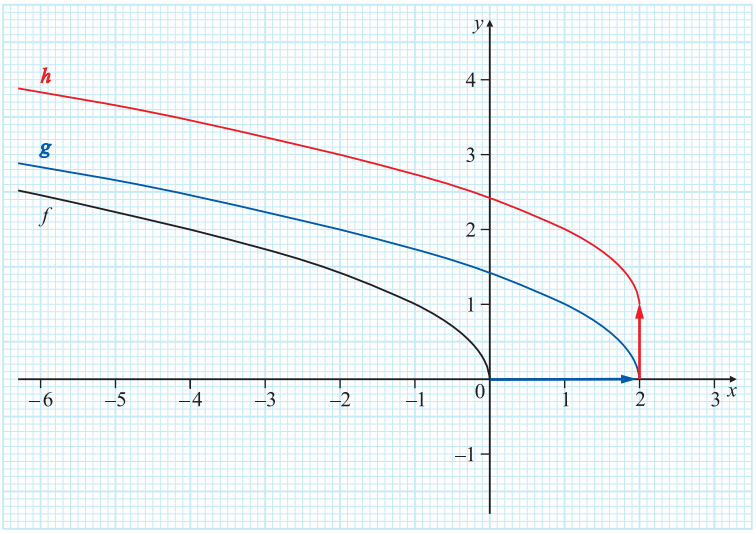
Domena funkcije $h(x)=\sqrt{x}-2$ su svi pozitivni realni brojevi, a graf ćemo dobiti pomicanjem funkcije $f(x)=\sqrt{x}$ po osi y za 2 prema dolje.



Primjer 3: Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x)=\sqrt{-x}$, $g(x)=\sqrt{2-x}$ i $h(x)=\sqrt{2-x}+1$.

Rješenje: Domena funkcije $f(x)=\sqrt{-x}$ bit će $-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 0$, tj. svi brojevi manji ili jednaki nuli. Graf ove funkcije dobit ćemo zrcaljenjem grafa funkcije $\sqrt{x}$ oko osi y. Kao što vidimo, domena funkcije $g(x)=\sqrt{2-x}$ bit će $2-x\geq 0 \Rightarrow x\leq 2$, tj. funkcija postoji za sve brojeve koji su manji ili jednaki od 2. Funkciju možemo zapisati $g(x)=\sqrt{-(x-2)}$. Graf ove funkcije dobit ćemo jednostavnim pomicanjem grafa funkcije $f(x)=\sqrt{-x}$ po osi x za 2 udesno.

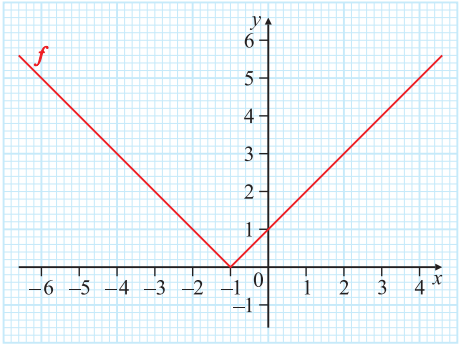
Domena funkcije $h(x)=\sqrt{2-x}+1$ jednaka je domeni funkcije $g(x)$, jedino se razlikuju u slici. Slika funkcije $g(x)$ su svi pozitivni realni brojevi, a slika $h(x)$ su svi brojevi veći ili jednaki 1. Graf ćemo dobiti pomicanjem grafa funkcije $g(x)$ po osi y za 1 prema gore.



Primjer 4: Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}$.

Rješenje: Prepoznajemo da je izraz pod korijenom kvadrat zbroja, a znamo da je kvadrat realnog broja uvijek broj veći ili jednak nuli, tako da je domena skup $\boldsymbol{R}$. Slijedi da je

$$f(x)=\sqrt{x^2+2x+1}=\sqrt{(x+1)^2}=|x+1|.$$



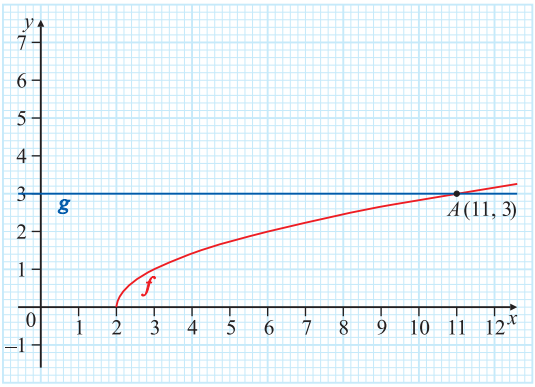
Primjer 5: Riješimo jednadžbu $\sqrt{x-2}=3$.

Rješenje: Zapišimo lijevu stranu jednadžbe kao funkciju $f(x)=\sqrt{x-2}$, a desnu kao funkciju $g(x)=3$.

Domena funkcije $f(x)=\sqrt{x-2}$ bit će $x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2$.

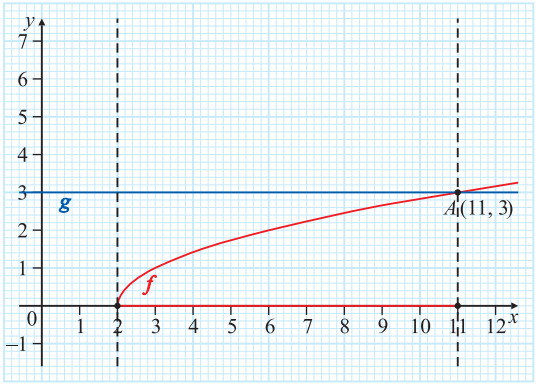
Nacrtajmo grafove funkcija $f(x)$ i $g(x)$, te nađimo njihov presjek.

Presjek ovih dviju funkcija je točka $A(11, 3)$, pa je rješenje naše jednadžbe $x=11$.



Primjer 6: Riješimo nejednadžbu $\sqrt{x-2} \leq 3$.

Rješenje: Koristeći rezultate prošlog primjera, sa slike vidimo gdje je graf funkcije $f(x) \leq g(x)$. Graf funkcije $f(x)$ je ispod grafa funkcije $g(x)$ na intervalu $[2, 11]$ i to je rješenje nejednadžbe.



ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Koliko rješenja ima jednadžba $\sqrt{4x^2 - 12x + 9} = 3$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

2. Rješenje jednadžbe $\sqrt{3-x} = 0$ je:

a) –3 b) 0 c) 3 d) 9.

3. Rješenje jednadžbe $\sqrt{4-x} = 5$ jednako je:

a) 9 b) –1 c) 1 d) –21.

4. Koliko rješenja ima jednadžba $\sqrt{4-x} = x^2 - 4$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

5. Koliko rješenja ima jednadžba $\sqrt{4-x} = -4 - x^2$?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

6. Koliko rješenja ima jednadžba $\sqrt{x-4} = 4 - x^2$?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

7. Koliko rješenja ima jednadžba $\sqrt{x+4} = x + 4$?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

8. Koliko rješenja ima jednadžba $\sqrt{x+4} = x - 4$?
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

9. Rješenje nejednadžbe $\sqrt{5-x} < 2$ je:
a) $x \in [1, 5]$ b) $x \in \langle 1, 5\rangle$ c) $x \in [1, 5\rangle$ d) $x \in \langle 1, 5]$.

10. Rješenje nejednadžbe $\sqrt{x+3} + 2 > 0$ je interval:
a) $x \in \langle -\infty, -3]$ b) $x \in \langle -\infty, -3\rangle$ c) $x \in \langle -3, +\infty\rangle$ d) $x \in [-3, +\infty\rangle$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. a) Odredite u kojem intervalu postoji funkcija $f(x) = \sqrt{3x+9} - 1$, tj. odredite domenu funkcije.
b) Koji interval predstavlja njenu sliku?

2. a) Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 10x + 25}$.
b) Odredite sliku funkcije.

3. a) Odredite domenu funkcije $f(x) = \sqrt{5-x} - 2$.
b) Odredite sliku funkcije.

4. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \sqrt{4x-4} + 1$.

5. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = \sqrt{16-4x} - 1$.

6. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = -\sqrt{2-x} + 3$.

7. Grafički riješite jednadžbu $\sqrt{x+3} = 2$.

8. Grafički riješite nejednadžbu $\sqrt{x-5} \geq 2$.

9. Grafički riješite nejednadžbu $4 \geq \sqrt{3-x}$.

RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** c **3.** d **4.** c **5.** a **6.** a **7.** c **8.** b **9.** d **10.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

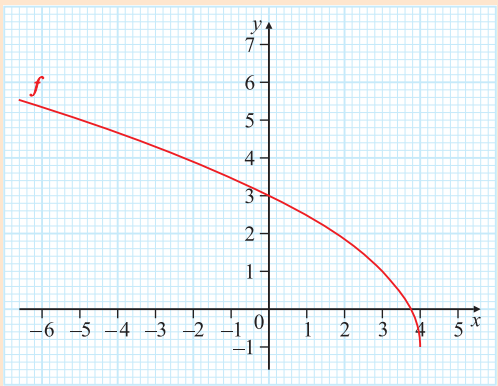
1. a) $x \geq -3$ b) $[-1, +\infty\rangle$

2. a) $x \in R$ b) $[0, +\infty\rangle$

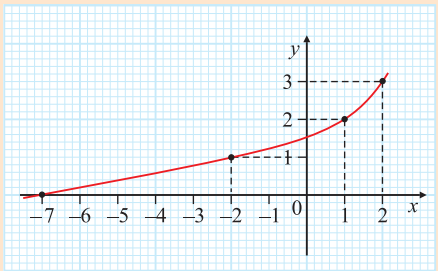
3. a) $\langle -\infty, 5]$ b) $[-2, +\infty\rangle$

4.

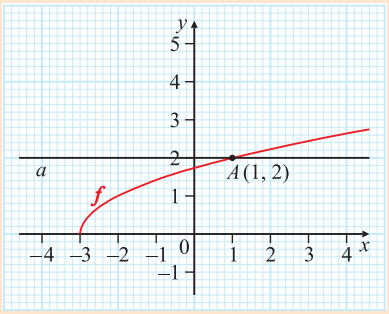
5.



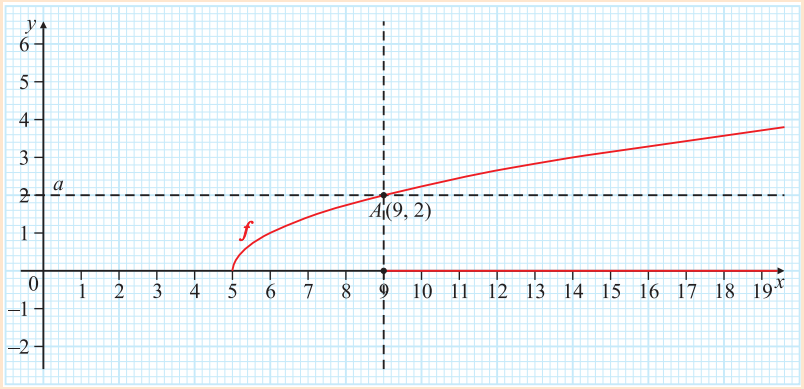
6.



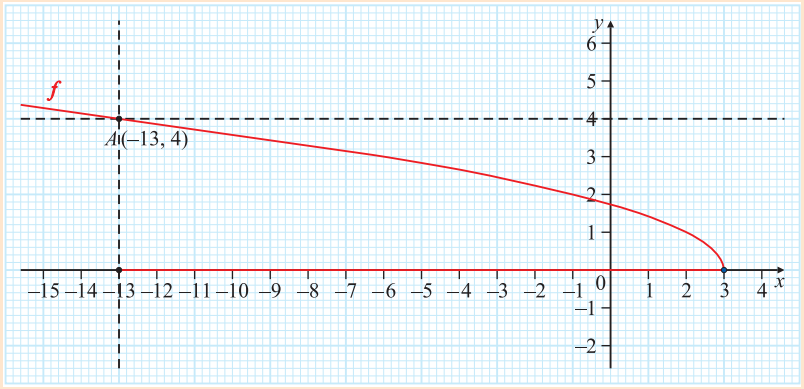
7.



8. $x \geq 9$



9. $x \in [-13,\ 3]$



2.4.5. Iracionalna jednadžba i nejednadžba

Iracionalna jednadžba

Jednadžbe u kojima se nepoznanica nalazi pod korijenom nazivamo iracionalne jednadžbe. Ovakve jednadžbe, u pravilu, rješavamo tako da izraz pod korijenom, ako je moguće, ostavimo na jednoj strani znaka jednakosti, a sve ostalo na drugoj. Kvadriranjem se rješavamo korijena, a pomoću „uvjeta“ ili provjere utvrđujemo je li vrijednost nepoznanice rješenje jednadžbe.

Primjer 1: Riješimo jednadžbu $\sqrt{2x+3} = -2$.

Rješenje: Ova jednadžba nema rješenja jer je lijeva strana jednadžbe veća ili jednaka nuli.

Primjer 2: Riješimo jednadžbu $\sqrt{2x+3} = 2$.

Rješenje: Izraz pod korijenom mora biti nenegativan broj:

$$2x+3 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \geq -\frac{3}{2} \text{ (uvjet!)}.$$

$$\sqrt{2x+3} = 2 \,/^2$$

$$2x+3 = 4$$

$$2x = 1$$

$$x = \frac{1}{2} \quad \text{(slaže se s uvjetom)}$$

Provjerimo rješenje: $\sqrt{2 \cdot \frac{1}{2} + 3} = 2$

$$\sqrt{1+3} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2.$$

Rješenje jednadžbe je $x = \frac{1}{2}$.

Primjer 3: Riješimo jednadžbu $\sqrt{x^2+x+1} = x-1$.

Rješenje: Lijeva strana jednadžbe veća je ili jednaka nuli, znači da tako mora biti i s desnom.

$\Rightarrow x-1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$ (uvjet)

$$\sqrt{x^2+x+1} = x-1 \,/^2$$

$$x^2+x+1 = (x-1)^2$$

$$x^2+x+1 = x^2-2x+1$$

$$3x = 0$$

$$x = 0$$

Provjerom i/ili usporedbom s uvjetom vidimo da to nije rješenje naše jednadžbe.

Primjer 4: Riješimo jednadžbu $\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=1$.

Rješenje: Uvjeti: $x+1\geq 0 \Rightarrow x\geq -1$

i $x+2\geq 0 \Rightarrow x\geq -2$.

$$\sqrt{x+1}+\sqrt{x+2}=1$$
$$\sqrt{x+1}=1-\sqrt{x+2}\ /^2$$
$$x+1=\left(1-\sqrt{x+2}\right)^2$$
$$\cancel{x}+\cancel{1}=\cancel{1}-2\sqrt{x+2}+\cancel{x}+2$$
$$2\sqrt{x+2}=2/:2$$
$$\sqrt{x+2}=1/^2$$
$$x+2=1$$
$$x=-1$$

Primjer 5: Riješimo jednadžbu $\sqrt{3-\sqrt{x-3}}=1$.

Rješenje: Kvadrirajmo jednadžbu.

$$\sqrt{3-\sqrt{x-3}}=1/^2$$
$$3-\sqrt{x-3}=1$$
$$-\sqrt{x-3}=-2/\cdot(-1)$$
$$\sqrt{x-3}=2/^2 \quad \text{(uz uvjet } x-3\geq 0\text{)}$$
$$x-3=4$$
$$x=7$$

Provjerite rješenje!

Iracionalna nejednadžba

Primjer 6: Riješimo u skupu realnih brojeva nejednadžbu $\sqrt{x-3}>9$.

Rješenje: Uvjetujemo da izraz pod korijenom bude pozitivan ili jednak nuli: $(x-3\geq 0 \Rightarrow x\geq 3)$ i kvadriramo nejednadžbu.

$$\sqrt{x-3}>9/^2$$
$$|x-3|>81$$
$$x-3>81 \quad \text{ili} \quad x-3<-81$$
$$x>84 \quad \text{ili} \quad x<-78$$

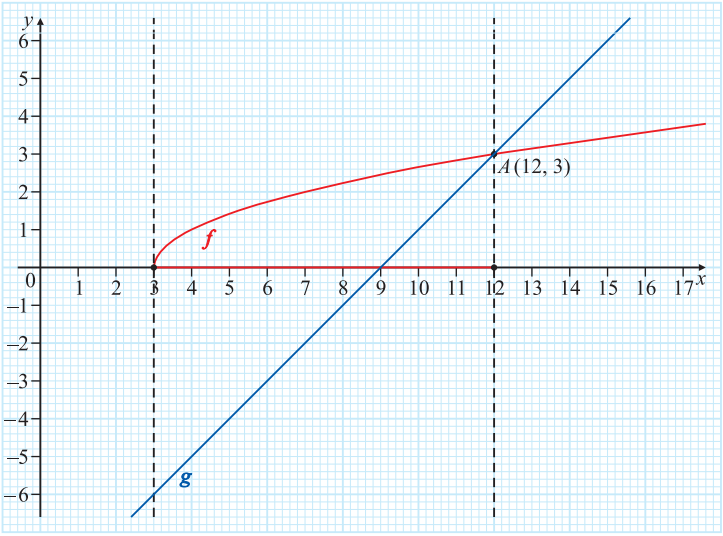
Zbog uvjeta $x\geq 3$ slijedi da je rješenje nejednadžbe $x\in\langle 84,+\infty\rangle$.

Primjer 7: Riješimo u skupu realnih brojeva nejednadžbu $\sqrt{x-3}>x-9$.

Rješenje: Najjednostavniji način rješavanja iracionalnih nejednadžbi je grafički. Skiciramo funkciju $f(x)=\sqrt{x-3}$ i $g(x)=x-9$ u istom koordinatnom sustavu.

Promatramo područje na kojem je $f(x)>g(x)$.

Vidimo da je to na intervalu $\langle 3,12\rangle$.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2010.) Riješite jednadžbu: $\sqrt{x^2-4}=1$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Rješenje jednadžbe $\sqrt{x+10}-\sqrt{x+7}=1$ nalazi se u intervalu:
a) $\langle -\infty, -1]$ b) $\langle 1, 6]$ c) $\langle 6, 7]$ d) $\langle 7, 10]$.

2. Zbroj kvadrata rješenja jednadžbe $\sqrt{2x+5}-\sqrt{x+1}=2$ iznosi:
a) 264 b) 256 c) 272 d) 288.

3. Rješenje jednadžbe $\sqrt{x+1}-\sqrt{x-4}=1$ nalazi se u intervalu:
a) $x<0$ b) $0\le x<3$ c) $3\le x<6$ d) $6\le x<9$.

4. Zbroj korijena jednadžbe $\sqrt{3x+7}-\sqrt{x+1}=2$ jednak je:
a) –3 b) 2 c) 5 d) –2.

5. Umnožak rješenja jednadžbe $x^2+2x=3x\sqrt{x}$ je:
a) 0 b) 1 c) 4 d) –1.

6. Koliko rješenja ima jednadžba $\sqrt{12+3\sqrt{x+1}}=4$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

7. Rješenje nejednadžbe $\sqrt{3-x}>3$ je interval:

a) $x\in\langle -\infty, 6\rangle$ b) $x\in\langle -6, +\infty\rangle$ c) $x\in\langle 6, +\infty\rangle$ d) $x\in\langle -\infty, -6\rangle$.

8. Koliko cjelobrojnih rješenja ima nejednadžba $\sqrt{4x-5}\le 5$?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 8

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Riješite jednadžbe.

1. $\sqrt{6+\sqrt{x-3}}=3$

2. $\sqrt{x-1}=1$

3. $\sqrt{x^2-36}=8$

4. $4+\sqrt{x^2+4}=x$

5. $x+\sqrt{5+x^2}=5$

6. $1+\sqrt{5x+9}=x$

7. $\dfrac{\dfrac{1-2\sqrt{x}}{2-3\sqrt{x}}}{\dfrac{3-4\sqrt{x}}{4-5\sqrt{x}}}=\dfrac{5}{6}$

8. $\sqrt{4x+13}+\sqrt{x+1}=\sqrt{3x+12}$

9. $\sqrt{x-2}+\sqrt{4-x}=\sqrt{6-x}$

10. $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$

11. $2(x-3)-\sqrt{x+2}=0$

12. $\sqrt{x+27}=2+\sqrt{x-5}$

13. $\sqrt{x+11}+\sqrt{x+6}=\sqrt{4x+33}$

14. $\sqrt{9x+40}=5\sqrt{x+3}-\sqrt{4x+5}$

15. $\sqrt{3x+1}+\sqrt{x+4}=\sqrt{9-x}$

Riješite nejednadžbe.

16. $\sqrt{2x+3}\le 5$

17. $\sqrt{3x-2}>2$

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. $x_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** d **3.** d **4.** b **5.** a **6.** b **7.** d **8.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x = 12$ **2.** $x = 2$ **3.** $x_{1,2} = \pm 10$ **4.** Nema rješenja.

5. $x = 2$ **6.** $x = 8$ **7.** $x = \frac{36}{49}$ **8.** $x = -1$

9. $x_1 = \frac{12}{5},\ x_2 = 4$ **10.** $x_1 = 34,\ x_1 = 2$ **11.** $x = \frac{17}{4}$ **12.** $x = 54$

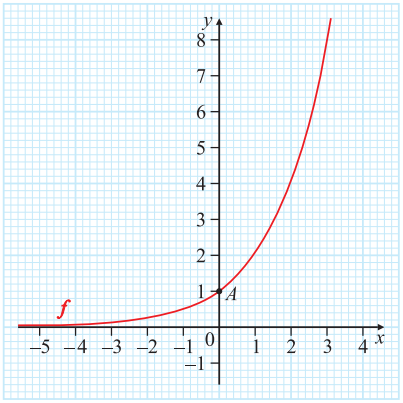
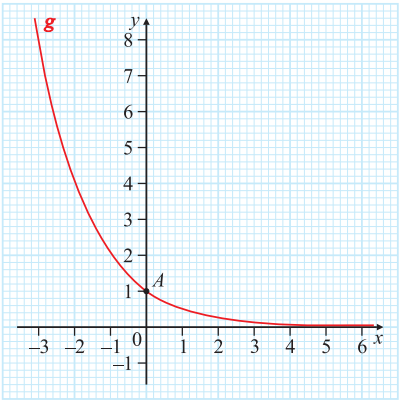
13. $x = -2$ **14.** $x = 1$ **15.** $x = 0$ **16.** $x \in \left[-\frac{3}{2}, 11\right]$

17. $x > 2$

2.5. Eksponencijalna i logaritamska funkcija

2.5.1. Eksponencijalna funkcija

Eksponencijalna funkcija je svaka realna funkcija oblika $f(x) = b^x$, gdje je $b > 0$, $b \neq 1$ baza, a varijabla se pojavljuje u eksponentu. Njezina domena su svi realni brojevi, a slika funkcije su svi pozitivni realni brojevi.

$f(x) = 2^x$	$g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$
	
Za $b > 1$ funkcija f raste	Za $0 < b < 1$ funkcija g pada
Siječe os y u $(0, 1)$	
Asimptota je os x	
$f(x) > 0$ za svaki x	
Injektivna je: $b^{x_1} = b^{x_2} \Rightarrow x_1 = x_2$	
Graf funkcije g simetričan je funkciji f s obzirom na y-os	

Primjer 1: Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija: $f(x) = 2^x$, $g(x) = 2^{x+2}$ i $h(x) = 2^{x+2} + 3$.

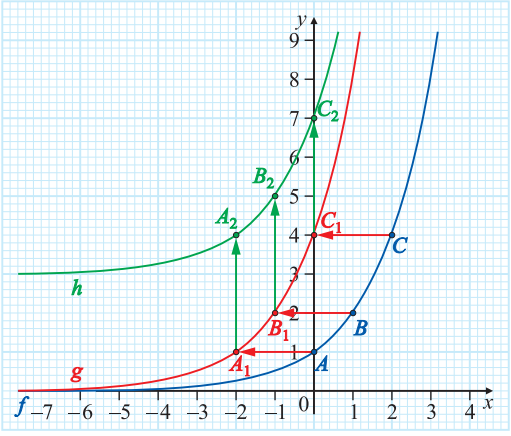
Rješenje: Da bismo nacrtali graf eksponencijalne funkcije, izračunajmo nekoliko različitih vrijednosti funkcije.

x	$f(x) = 2^x$
– 2	0.25
–1	0.5
0	1
1	2
2	4

x	$g(x) = 2^{x+2}$
–4	0.25
–3	0.5
–2	1
–1	2
0	4

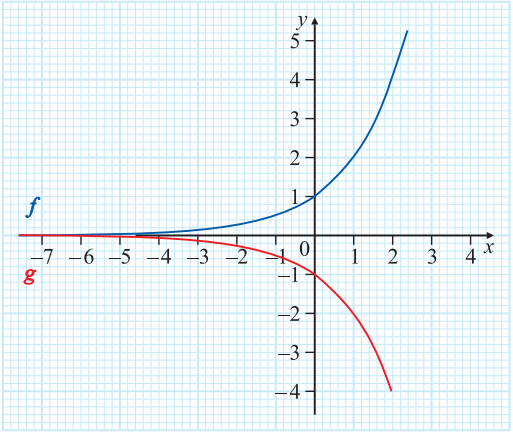
x	$h(x) = 2^{x+2} + 3$
– 4	0.25+3=3.25
–3	0.5+3=3.5
–2	1+3=4
–1	2+3=5
0	4+3=7

Vidimo po očitanim vrijednostima (iz tablice) da graf funkcije $g(x) = 2^{x+2}$ dobivamo pomicanjem grafa $f(x) = 2^x$ u lijevo (u smjeru osi x) za dvije jedinice, a $h(x) = 2^{x+2} + 3$ pomicanjem grafa $g(x) = 2^{x+2}$ prema gore (u smjeru osi y) za tri jedinice. Domena svih triju funkcija je i dalje skup realnih brojeva, slika za $f(x)$ i $g(x)$ također ostaju svi pozitivni realni brojevi, dok je slika (kodomena) $h(x)$ skup realnih brojeva većih od 3 $\left(K(h) = \langle 3, +\infty \rangle\right)$.



Primjer 2: Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x) = 2^x$ i $g(x) = -2^x$.

Rješenje: Pri računanju vrijednosti funkcije $g(x) = -2^x$ dobivamo negativne vrijednosti, tako da graf te funkcije dobivamo kao osnu simetriju grafa funkcije $f(x) = 2^x$ oko osi x. Slika funkcije $g(x) = -2^x$ su svi negativni realni brojevi.



Primjer 3: Funkcija $g(x) = a \cdot b^x$ zadana je tablicom vrijednosti. Nacrtajmo funkciju i odredimo vrijednosti a i b.

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	48	6	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{32}$	$\frac{3}{256}$

Rješenje: Iz tablice jednostavno saznajemo a i b.

$$g(x) = a \cdot b^x$$

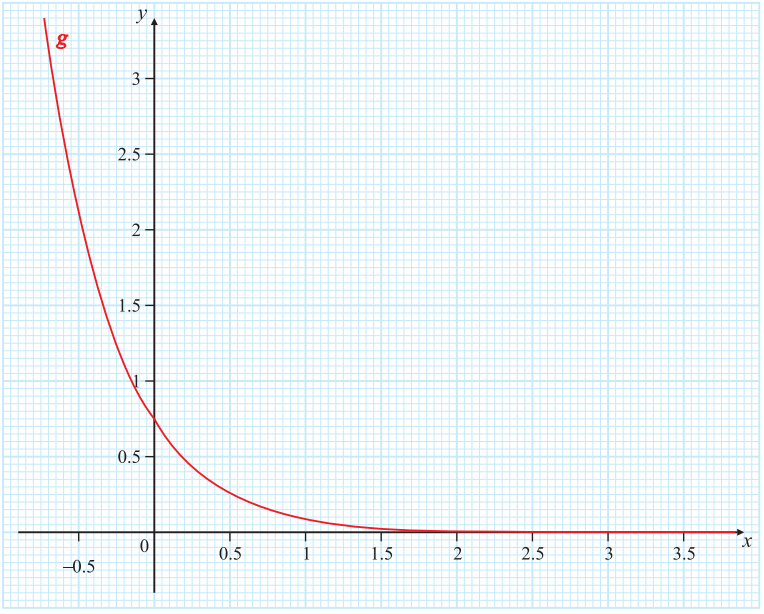
$$a \cdot b^0 = \frac{3}{4}$$

$$a = \frac{3}{4} \qquad \frac{3}{4} \cdot b^1 = \frac{3}{32}$$

$$b = \frac{3}{32} \cdot \frac{4}{3}$$

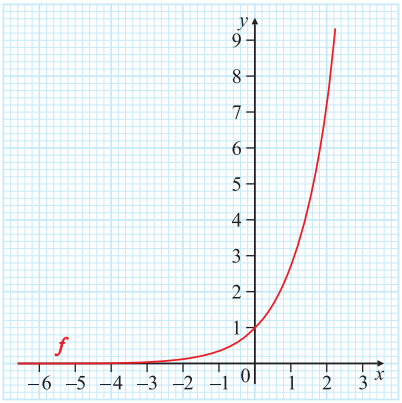
$$b = \frac{1}{8}$$

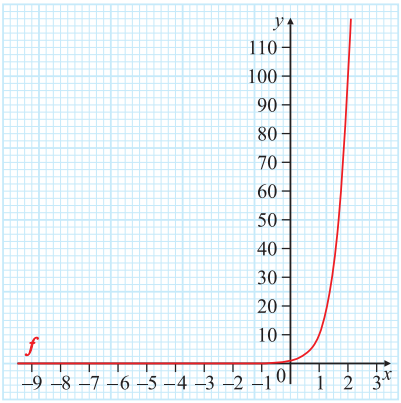
Funkcija je zadana formulom $g(x) = \frac{3}{4} \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^x$.



Česte i vrlo značajne eksponencijalne funkcije su e^x i 10^x. Konstanta e je baza prirodnog logaritma $\ln x$ i njena približna vrijednost je $e \approx 2.7182818$. Obje funkcije brzo rastu, posebno funkcija 10^x. Da bismo dobili osjećaj brzine rasta, često prilagođujemo koordinatni sustav tako da se veličine na x-osi i y-osi odnose u nekom drugom mjerilu (slika grafa funkcije 10^x nacrtana je u koordinatnom sustavu gdje se jedinice na osi x i y odnose kao $1:10$).

$f(x) = e^x$ $\qquad$ $g(x) = 10^x$





Ako se neka veličina N mijenja u vremenu t po zakonu $N(t) = N_0 e^{kt}$ kažemo da ona eksponencijalno raste (za $k > 0$), odnosno eksponencijalno pada (za $k < 0$). Što je $k > 0$ po apsolutnoj vrijednosti veći, to je rast, odnosno pad, brži.

Primjer 4: Rast populacije odvija se po eksponencijalnom zakonu $N(t) = N_0 e^{kt}$, gdje je $N(t)$ veličina populacije koja ovisi o vremenu t, k je stopa rasta (postotak u decimalnom obliku), a N_0 veličina populacije mjerena na početku za $t = 0$ (broj stanovnika).

a) Ako je 1 000 stanovnika osnovalo grad, koliko stanovnika će biti za 10 godina uz stopu rasta 3%?

b) Opišimo što znače brojevi $N(0)$, $N(0.5)$, $N(-2)$.

c) Nacrtajmo graf funkcije N.

Rješenje: a) $N(t) = 1\,000 \cdot e^{0.03 \cdot 10}$

$N(t) = 1\,349.8588 \approx 1\,349$

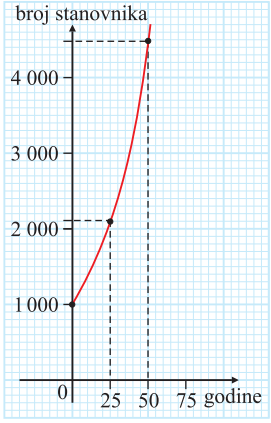
Za 10 godina bit će 1 349 stanovnika.

b) Broj $N(0)$ je broj stanovnika na početku vremena, u ovom slučaju 1 000.

Broj $N(0.5)$ je broj stanovnika nakon pola godine, $N(0.5) = 1\,015$.

Broj $N(-2)$ u ovom slučaju nema smisla.

Domena naše funkcije su pozitivni realni brojevi, znači da za broj –2 funkcija ne postoji.



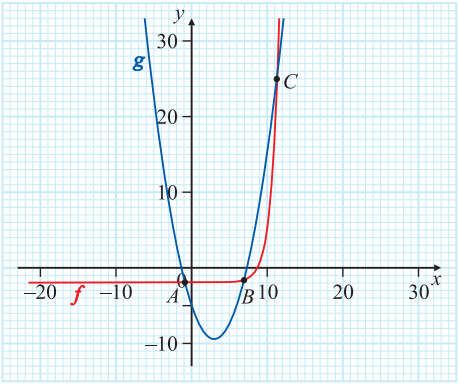
c) Funkcija postoji samo za pozitivne vrijednosti varijable t, a njena slika su svi brojevi veći ili jednaki od 1 000.

Primjer 5: Cijena zlata u siječnju je bila 2 000 kuna za 10 grama. Zlato je gubilo na vrijednosti 5% mjesečno. Koliko košta 10 grama zlata u kolovozu ako znamo da se cijena zlata mijenja prema eksponencijalnom zakonu $C = C_0\,(1 - k)^t$, gdje je C_0 početna cijena zlata, k je postotak, a t vrijeme izraženo u mjesecima?

Rješenje: Cijena zlata mijenja se eksponencijalno
$C = 2\,000\,(1 - 0.05)^7 = 1\,396.674592$.
U kolovozu će cijena zlata biti 1 397 kuna.

Primjer 6: Odredimo koliko rješenja ima jednadžba $e^{x-8} - 2 = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$.

Rješenje: Najjednostavniji način za rješavanje ovakve vrste jednadžbe je grafički. Nacrtajmo funkcije $f(x) = e^{x-8} - 2$ i $g(x) = \frac{1}{2}x^2 - 3x - 5$ u istom koordinatnom sustavu. Presjeci grafova ovih funkcija rješenja su zadane jednadžbe. Vidimo da postoje tri takva presjeka, znači da jednadžba ima tri rješenja.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2008.) Broj bakterija u nekoj populaciji mijenja se s vremenom t na sljedeći način $B(t) = 1\,000 \cdot 2^{3t}$, gdje je t vrijeme u satima od početka mjerenja.

a) Koliko je bilo bakterija 40 minuta nakon početka mjerenja?
b) Koliko je bilo bakterija 1 sat prije početka mjerenja?
c) Nakon koliko je sati bilo 4 096 000 bakterija?

2. (IK 2008.) Nacrtajte grafove funkcija: a) $f(x) = 2^x - 4$, b) $g(x) = |2^x - 4|$.

3. (NI 2009.) Ulaganjem 1 000 kn u banku nakon n godina dobiva se $1\,000 \cdot \left(1 + \frac{5.2}{100}\right)^n$ kuna.

a) Koliki je iznos na računu nakon 5 godina?
b) Za koliko bi godina iznos od 1 000 kn narastao na 10 000 kn?

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Graf funkcije $f(x) = 10^x$ prolazi kroz:

a) prvi i drugi kvadrant
b) drugi i treći kvadrant
c) treći i četvrti kvadrant
d) prvi i četvrti kvadrant.

2. Kolika je vrijednost varijable n kad broj 0.0000082 zapišemo u obliku $8.2 \cdot 10^n$?

a) -6 b) -5 c) 5 d) 6

3. Zaokružite točnu tvrdnju.

a) $f(x) = (-3)^x$ je eksponencijalna funkcija.

b) Funkcija $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ stalno raste.

c) Ako je $f(x) = 3^x$, onda je za $x_1 = -3$ vrijednost $f(x_1) = -\frac{1}{27}$.

d) Funkcije $f(x) = 0.25^x$ i $g(x) = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ imaju iste grafove.

4. Koliko je $\frac{3}{4} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0$?

a) $\frac{2}{3}$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $\frac{3}{4}$ d) 0

5. Odredite zbroj brojeva $6 \cdot 10^3$ i $3 \cdot 10^2$.

a) $6.3 \cdot 10^3$ b) $9 \cdot 10^5$ c) $9 \cdot 10^6$ d) $18 \cdot 10^5$

6. Koliki je umnožak brojeva 12 i $4.2 \cdot 10^6$?

a) $5.04 \cdot 10^6$ b) $50.4 \cdot 10^7$ c) $50.4 \cdot 10^5$ d) $5.04 \cdot 10^7$

7. Koja od sljedećih funkcija nije eksponencijalna?

a) $(4.15)^x$ b) π^x c) $\left(\frac{2.8}{0.3}\right)^x$ d) x^3

8. Koja funkcija raste?

a) $\left(\frac{0.2}{2.8}\right)^x$ b) $\left(\frac{2.8}{0.2}\right)^x$ c) $\left(\frac{31}{32}\right)^{2x}$ d) e^{-x}

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Eksponencijalna funkcija $f(x) = a^x$ pada, ako je a _____

_____ .

2. Može li za $a > 1$, funkcija $f(x) = a^x$ biti jednaka -1?

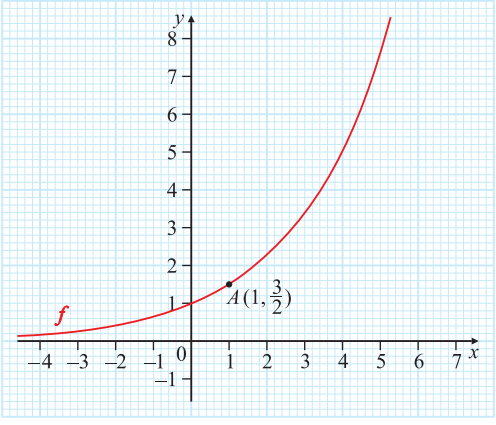
3. Za funkciju $f(x) = 0.3^x$ izračunajte vrijednosti $f(-3.2)$, $f(8.2)$, $f(0.45)$, $f\left(-\frac{5}{3}\right)$, $f\left(2\sqrt[3]{-3}\right)$.

Rezultate zaokružite na 5 decimalnih mjesta.

4. Odredite bazu eksponencijalne funkcije $f(x) = b^x$ za koju vrijedi $f(-1) = 1.25$.

5. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija $f(x) = 8^x$ i $g(x) = 0.125^x$. Usporedite ove grafove.

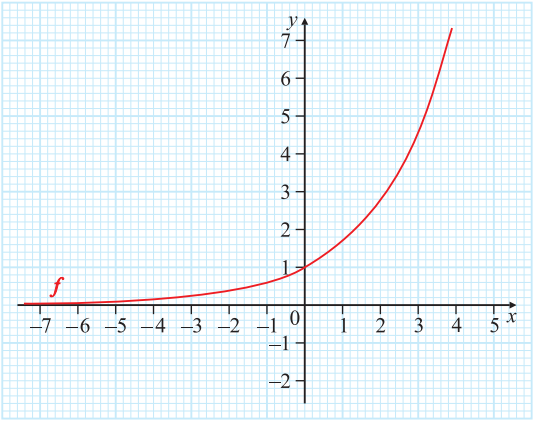
6. Na slici je graf eksponencijalne funkcije $f(x) = b^x$. Odredite b.



7. Izračunajte vrijednost $f(x + 2)$ i $f(x - 1)$ za funkciju $f(x) = 3 \cdot 4^x$.

8. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-2}$, $h(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+1}$.

9. Na slici je graf funkcije $f(x) = b^x$. Nadopunite sliku grafovima funkcija $g(x) = b^{x+2}$, $h(x) = b^x - 2$.



10. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = 5^{2x+4}$, $g(x) = 5^{2x} + 4$, $h(x) = 25^{x+2}$ u istom koordinatnom sustavu.

11. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = 2^{|x|}$ i $g(x) = 2^{x^2}$.

12. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove $f(x) = 2^x - 2$ i $g(x) = |2^x - 2|$.

13. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove $f(x) = -2^x - 2$ i $f(x) = |-2^x - 2|$.

14. Marko je započeo posao 2001. godine. Prve godine je zaradio 176 000 kuna. Svake godine zarada se smanjivala 3%. Kolika je njegova zarada 2009. godine? Zaradu računamo po formuli $C = C_0 (1 - k)^t$, gdje je C_0 početna vrijednost, t vrijeme izraženo u godinama, a k stopa po kojoj se mijenja zarada (tj. postotak izražen u decimalnom obliku).

15. Američki predsjednik B. Franklin poklonio je gradu Bostonu 1790. godine 4 000$. Kolika je ta svota bila 1990. godine uz neprekidno ukamaćivanje uz kamatnu stopu od 3.6%? Kolika će svota biti 2010. godine?

16. Planirate put za 3 godine za koji vam treba 10 000 $. Nude vam da uložite novac s 3.5% kamata, uz mjesečni obračun kamate. Koliko novca morate uložiti? Kamatu računamo po formuli $C = C_0\left(1 + \frac{p}{12}\right)^{t \cdot 12}$ gdje je t vrijeme izraženo u godinama, a p postotak izražen u decimalnom obliku.

17. Broj određene vrste virusa povećava se po stopi od 4.6% po danu eksponencijalno $N(t) = N_0 e^{kt}$. Nađite broj virusa nakon 3 dana, ako je u početku bilo 250 virusa.

18. Tržište bežičnih digitalnih pomoćnika, dakle *smartphone* telefona i dlanovnika s komunikacijskim sposobnostima, u trećem je kvartalu ove godine u Zapadnoj Europi zabilježilo rast od čak 38%, kažu rezultati najnovijeg istraživanja analitičke kuće IDC. IDC navodi kako to u brojkama znači da je u spomenutom tromjesečju isporučeno 1.8 milijuna jedinica ovih uređaja. Ako se potražnja nastavi kao do sada, koliko će ovih uređaja biti isporučeno u sljedećoj godini?

19. Biljka raste eksponencijalno po zakonu $C(t) = 12.5 \cdot 1.06^t$, gdje je $C(t)$ visina biljke u centimetrima, a t je broj tjedana koji su prošli od sađenja. Izračunajte:

a) visinu biljke kad je posađena
b) visinu biljke nakon 4 tjedna.

20. Prema podacima zavoda za zapošljavanje, 1990. god. 218 000 ljudi radilo je u svojoj kući. Tijekom sljedećih 10 godina taj broj se povećavao 5% po godini. Ako se situacija ne promijeni, koliko će ljudi raditi kod kuće 2010. godine?

21. Gradski vodovod i kanalizacija nekog grada s 40 000 domaćinstava, uvode kompletnu instalaciju odvoda u kanalizaciju. Podaci iz 1995. godine govore da svake godine 10% domaćinstava prestaje koristiti septičke jame i uključuje se u gradsku mrežu kanalizacije. Koliko će domaćinstava još koristiti septičke jame 2010. godine?

22. Koliko rješenja ima jednadžba $2^{x+1} - 2 = 2x + 3$?

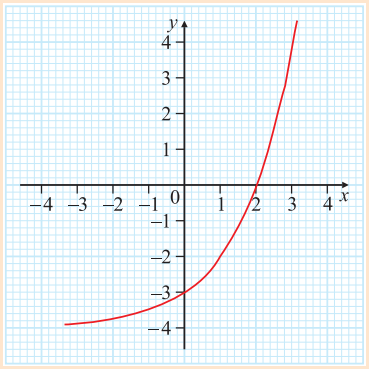
23. Koliko rješenja ima jednadžba $\left(\frac{1}{2}\right)^{x+1} - 2 = -2x^2 - 3$?

RJEŠENJA

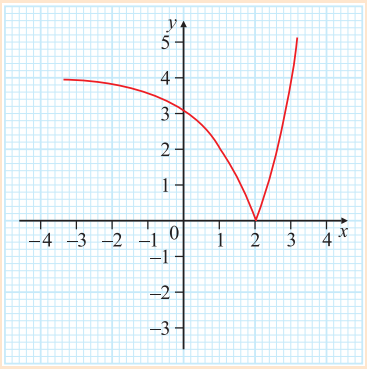
ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a) 4 000 b) 125 c) 4 sata

2. a)



b)



3. a) 1 288.48 b) 46

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** a **3.** d **4.** c **5.** a **6.** d **7.** d **8.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $0 < a < 1$

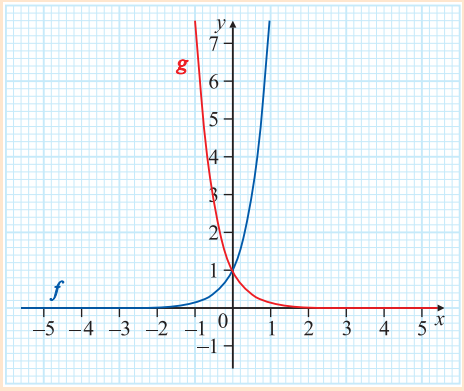
2. Ne.

3. $f(-3.2) = 47.12073,\ f(8.2) = 0.00005,\ f(0.45) = 0.58171,$

$f\left(-\frac{5}{3}\right) = 7.43814,\ f\left(2\sqrt[3]{-3}\right) = 32.22874$

4. $b^{-1} = \frac{5}{4} \Rightarrow b = \frac{4}{5} \Rightarrow f(x) = \left(\frac{4}{5}\right)^x$

5. Grafovi su simetrični s obzirom na *y* os.

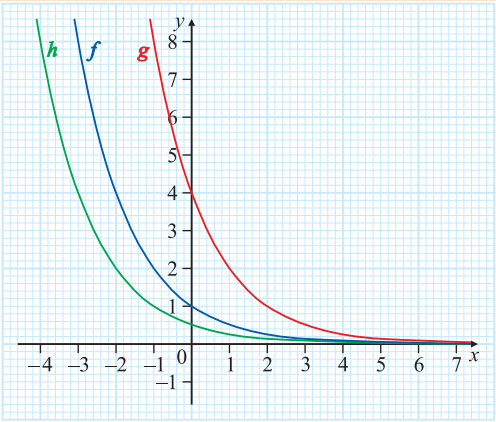


6. $b = \frac{3}{2}$

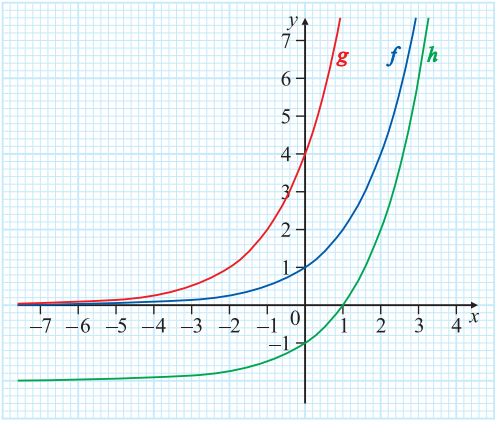
7. $f(x) = 3 \cdot 4^x$

$f(x+2) = 3 \cdot 4^{x+2} = 3 \cdot 4^2 \cdot 4^x = 48 \cdot 4^x,\ f(x-1) = 3 \cdot 4^{x-1} = 3 \cdot 4^{-1} \cdot 4^x = \frac{3}{4} \cdot 4^x$

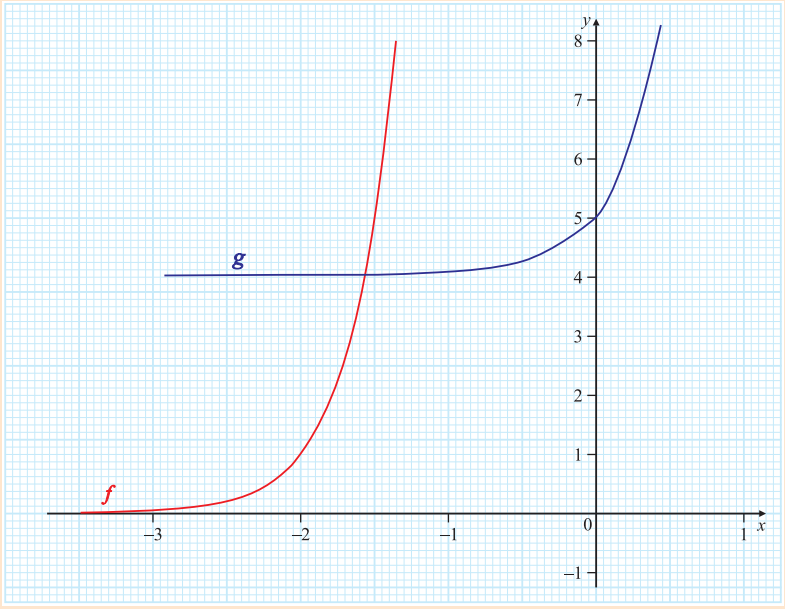
8.



9.



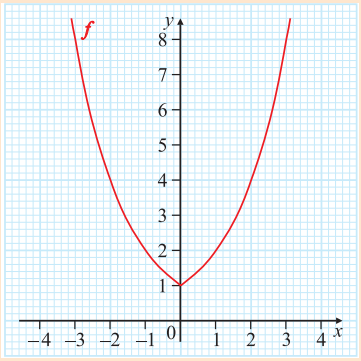
10. Funkcije f i h su jednake. $\left(f(x)=5^{2x+4},\ h(x)=25^{x+2}=\left(5^2\right)^{x+2}=5^{2x+4}\right)$

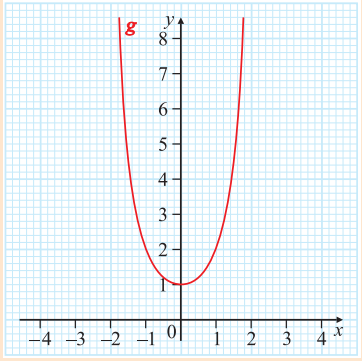


11. Kako bismo nacrtali ova dva grafa, izračunajmo nekoliko vrijednosti funkcija.

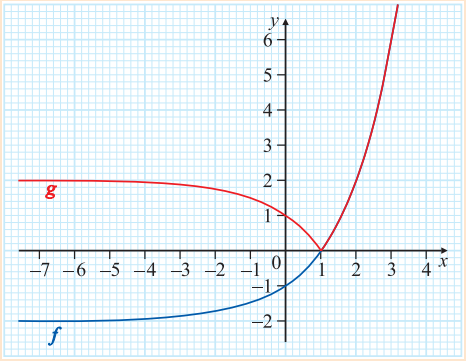
x	$f(x)=2^{\lvert x\rvert}$
0	1
0.5	1.41
1	2
–1	2
1.5	2.83
2	4
–2	4

x	$g(x)=2^{x^2}$
0	1
0.5	1.19
1	2
–1	2
1.5	4.76
2	16
–2	16

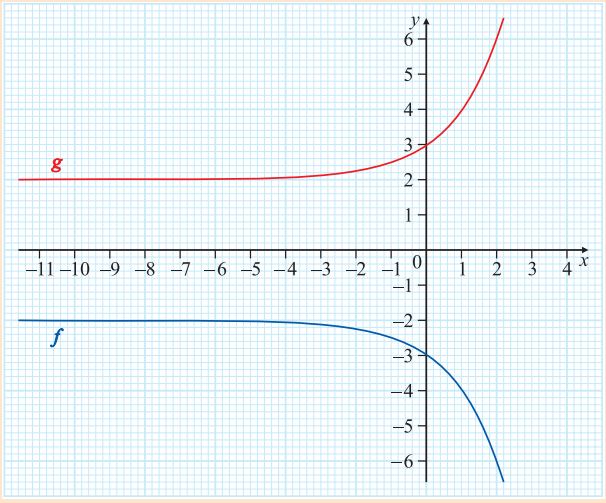




12.



13.



14. $\left(y = 176000(1-0.03)^8 = 137938.8313\right)$ Markova zarada 2009. god. je 137 939 kuna.

15. $C(t) = C_0(1+p)^t \Rightarrow C(200) = 4\,000(1+0.036)^{200} = 4\,720\,750.8.$
Svota je do 1990. narasla na 5 000 000$.
$C(t) = C_0(1+p)^t \Rightarrow C(220) = 4\,000(1+0.036)^{220} = 9\,576\,486.072$
Do 2010. god. svota će biti 9 576 486 $.

16. S obzirom da je obračun kamata mjesečni, moramo to uvažiti
$\Rightarrow 10\,000 = C_0\left(1+\frac{0.035}{12}\right)^{12\cdot 3} \Rightarrow C_0 = 9\,004.6212$. Moramo uložiti 9 004.62 $.

17. $N(3) = 250e^{0.046\cdot 3} \Rightarrow N(3) = 286.99388 \approx 287$. Nakon tri dana bit će 287 virusa.

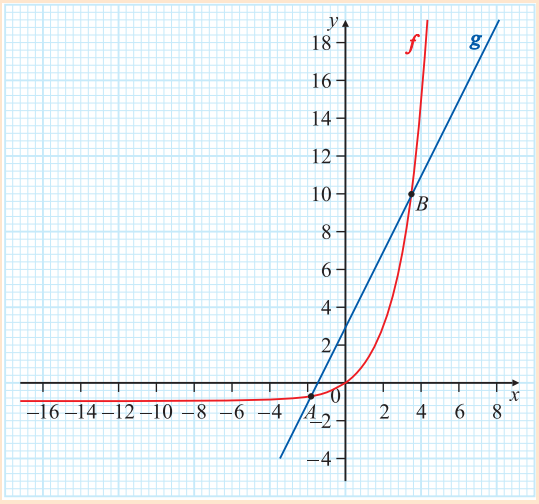
18. Bit će isporučeno 2 632 112 uređaja. $N(1) = 1\,800\,000e^{0.38\cdot 1} \Rightarrow N(1) = 2\,632\,112$

19. a) $C(0) = 12.5$ b) $C(4) = 12.5 \cdot 1.06^4 = 15.78$

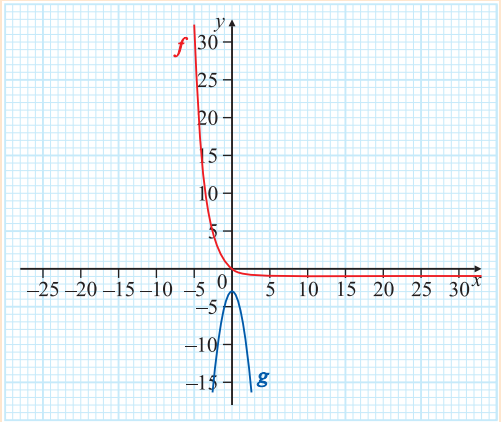
20. $C(t) = 218\,000\cdot(1.05)^t \Rightarrow C(20) = 218\,000\cdot(1.05)^{20} = 578\,418.8997 \approx 578\,419$
Godine 2010. će 578 419 ljudi raditi kod kuće.

21. $C(t) = 40\,000\cdot(0.9)^t \Rightarrow C(15) = 40\,000\cdot(0.9)^{15} = 8\,235.654 \approx 8\,236$
Još će 8 236 domaćinstava koristiti septičke jame.

22. Jednadžba ima dva rješenja.



23. Nema rješenja.



2.5.2. Logaritamska funkcija

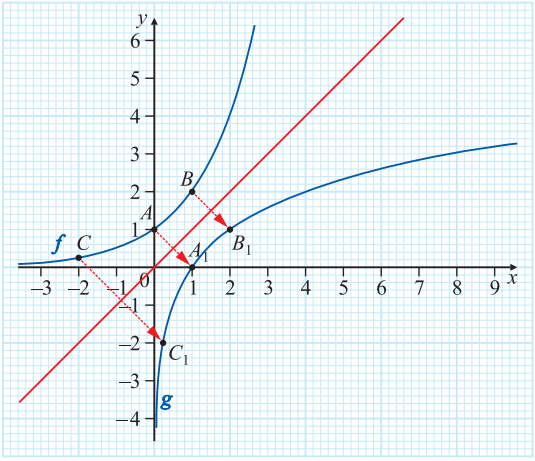
Logaritamska funkcija je funkcija inverzna eksponencijalnoj funkciji. Ako znamo graf funkcije, graf inverzne funkcije dobivamo osnom simetrijom oko simetrale prvog i trećeg kvadranta ($y = x$). To vrijedi i za eksponencijalnu i logaritamsku funkciju.

$$\log_b y = x \iff y = b^x$$

Iz ove veze jednostavno dobivamo: $y = b^{\log_b y}$ i $\log_b b^x = x$.

Logaritam baze 10 nazivamo dekadski logaritam i označavamo $\log_{10} x = \log x$, a logaritam baze e nazivamo prirodni logaritam i označavamo $\log_e x = \ln x$.

$f(x) = 2^x$ $\qquad$ $g(x) = \log_2 x$



Primjer 1: Riješimo sljedeće primjere.

a) Koristeći logaritam zapišimo izraz: $10^{-2} = 0.01$.

Rješenje: $y = b^x \iff \log_b y = x \Rightarrow 10^{-2} = 0.01 \iff \log 0.01 = -2$

b) Koristeći potencije zapišimo izraz $\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$ i provjerimo je li tvrdnja točna.

Rješenje: $\log_b y = x \iff y = b^x$

$$\log_{\frac{1}{2}} 8 = -3$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 8$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = 2^3 = 8$$

c) Odredimo realni broj x, ako je $\log_{49} x = \frac{1}{2}$.

Rješenje: Ako je $\log_{49} x = \frac{1}{2}$, onda je $x = 49^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x = 7$.

d) Odredimo realni broj x ako je $\log_x \sqrt{3} = \frac{1}{4}$.

Rješenje: $\log_x \sqrt{3} = \frac{1}{4} \Rightarrow \; x^{\frac{1}{4}} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \left(x^{\frac{1}{2}} \right)^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x^{\frac{1}{2}} = 3^{/2} \Rightarrow \; x = 9$

e) Izračunajmo $\left(\frac{1}{16} \right)^{\log_4 2}$.

Rješenje: Znamo da je $y = b^{\log_b y}$, pa iz toga zaključujemo:

$$\left(\frac{1}{16} \right)^{\log_4 2} = \left(4^{-2} \right)^{\log_4 2} = \left(4^{\log_4 2} \right)^{-2} = 2^{-2} = \frac{1}{4}.$$

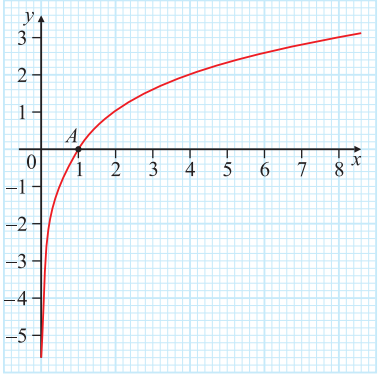
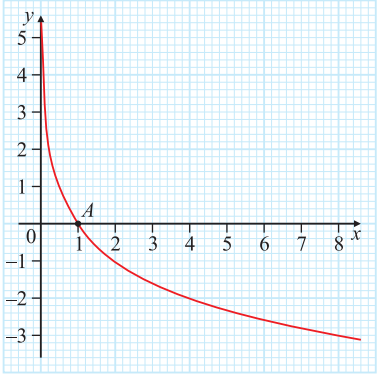
f) Izračunajmo $\log_7 \sqrt{7} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{3}$.

Rješenje: Znamo da je $\log_b b^x = x$, te iz toga zaključujemo:

$$\log_7 \sqrt{7} + \log_{\frac{1}{3}} \sqrt[4]{3} = \log_7 7^{\frac{1}{2}} + \log_{\frac{1}{3}} \left[\left(\frac{1}{3} \right)^{-1} \right]^{\frac{1}{4}} =$$

$$= \frac{1}{2} + \log_{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{3} \right)^{-\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}.$$

Logaritamska funkcija je svaka realna funkcija oblika $f(x) = \log_b x$, gdje je $b > 0$, $b \neq 1$ baza. Njezina domena su svi pozitivni realni brojevi, a slika funkcije su svi realni brojevi.

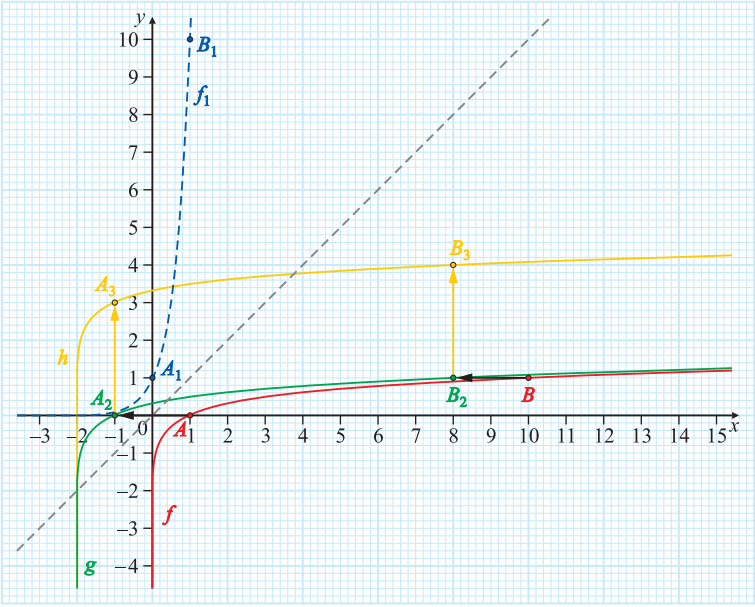
$f(x) = \log_2 x$	$g(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$
	
Za $b > 1$ funkcija f raste	Za $0 < b < 1$ funkcija g pada
Siječe os x u $(1, 0)$	
Asimptota je y-os	
$D(f) = R^+$	
Injektivna je $(\log_b x_1 = \log_b x_2 \Rightarrow x_1 = x_2)$.	
Graf funkcije g simetričan je funkciji f s obzirom na x-os	

Primjer 2: Nacrtajmo u istom koordinatnom sustavu grafove funkcija $f(x) = \log x$, $g(x) = \log(x + 2)$ i $h(x) = \log(x + 2) + 3$.

Rješenje: Najjednostavniji način je nacrtati graf eksponencijalne funkcije i onda napraviti osnu simetriju s obzirom na simetralu prvog i trećeg kvadranta. Drugi način bio bi izračunati nekoliko različitih vrijednosti eksponencijalne funkcije, te zamijeniti x sa y. Koristeći svojstva pomaka u smjeru osi x i y nacrtamo i preostale funkcije.

x	$f_1(x) = 10^x$
-2	0.01
-1	0.1
0	1
1	10

x	$f(x) = \log x$
0.01	-2
0.1	-1
1	0
10	1



Primjer 3: Za funkciju $f(x) = \log_b x$ vrijedi da je $f(25) = 2$. Odredimo vrijednost baze b.

Rješenje: Ako je $f(25) = \log_b 25 = 2$, znači da je $b^2 = 25 \Rightarrow b = 5$.

Svojstva logaritamske funkcije (pravila za računanje s logaritmima)

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b x^r = r\log_b x$
4. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \Rightarrow \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
5. $\log_b 1 = 0$, $\log_b b = 1$
6. $\log_{(b^r)} x = \frac{1}{r} \cdot \log_b x$

Primjer 4: Logaritmirajmo izraz $\dfrac{\sqrt[3]{a^2b}}{100}$.

Rješenje: Izraz označimo sa x i logaritmirajmo.

$$x = \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{100}$$

$$\log x = \log \frac{\sqrt[3]{a^2b}}{100} = \log \sqrt[3]{a^2b} - \log 100 =$$

$$= \log\left(a^2b\right)^{\frac{1}{3}} - \log 10^2 = \frac{1}{3}\left(\log a^2 + \log b\right) - 2\log 10 =$$

$$= \frac{1}{3}\left(2\log a + \log b\right) - 2 = \frac{2}{3}\log a + \frac{1}{3}\log b - 2$$

Primjer 5: Odredimo broj x, ako je $\log x = \dfrac{3}{4}\log a^2 - \dfrac{1}{2}\log\sqrt{b} + 1$.

Rješenje: Koristeći pravila logaritama prikazat ćemo desnu stranu izraza pomoću jednog logaritma.

$$\log x = \log\left(a^2\right)^{\frac{3}{4\cdot 2}} - \log\left(b^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} + \log 10 =$$

$$= \log a^{\frac{3}{2}} - \log b^{\frac{1}{4}} + \log 10 = \log \frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{4}}} \cdot 10 =$$

$$= \log \frac{10\sqrt{a^3}}{\sqrt[4]{b}} = \log\left(10 \cdot a\sqrt[4]{\frac{a^2}{b}}\right)$$

Sada vidimo da je $x = 10 \cdot a\sqrt[4]{\dfrac{a^2}{b}}$.

Primjer 6: Pojednostavnimo izraz $\dfrac{\log 15 - \log 6}{\log 8 - \log 20}$.

Rješenje: $\dfrac{\log 15 - \log 6}{\log 8 - \log 20} = \dfrac{\log \dfrac{15^{5}}{6^{2}}}{\log \dfrac{8^{2}}{20^{5}}} = \dfrac{\log \dfrac{5}{2}}{\log \dfrac{2}{5}} = \dfrac{\log \dfrac{5}{2}}{\log\left(\dfrac{5}{2}\right)^{-1}} = \dfrac{\log \dfrac{5}{2}}{-\log \dfrac{5}{2}} = -1$

Primjer 7: Izračunajmo $\log_{\frac{1}{4}} \log_9 \log_{\sqrt[3]{5}} 125$.

Rješenje: Koristeći pravilo (4.) za promjenu baza, svodimo ovaj izraz na jednostavniji oblik.

$$\log_{\frac{1}{4}}\log_9\log_{\sqrt[3]{5}}125=\log_{\left(4^{-1}\right)}\log_{\left(3^2\right)}\log_{\left(\frac{1}{5^{\frac{1}{3}}}\right)}5^3=$$

$$=-\log_4\left(\frac{1}{2}\log_3\left(3\cdot 3\log_5 5\right)\right)=$$

$$=-\log_4\left(\frac{1}{2}\log_3 3^2\right)=-\log_4\left(\frac{2}{2}\log_3 3\right)=$$

$$=-\log_4\left(1\right)=0$$

Primjer smo mogli riješiti i ovako:

$$\log_{\frac{1}{4}}\log_9\log_{\sqrt[3]{5}}125=\log_{\frac{1}{4}}\log_9\log_{5^{\frac{1}{3}}}5^3=$$

$$=\log_{\frac{1}{4}}\log_9 9=\log_{\frac{1}{4}}1=0$$

Primjer 8: Izračunajmo $2^x=11$ i $\log_x 3=8$.

Rješenje: Mnoge zadatke ne možemo riješiti do kraja bez kalkulatora, tako niti ova dva.
Iz izraza $2^x=11$ dobivamo $x=\log_2 11$ i vidimo da broj 11 ne možemo prikazati kao potenciju baze 2. Koristeći kalkulator dobivamo aproksimaciju 3.45943.
(Većina kalkulatora ima mogućnost računanja logaritama baze 10 i baze *e*. Koristeći svojstvo 4. računanja s logaritmima možemo zapisati:

$$x=\log_2 11=\frac{\log 11}{\log 2}\approx\frac{1.04139}{0.30103}\approx 3.4594.)$$

Iz izraza $\log_x 3=8$ dobivamo: $x^8=3\ \Rightarrow x=\sqrt[8]{3}$.

No, i u ovom slučaju možemo se susresti s problemom računanja višeg korijena kalkulatorom. Izraz prikažimo pomoću logaritama.

$$\log_x 3=\frac{\log 3}{\log x}\ \Rightarrow\ \log x=\frac{\log 3}{\log_x 3}\ \Rightarrow\ \log x=\frac{\log 3}{8}$$

$$\log x\approx 0.05964\ \Rightarrow\ x\approx 10^{0.05964}\approx 1.147203$$

Primjer 9: Ako je 1 000 stanovnika osnovalo grad, koliko godina treba da bi se broj stanovnika uz stopu rasta od 3% udvostručio? Za koliko godina će broj stanovnika dostići 4 000?
Rast populacije odvija se po eksponencijalnom zakonu $N(t)=N_0e^{kt}$, gdje je $N(t)$ veličina populacije koja ovisi o vremenu t (u godinama), k stopa rasta (postotak u decimalnom obliku), a N_0 broj stanovnika u nultoj godini.

Rješenje: a) $2\,000=1\,000\cdot e^{0.03t}\ /:1\,000\ \Rightarrow\ 2=e^{0.03t}$
Vidimo da samo logaritmiranjem možemo doći do nepoznanice *t*.

$\ln 2 = (0.03) \cdot t$

$t = 23.1049$

Broj stanovnika će se udvostručiti za nešto više od 23 godine.

b) $4\,000 = 1\,000 \cdot e^{0.03t} / :1\,000 \implies 4 = e^{0.03t}$

$\ln 4 = (0.03) \cdot t$

$t = 46.2098.$

Broj stanovnika dostići će 4 000 za nešto više od 46 godina.

$46.2098 = 46 + 0.2098 \cdot 12 = 46 + 2.5176 =$

$= 46 + 2 + 0.5176 \cdot 30 = 46 + 2 + 15.528$

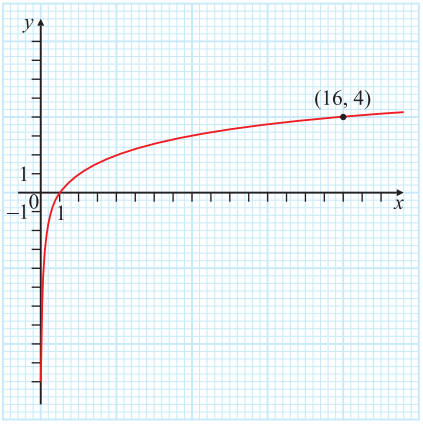
(46 godina 2 mjeseca i 16 dana)

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Ako je $\log_a x = s$ i $\log_a y^2 = t$, onda je $\log_a \frac{\sqrt{x}}{y} =$

a) $\frac{s-t}{2}$ b) $\frac{s}{t}$ c) $s - \frac{t}{2}$ d) $\sqrt{s} - \frac{t}{2}$.

2. (NI 2008.) Na slici je graf funkcije $f(x) = \log_b x$. Odredite b.



3. (NI 2009.) Izraz $\log_2 4a + \log_2 2a^2$ jednak je:

a) $3 + 3 \log_2 a$ b) $2a + 2$ c) $4 + 3 \log_2 a$ d) $4a + 3$.

4. (IK 2009.) Ako je $\log_a x = s$ i $\log_a y^2 = t$, onda je $\log_a \frac{x}{y} =$

a) $\frac{s}{t}$ b) $\frac{s-t}{2}$ c) $s - \frac{t}{2}$ d) $\sqrt{s} - \frac{t}{2}$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Ako je $a = \log 2$, $b = \log 3$, onda $\log\sqrt[3]{12}$ iznosi:

a) $\frac{1}{3}(a+2b)$ b) $(2a+b)^3$ c) $\frac{1}{3}(a-2b)$ d) $\frac{1}{3}(2a+b)$.

2. Zaokružite netočnu tvrdnju.

a) Ako je $f(x) = \log x$ i $f(t) = -3$, onda je $t = 0.001$.

b) Funkcija $f(x) = \log_{(0.1^{-1})} x$ raste.

c) Ako je $f(x) = \log_5 x$, onda je $f(1) = 0$.

d) $f(x) = \log_{(-10)} x$ je logaritamska funkcija.

3. Ako je $\log a + 3\log b = 2$ i $\log a - \log b = 1$, onda je izraz $a \cdot b$ jednak:

a) $\sqrt{10}$ b) 10 c) $10\sqrt{10}$ d) 100.

4. Vrijednost izraza $\log_3 \sqrt[4]{3} + \log_4(\log_{16} 256)$ jednaka je:

a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{1}{4}$ c) $2\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$.

5. Ako je $\log_3 7 = a$, $\log_9 25 = b$, onda je $\log_7 5$ jednako:

a) $2a$ b) $3b$ c) $\frac{a}{b}$ d) $\frac{b}{a}$.

6. Izračunajte $\log_{x+1}(x^2-1)\cdot\log_{\frac{1}{x}}\sqrt[3]{x+1}$.

a) $\log_x \sqrt[3]{x^2-1}$ b) $\log_x \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ c) $\log_{\frac{1}{x}} \frac{1}{\sqrt[3]{x^2-1}}$ d) $\log_{\frac{1}{x}}(x^2-1)$

7. Vrijednost izraza $4^{1-\frac{1}{2}\log_2 5}$ je:

a) 5 b) 4 c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$.

8. Ako je $\log 5 - a = 0$, nađite x takav da je $\log 40^{\frac{1}{x}} = 1$.

a) $2a-3$ b) $3-2a$ c) $(3-2a)^{-1}$ d) $(3a-2)^{-1}$

9. Ako je $\left(\log 5 - \sqrt{a}\right)^2 = 0$, izračunajte $\log\sqrt{32}$.

a) $1-\sqrt{a}$ b) $\frac{2}{5}(\sqrt{a}-1)$ c) $\frac{5}{2}(1-\sqrt{a})$ d) $\frac{5}{2}(\sqrt{a}-1)$

10. Ako je $\log_{32} 8 = a + 1$, odredite $x \in \boldsymbol{R}$ takav da je $\log_{32} 128^{x-1} = -\frac{7}{a}$.

a) $x = \frac{2+a^2}{a^2}$ b) $x = \frac{7}{2}a - 8$ c) $x = \frac{2}{a} + a$ d) $x = \frac{a^2-a+7}{a(a-1)}$

11. Vrijednost izraza $\log_2\left(\log_3\left(\log_5 125\right)\right)$ jednaka je:

a) 10 b) 2 c) 3 d) 0.

12. Vrijednost izraza $\log_4 \sqrt[3]{16} + \log_3\left(\log_9 729\right)$ jednaka je:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{4}{3}$ c) 1 d) $\frac{2}{3}$.

13. Koliko je $10^{\log 7}$?

a) 70 b) $\frac{1}{7}$ c) 7 d) $\frac{7}{10}$

14. Vrijednost izraza $\log_4 8$ je:

a) 2 b) 4 c) 3 d) $\frac{3}{2}$.

15. $\log_{\sqrt{3}} 3$ jednako je:

a) –2 b) $\frac{1}{2}$ c) $\sqrt{3}$ d) 2.

16. $10^{\log 9}$ jednako je:

a) 90 b) 9 c) $\frac{9}{10}$ d) $\frac{1}{9}$.

17. Koliko znamenaka ima broj 5^{200}?

a) 158 b) 140 c) 139 d) 157

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Zapišite koristeći logaritme.

a) $64^{0.5} = 8$ b) $5^{-2} = 0.04$

2. Odredite vrijednost x.

a) $\log x = -4$ b) $\log_{25} x = -0.5$ c) $\log_x 512 = 3$ d) $\log_x 5 = 0.5$

3. Koliko je $10^{\log 10}$?

4. U izrazu $\log_b a$ broj b nazivamo _____ .

5. Ako je $\log_b x = a$, onda je $x =$ _____ .

6. $\log_7 7 =$ _____ .

7. Logaritmirajte sljedeće izraze:

a) $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

b) $\frac{3h\sqrt{1-r}}{\sqrt{g}}$.

8. Odredite vrijednost y iz izraza $\log y = \log c + 3\log\pi + \log(x-4) - \log(x+4)$.

9. Izračunajte:

a) $\log_2 4\,096 + \log_3 \frac{1}{9} + 2\log_3 \sqrt{27} - \log_{\sqrt{6}} 1$

b) $\left[\log 0.1 + \log\left(\sqrt{10}\right)^3\right] \cdot \log 100.$

10. Ako je $\log^2 5 = a$ izračunajte $\log 160$.

11. Biljka raste eksponencijalno po zakonu $C(t) = 12.5 \cdot 1.06^t$, gdje je $C(t)$ visina biljke u centimetrima, a t broj tjedana koji su prošli od sađenja. Izračunajte:

a) visinu biljke kad je posađena
b) visinu biljke nakon 4 tjedna
c) nakon koliko tjedana će biljka biti dvostruko viša nego nakon sadnje
d) hoće li biljka nakon 8 tjedana biti dvostruko viša nego nakon četiri tjedna.

12. Vrijednost automobila pada eksponencijalno po zakonu $C = C_0 e^{kt}$ gdje je C_0 početna vrijednost, k stopa po kojoj se mijenja vrijednost, t vrijeme izraženo u godinama, a C trenutna vrijednost automobila. Automobil koji je star 3 godine ima vrijednost 59 500 kuna. Kad je bio nov, automobil je koštao 86 000 kuna. Koliko će automobil vrijediti za 5 godina? (Cijenu zaokružite na deseticu).

13. Mirna oroči 4 000 kuna uz kamatnu stopu od 4% koja se obračunava mjesečno. Za koliko godina će ovaj iznos narasti na 100 000 kuna?

14. Izračunajte bazu b logaritamske funkcije $f(x) = \log_b x$ čiji graf prolazi točkom $\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right)$.

15. Ako je $\log_b a = 0.75$ i $\log_b c = 0.25$, odredite vrijednost:

a) $\log_b a^2 c$

b) $\log_b \frac{\sqrt[3]{a}}{ac}$.

16. Masa (u gramima) radioaktivne tvari koja je preostala nakon t godina, dana je sa $N = 100 \cdot e^{-0.0017t}$. Odredite vrijeme poluraspada (vrijeme potrebno da se raspadne polovica početne mase te tvari).

17. Hlađenje tijela koje se nalazi u okolini temperature niže od njega samog, dano je sa $T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)e^{-kt}$, gdje je $T(t)$ temperatura tijela nakon vremena t, T_0 temperatura okoline, T_1 temperatura tijela na početku hlađenja, a k je realna konstanta. Kolač je pečen u pećnici na temperaturi od 180 °C i izvađen u kuhinju na temperaturu od 22 °C. Nakon 5 minuta temperatura kolača bila je 150 °C.

a) Kolika će biti temperatura kolača 10 minuta nakon vađenja iz pećnice?

b) Kada će temperatura kolača pasti na 25 °C kako bismo ga mogli staviti u hladnjak?

18. Funkcija $N(t) = 1\,780 \cdot e^{0.75t}$ predstavlja broj bakterija u nekom uzorku t sati nakon što su umetnute u uzorak.

Izračunajte:

a) koliko je bakterija bilo kad su umetnute u uzorak

b) koliko je bakterija bilo nakon pola sata

c) koliko je bakterija bilo nakon 5 sati

d) kada će se broj bakterija utrostručiti

e) kada će u uzorku biti milijun bakterija.

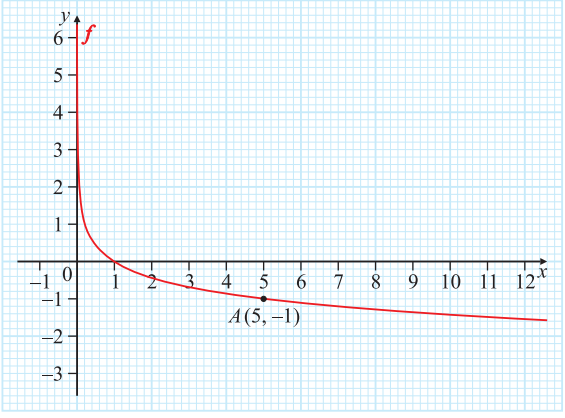
(Rješenje u d) i e) zadatku zapišite koristeći sate, minute i sekunde.)

19. Nacrtajte grafove funkcija $f(x) = \log_3 x$, $g(x) = \log_3(x-2)$, $h(x) = \log_3(x-2) - 3$, $k(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ u istom koordinatnom sustavu.

20. U koordinatnom sustavu nacrtan je graf funkcije $f(x) = \log_b x$.

a) Odredite bazu i u istom koordinatnom sustavu nacrtajte graf $g(x) = \log_b(x + 1) + 2$.

b) Nacrtajte graf funkcije $h(x) = |\log_b x|$.



21. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcija $f(x) = \log_2 x - 2$ i $g(x) = |\log_2 x - 2|$.

22. Populacija divljih svinja u nekoj šumi raste po formuli $S(t) = 3\,200 + 525 \cdot \ln(t + 1)$, gdje je t vrijeme u godinama od ovog trenutka.
a) Koliko je divljih svinja u ovom trenutku u toj šumi?
b) Koliko će ih biti za 2 godine?
c) Za koliko godina će ih biti 5 000?
d) Kada će se njihov broj udvostručiti?

23. Ako uz dosadašnju potrošnju silicija zalihe dostaju za sljedećih 1 000 000 godina, koliko će nam one trajati uz godišnji rast potrošnje od 10%? Trajanje zaliha računamo po pravilu $kt = \ln(kT + 1)$, gdje je T trajanje zaliha bez porasta potrošnje, a t trajanje zaliha uz porast potrošnje po stopi k. Ako bismo smanjili potrošnju na 5% godišnje, koliko bi onda trajale zalihe? Pokušajte procijeniti koliko bismo trebali smanjiti potrošnju, ako želimo da nam zalihe dostaju bar 500 godina.

24. Koliko rješenja ima jednadžba $\log_2 x = 2^x$?

25. Koliko rješenja ima jednadžba $-2x^2 - 3 = \log x - 2$?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a **2.** $b = 2$ **3.** a **4.** c

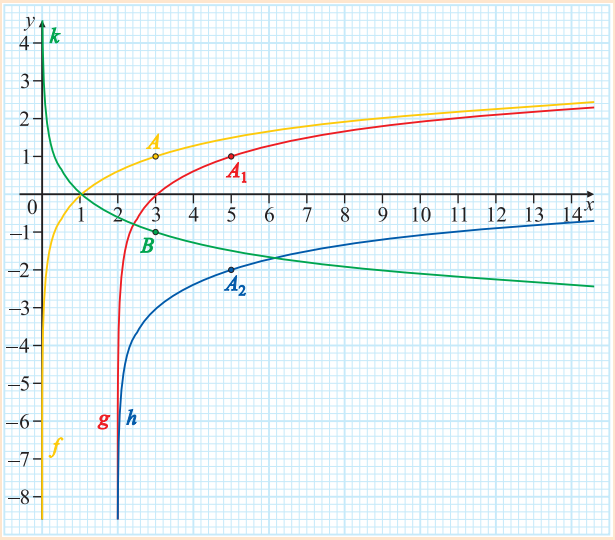
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** d **3.** c **4.** a **5.** d **6.** b **7.** c **8.** b **9.** c
10. d **11.** d **12.** a **13.** c **14.** d **15.** d **16.** b **17.** b

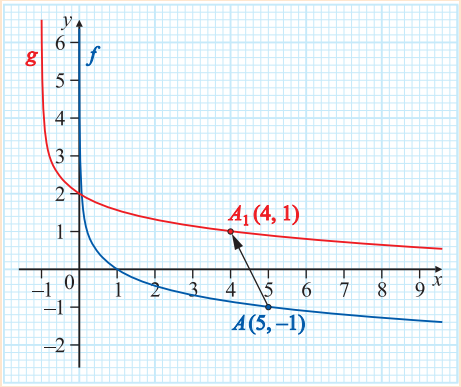
ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. a) $\log_{64} 8 = 0.5$ b) $\log_5 0.04 = -2$
2. a) $x = 10^{-4} = 0.0001$ b) $x = 25^{-0.5} = 0.2$ c) $x = 8$, d) $x = 25$
3. 10 **4.** baza logaritma **5.** $x = b^a$ **6.** 1
7. a) $\frac{1}{2}\left(\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c)\right)$ b) $\log 3 + \log h + \frac{1}{2}\log(1-r) - \frac{1}{2}\log g$
8. $y = \frac{c\pi^3(x-4)}{x+4}$ **9.** a) 13 b) 1 **10.** $5 - 4\sqrt{a}$
11. a) $C(0) = 12.5$ b) $C(4) = 12.5 \cdot 1.06^4 = 15.78$ c) 12 d) neće (20 cm)
12. $59\,500 = 86\,000e^{3k} \Rightarrow k = -0.12279, \Rightarrow N(8) = 86\,000e^{-0.12279 \cdot 8} = 32\,201.9592 \approx 32\,200$ kuna
13. $\cancel{100\,000} = \cancel{4\,000}\left(1 + \frac{0.05}{12}\right)^{12t} \Rightarrow 25 = \left(\frac{241}{240}\right)^{12t} \Rightarrow \log 25 = 12t \log\frac{241}{240} \Rightarrow t \approx 64.5115$ godina
14. $b = 4$ **15.** a) $\frac{7}{4}$ b) $-\frac{3}{4}$ **16.** $50 = 100 \cdot e^{-0.0017t} \Rightarrow t = 407.7336 \approx 408$ godina
17. a) Nakon 10 minuta temperatura će pasti na 126 °C.
b) Temperatura će pasti na 25 °C za 94 minute.
18. a) $N(0) = 1\,780$
b) $N(0.5) \approx 2\,589.88 \approx 2\,590$
c) $N(5) \approx 75\,687.526$
d) $3 = e^{0.75t} \Rightarrow t \approx 1.4648 \approx 1$ sat 27 minuta 53 sekunde
e) Nakon 8 sati 26 minuta 29 sekundi.

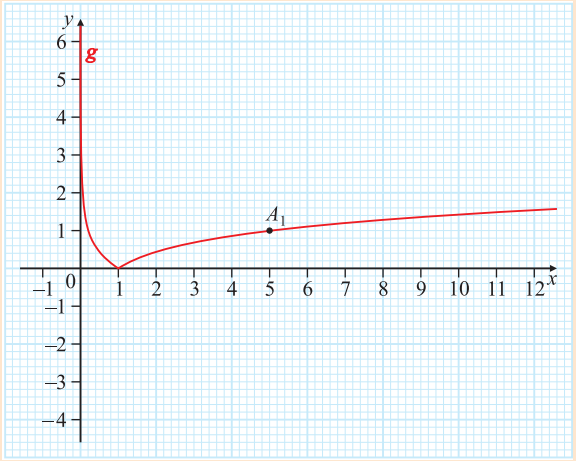
19.



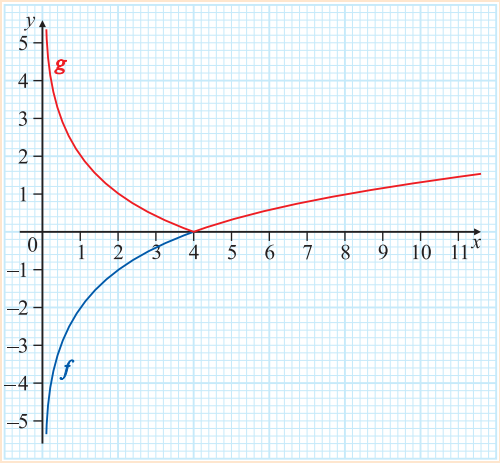
20. a) $b = \frac{1}{5}$



b)



21.

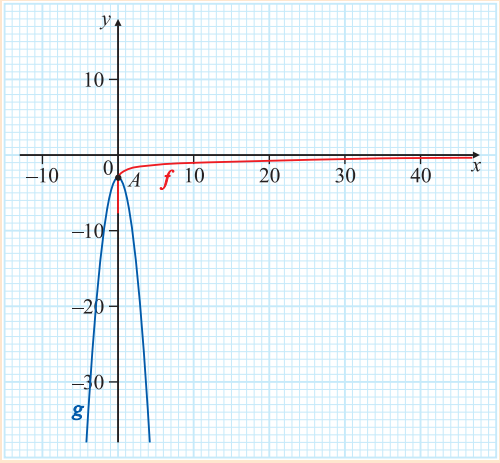


22. a) $S(0) = 3\,200 + 525 \cdot \ln(1) = 3\,200$
Ovog trenutka ih je 3 200.
b) $S(2) = 3\,200 + 525 \ln(2 + 1) = 3\,776.771 \approx 3\,777$
Za dvije godine bit će ih 3 777.
c) $5\,000 = 3\,200 + 525 \cdot \ln(t + 1) \Rightarrow t = 29.83 \approx 30$
Za 30 godina bit će ih 5 000.
d) $6\,400 = 3\,200 + 525 \cdot \ln(t + 1) \Rightarrow t = 442.7 \approx 443$
Za 443 godine njihov će se broj udvostručiti.

23. $0.1t = \ln(0.1 \cdot 1\,000\,000 + 1) \Rightarrow t = 115.1293 \approx 115$
Zalihe silicija potrošit ćemo za 115 godina.
$0.05t = \ln(0.05 \cdot 1\,000\,000 + 1) \Rightarrow t = 216.396 \approx 216$
Tada bi nam zalihe trajale 216 godina.
Izračunamo vrijednost izraza za nekoliko vrijednosti i uočimo da će uz godišnji porast potrošnje od 2% zalihe trajati 495 godina. Odgovor bi bio za postotak manji od 2%.

24. Nema rješenja.

25. Jedno rješenje.



2.5.3. Eksponencijalna jednadžba

Jednadžbe kod kojih se nepoznanica nalazi u eksponentu zovemo eksponencijalne jednadžbe. Za eksponencijalne funkcije vrijedi:

$$b^{f(x)} = b^{g(x)} \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Primjer 1: Riješimo jednadžbu $10^{1-x} = 1$.

Rješenje: Ovo je jednostavna eksponencijalna jednadžba: i na lijevoj i na desnoj strani jednadžbe izraz možemo prikazati pomoću iste baze, a koristeći jednakost eksponencijalnih funkcija izjednačujemo eksponente.

$$10^{1-x} = 10^0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 1$$

Primjer 2: Riješimo jednadžbu $100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 25$.

Rješenje: U ovoj jednadžbi moramo urediti izraz kako bismo prepoznali jednake baze i riješili slično prvom primjeru.

$$10^2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = 5^2 \,/ : 10^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{5}} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\frac{x}{5} = 2$$

$$x = 10$$

Primjer 3: Riješimo jednadžbu $(0.25)^{1-2x} \cdot \sqrt{64^{1-x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^{\frac{x}{2}}$.

Rješenje: $(0.25)^{1-2x} \cdot \sqrt{64^{1-x}} = \left(\frac{1}{\sqrt{4}}\right)^{\frac{x}{2}}$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{1-2x} \cdot \left(\left(4^3\right)^{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{2}}$$

$$4^{-1+2x} \cdot 4^{\frac{3}{2}-\frac{3x}{2}} = 2^{-\frac{x}{2}}$$

$$\left(2^2\right)^{-1+2x} \cdot \left(2^2\right)^{\frac{3}{2}-\frac{3x}{2}} = 2^{-\frac{x}{2}}$$

$$2^{-2+4x} \cdot 2^{3-3x} = 2^{-\frac{x}{2}}$$

$$2^{-2+4x+3-3x} = 2^{-\frac{x}{2}}$$

$$x + 1 = -\frac{x}{2}$$

$$3x = -2$$

$$x = -\frac{2}{3}$$

Primjer 4: Riješimo jednadžbu $2^{1+2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$.

Rješenje: Rješavanje ove jednadžbe svodi se na rješavanje kvadratne jednadžbe.

Rastavimo $2^{1+2x} = 2 \cdot 2^{2x}$ tako da možemo uvesti supstituciju.

$2 \cdot 2^{2x} - 9 \cdot 2^x + 4 = 0$

Neka je $2^x = t$, odnosno $2^{2x} = t^2$. Sada imamo:

$$2t^2 - 9t + 4 = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{1,2} = \frac{9 \pm \sqrt{81-32}}{4}$$

$$\Rightarrow \quad t_1 = 4, \quad t_2 = \frac{1}{2}.$$

Sada još izračunajmo vrijednost nepoznanice x.

$2^{x_1} = 2^2 \Rightarrow x_1 = 2$

$2^{x_2} = 2^{-1} \Rightarrow x_2 = -1$

Primjer 5: Riješimo jednadžbu $4 \cdot 3^{x+1} - 3^{x+2} - 3^{x-1} = 72$.

Rješenje: Vidimo da sva tri izraza 3^{x+1}, 3^{x+2} i 3^{x-1} možemo zapisati pomoću 3^x.

$4 \cdot 3^x \cdot 3 - 3^x \cdot 3^2 - 3^x \cdot 3^{-1} = 72$

$$3^x \left(12 - 9 - \frac{1}{3}\right) = 72$$

$$3^x \cdot \frac{8}{3} = 72 \ / \cdot \frac{3}{8}$$

$$3^x = 27 \quad \Rightarrow \quad 3^x = 3^3 \quad \Rightarrow \quad x = 3.$$

Primjer 6: Riješimo jednadžbu $2^x + 3^{x-2} = 3^x - 2^{x+1}$.

Rješenje: Grupiramo potencije jednakih baza i pojednostavimo.

$2^x + 2^x \cdot 2^1 = 3^x - 3^x \cdot 3^{-2}$

$$2^x (1+2) = 3^x \left(1 - \frac{1}{9}\right)$$

$$3 \cdot 2^x = \frac{8}{9} \cdot 3^x \ / \cdot 9$$

$$3^3 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 3^x$$

Dalje možemo rješavati na jedan od dvaju načina.

I. $3^3 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 3^x \ / : (2^3 \cdot 3^3)$

$2^{x-3} = 3^{x-3}$

Budući da su eksponenti jednaki, a baze nisu, ovo je moguće samo ako je eksponent jednak nuli.

$x - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

II. $3^3 \cdot 2^x = 2^3 \cdot 3^x \ / : (3^3 \cdot 3^x)$

$$\frac{2^x}{3^x} = \frac{2^3}{3^3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$x = 3$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Odredite x iz jednadžbe $10^{x+1} = 0.1$.

2. (NI 2008.) Riješite jednadžbu $2 \cdot 2^{2x} + 4^{x+2} - 2 \cdot 4^{x-1} = 35$.

3. (NI 2009.) Rješenje jednadžbe $5 \cdot 9^{x+1} = 15$ nalazi se u intervalu:
a) $\langle 0,\ 2]$ b) $\langle -2,\ -1]$ c) $\langle -1,\ 2]$ d) $\langle 2,\ \infty\rangle$.

4. (NI 2009.) U jednadžbi $100 \cdot 10^x = 0.01$ nepoznanica x jednaka je:
a) -4 b) -3 c) -2 d) -1.

5. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $10^{x+1} = \frac{1}{10}$.

6. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $3 \cdot 10^x = 300$.

7. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $2^{2x+1} = \sqrt{8}$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Zbroj rješenja jednadžbe $64^x - 20 \cdot 8^x + 64 = 0$ iznosi:
a) 2 b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{8}{3}$.

2. Realna rješenja jednadžbe $3^{x^2-x} - 9 = 0$ su:
a) $\{0,\ 1\}$ b) $\{1,\ 1\}$ c) $\{1,\ -2\}$ d) $\{-1,\ 2\}$.

3. Realna rješenja jednadžbe $3^{x-1} + 2 \cdot 3^x + 2 \cdot 3^{x+1} = 9 \cdot 5^{x-1}$ su:
a) $\{2\}$ b) $\{0,\ 5\}$ c) $\{3\}$ d) $\{1,\ -2\}$.

4. Zbroj rješenja jednadžbe $4^x - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$ je:
a) 5 b) 7 c) $\frac{7}{3}$ d) 3.

5. Zbroj rješenja jednadžbe $7 \cdot 2^{\frac{2}{x^2}} \cdot 3^{\frac{2}{x^2}} - 85 \cdot 6^{\frac{1}{x^2}-1} \cdot 7^{\frac{1}{x^2}} + 7^{\frac{2}{x^2}+1} = 0$ je:
a) $-\frac{1}{7}$ b) 0 c) $\frac{6}{7}$ d) nema rješenja.

6. Zbroj realnih rješenja jednadžbe $2^{x^2-\frac{5}{7}x} = \sqrt[7]{4}$ jednak je:
a) $\frac{2}{7}$ b) $\frac{3}{7}$ c) $\frac{4}{7}$ d) $\frac{5}{7}$.

7. Realno rješenje jednadžbe $2^x \cdot 3^{x+1} \cdot 5^{x-3} = 21.6$ pripada skupu:
a) $\langle -\infty,\ -2\rangle$ b) $[-2,\ 2\rangle$ c) $[2,\ 4]$ d) $\langle 4,\ +\infty\rangle$.

8. Realno rješenje jednadžbe $\left(\frac{3}{2}\right)^{x}-\left(\frac{2}{3}\right)^{1-x}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x-2}-\left(\frac{2}{3}\right)^{3-x}=2\frac{7}{16}$ pripada skupu:

a) $\langle-\infty,-2\rangle$ b) $[-2,0\rangle$ c) $[0,2\rangle$ d) $[2,+\infty\rangle$.

9. Zbroj svih rješenja jednadžbe $2\sqrt{4^{|x+1|}}-5\sqrt{6^{|x+1|}}+3\sqrt{9^{|x+1|}}=0$ je:

a) $\frac{5}{2}$ b) -1 c) 0 d) $-\frac{3}{2}$.

10. Jednadžba $9\cdot\sqrt{3^{x^2+|x|}}=\sqrt[3]{27^{-|x|+1}}$ ima:

a) 1 rješenje b) 2 rješenja c) 3 rješenja d) nema rješenja.

11. Umnožak rješenja jednadžbe $2\cdot3^{|x|}+9^{\frac{|x|}{2}}-27^{\frac{|x|}{2}}=0$ jednak je:

a) 4 b) 2 c) -2 d) -4.

12. Jednadžba $4^{x^2-x+1}-8^{x}=0$ ima:

a) produkt korijena negativan b) sumu korijena -5
c) dvostruki korijen d) recipročne korijene.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Riješite jednadžbu $27^{x}=9^{x+2}$.

2. Riješite jednadžbu $16^{x+4}=32^{2x-10}$.

3. Odredite zbroj realnih rješenja jednadžbe $12\left(\frac{4}{3}\right)^{-2x-1}-25\left(\frac{3}{4}\right)^{x+1}+9=0$.

4. Odredite zbroj svih rješenja jednadžbe $5^{\frac{|x|}{2}-2}-40\cdot10^{-3}=0$.

Riješite jednadžbe.

5. $\sqrt{5^{x^2-|x|}}\cdot\left(2\cdot10^{-1}\right)^{|x|+1}=4\cdot10^{-2}$

6. $4^{2x^2+2x}=8$

7. $2^{x}=-4$

8. $4^{5-9x}=\frac{1}{8^{x-2}}$

9. $2^{x}=2\sqrt{2}$

10. $10^{x}=0.1\cdot1\,000^{x-1}$

11. $\frac{10^{\frac{1}{3}}\cdot1\,000}{10^{x}}=0.01$

12. $\sqrt[2x+4]{4^{x+8}}=\sqrt[6]{128}$

13. $2^{x}\cdot5^{x}=0.1\left(10^{x-1}\right)^{5}$

14. $\left(\frac{1}{4}\right)^{2-\sqrt{5x+1}}=4\cdot2^{\sqrt{5x+1}}$

15. $9^{x+2}+5\cdot9^{x+1}=14$

16. $\sqrt{5^{3x}+19}-\sqrt{5^{3x}-4}=1$

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. $x=-2$ **2.** $x=\frac{1}{2}$ **3.** c **4.** a **5.** $x=-2$ **6.** $x=2$ **7.** $x=\frac{1}{4}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** d **3.** c **4.** a **5.** b **6.** d
7. c **8.** d **9.** b **10.** d **11.** d **12.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x=2$ **2.** 11 **3.** 0 **4.** 0

5. $x\in\{-2,-1,1,2\}$ **6.** $x_1=\frac{1}{2}$, $x_2=-\frac{3}{2}$ **7.** Nema rješenja. **8.** $x=\frac{4}{15}$

9. $x=\frac{3}{2}$ **10.** $x=2$ **11.** $x=\frac{16}{3}$ **12.** $x=34$

13. $x=\frac{3}{2}$ **14.** $x=7$ **15.** $x=-1$ **16.** $x=1$

2.5.4. Logaritamska jednadžba

Svojstva logaritamske funkcije (pravila za računanje s logaritmima)

1. $\log_b(xy) = \log_b x + \log_b y$
2. $\log_b\left(\frac{x}{y}\right) = \log_b x - \log_b y$
3. $\log_b x^r = r\log_b x$
4. $\log_b x = \log_b a \cdot \log_a x \Rightarrow \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$
5. $\log_b 1 = 0,\ \log_b b = 1$
6. $\log_{(b^r)} x = \frac{1}{r} \cdot \log_b x$

Jednadžbe kod kojih se nepoznanica nalazi pod znakom logaritma zovemo **logaritamske jednadžbe**. Za logaritamske funkcije vrijedi

$$\log_b f(x) = \log_b g(x) \Rightarrow f(x) = g(x).$$

Domena logaritamske funkcije su svi pozitivni realni brojevi tako da moramo uvjetovati pozitivnost izraza pod logaritmom ili nakon rješavanja jednadžbe provjeriti je li dobiveni broj rješenje jednadžbe. U slučaju da je nepoznanica u bazi logaritma provjeravamo je li baza pozitivna i različita od jedan.

Primjer 1: Riješimo sljedeće jednadžbe.

a) $\log_{\frac{1}{5}} x = -2$ b) $\log_x \frac{1}{16} = 2$ c) $10^x = 111$

Rješenje: a) Zbog domene logaritamske funkcije zahtijevamo $x > 0$. Ovu jednadžbu rješavamo izravnom vezom eksponencijalne i logaritamske funkcije: $\log_b y = x \Leftrightarrow y = b^x$.

$$\log_{\frac{1}{5}} x = -2 \Rightarrow x = \left(\frac{1}{5}\right)^{-2} \Rightarrow x = 25$$

b) $\log_x \frac{1}{16} = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{16} \Rightarrow x^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 \Rightarrow x = \pm\frac{1}{4}$

Budući da je baza logaritma pozitivan broj, samo je pozitivno rješenje $x = \frac{1}{4}$ rješenje jednadžbe.

c) Ovu eksponencijalnu jednadžbu rješavamo logaritmiranjem.

$$10^x = 111 \,/\, \log$$
$$\log 10^x = \log 111$$
$$x \log 10 = \log 111$$
$$x = \log 111 \Rightarrow x \approx 2.04532$$

Primjer 2: Riješimo jednadžbu $\log(5x)+\log(2x+3)=1+2\log(3-x)$.

Rješenje: Vidimo da će rješenja jednadžbe postojati za
$5x>0,\ 2x+3>0,\ 3-x>0 \Rightarrow x\in\langle 0,3\rangle$.
Ova jednadžba se rješava tako da svaku stranu jednakosti pokušamo svesti na jedan logaritam.

$$\log(5x)+\log(2x+3)=\log 10+\log(3-x)^2$$
$$\log(5x\cdot(2x+3))=\log(10\cdot(3-x)^2)$$
$$5x\cdot(2x+3)=10\cdot(3-x)^2$$
$$10x^2+15x=10\cdot(9-6x+x^2)$$
$$10x^2+15x=90-60x+10x^2$$
$$75x=90$$
$$x=\frac{6}{5}\quad\left(\text{zadovoljava uvjet } x\in\langle 0,3\rangle\right)$$

Rješenje jednadžbe je $x=\frac{6}{5}$.

Primjer 3: Riješimo jednadžbu $\frac{\log_3 x-1}{7+\log_3 x}+\frac{\log_3 x+7}{1-\log_3 x}=0$.

Rješenje: Jednadžba će imati rješenja za $x>0$. U jednadžbi možemo uvesti supstituciju jer nam se isti izraz pojavljuje četiri puta.
$\log_3 x=t$

$$\frac{t-1}{7+t}+\frac{t+7}{1-t}=0\ /\cdot(7+t)(1-t)$$ (uvjeti na nazivnik: $t\neq -7,\ t\neq 1$)
$$(t-1)(1-t)+(t+7)^2=0$$
$$-(t-1)^2=-(t+7)^2\ /\cdot(-1)$$
$$\cancel{t^2}-2t+1=\cancel{t^2}+14t+49$$
$$-16t=48$$
$$t=-3$$

Sad iz supstitucije dobivamo $\log_3 x=-3 \Rightarrow x=3^{-3}=\frac{1}{27}$.

Primjer 4: Riješimo jednadžbu $\log_3\left(5+4\cdot\log_2(x-1)\right)=2$.

Rješenje: Rješenja postoje za brojeve $x-1>0 \Rightarrow x>1$.
Ovu jednadžbu rješavamo izravnom vezom između eksponencijalne i logaritamske funkcije.

$$\log_3\left(5+4\cdot\log_2(x-1)\right)=2$$
$$5+4\cdot\log_2(x-1)=3^2$$
$$4\cdot\log_2(x-1)=9-5\ /:4$$
$$\log_2(x-1)=1$$
$$x-1=2^1$$
$$x=2+1$$
$$x=3$$

Jednadžbu možemo riješiti i tako da onu stranu znaka jednakosti koja je prikazana bez logaritma (u ovom slučaju desnu), prikažemo pomoću logaritma.

$$\log_3\left(5+4\cdot\log_2\left(x-1\right)\right)=2$$

$$\log_3\left(5+4\cdot\log_2\left(x-1\right)\right)=\log_3 9$$

$$5+4\cdot\log_2\left(x-1\right)=9$$

$$4\cdot\log_2\left(x-1\right)=4\,/:4$$

$$\log_2\left(x-1\right)=1$$

$$\log_2\left(x-1\right)=\log_2 2$$

$$x-1=2$$

$$x=3$$

Primjer 5: Riješimo jednadžbu $\log_3(2^x-7)=2$.

Rješenje: Za rješenje mora vrijediti $2^x>7$.

$$\log_3(2^x-7)=2$$

$$2^x-7=3^2$$

$$2^x=16$$

$$2^x=2^4$$

$$x=4\quad\left(\text{Vrijedi } 2^4>7.\right)$$

Primjer 6: Riješimo jednadžbu $x^{1+2\log x}=100x^{\log x}$.

Rješenje: U ovoj jednadžbi nepoznanica se nalazi i u bazi i u eksponentu. Logaritmiranjem ćemo eksponente „spustiti“ i tako riješiti zadatak. Ovdje vidimo da su uvjeti $x>0$, $x\neq 1$.

$$x^{1+2\log x}=100x^{\log x}$$

$$\left(1+2\log x\right)\log x=\log\left(100x^{\log x}\right)$$

$$\log x+2\log^2 x=\log 100+\log x^{\log x}$$

$$2\log^2 x+\log x=2+\log x\cdot\log x$$

$$2\log^2 x+\log x-\log^2 x-2=0$$

$$\log^2 x+\log x-2=0$$

Uvodimo supstituciju $\log x=t$.

$$t^2+t-2=0$$

$$t_1=1\Rightarrow\log x_1=1\Rightarrow x_1=10$$

$$t_2=-2\Rightarrow\log x_2=-2\Rightarrow x_2=10^{-2}$$

~~$\log^2 x=2\log x$~~

$\log^2 x=\log x\cdot\log x$ ✓

Primjer 7: Riješimo jednadžbu $e^{2x} = e^x + 6$.

Rješenje: Neke eksponencijalne jednadžbe ne možemo riješiti bez korištenja logaritama. U ovoj jednadžbi uvest ćemo supstituciju $e^x = t \Rightarrow \left(e^x\right)^2 = t^2$, te će se rješavanje svesti na rješavanje kvadratne jednadžbe.

$$t^2 = t + 6$$

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$t_1 = -2 \Rightarrow e^x = -2 \Rightarrow x \in \varnothing$$

(Vrijednost eksponencijalne funkcije ne može biti negativna.)

$$t_2 = 3 \Rightarrow e^x = 3$$

Logaritmiranjem gornje jednadžbe dobit ćemo rješenje.

$$x \ln e = \ln 3 \Rightarrow x = \ln 3 \approx 1.09861$$

Primjer 8: Riješimo jednadžbu $10^{3x-1} = 2^{2x+1}$.

Rješenje: Baze naših eksponencijalnih izraza su različite i ne možemo ih prikazati pomoću jednakih, tako da ćemo jednadžbu logaritmirati. Izbor baze logaritma ovisi o samoj jednadžbi, ali najjednostavnije je logaritmirati dekadskim logaritmom.

$$\log 10^{3x-1} = \log 2^{2x+1}$$

$$(3x-1)\log 10 = (2x+1)\log 2$$

$$3x - 1 = 2x \log 2 + \log 2$$

$$3x - 2x \log 2 = \log 2 + 1$$

$$x(3 - 2\log 2) = \log 2 + 1$$

$$x = \frac{\log 2 + 1}{3 - 2\log 2} \approx 0.54256$$

Primjer 9: Riješimo jednadžbu $\log_x 2 - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$.

Rješenje: Kako bismo riješili jednadžbu, logaritme moramo svesti na istu bazu. Ovdje će nam pomoći veza različitih baza: $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$. Vidimo da jednadžba ima smisla za $x > 0$, $x \neq 1$.

$$\frac{\log_4 2}{\log_4 x} - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$$

$$\frac{\frac{1}{2}\log_2 2}{\log_4 x} - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$$

$$\frac{1}{2\log_4 x} - \log_4 x + \frac{7}{6} = 0$$

Zamijenit ćemo $\log_4 x = t$.

$$\frac{1}{2t} - t + \frac{7}{6} = 0 \,/\cdot 6t \neq 0$$

$$3 - 6t^2 + 7t = 0$$

$$-6t^2 + 7t + 3 = 0$$

$$t_1 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \log_4 x_1 = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow x_1 = 4^{\frac{3}{2}} = 8$$

$$t_2 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow \log_4 x_2 = -\frac{1}{3} \quad \Rightarrow x_2 = 4^{-\frac{1}{3}}$$

Primjer 10: Riješimo sustav jednadžbi $\begin{cases} x + y = 34 \\ \log_2 x + \log_2 y = 6. \end{cases}$

Rješenje: Sustav ima smisla za $x > 0$, $y > 0$, $x < 34$, $y < 34$. Ovaj sustav možemo riješiti na nekoliko načina, a najjednostavniji je svesti ga na sustav linearne i nelinearne jednadžbe. Sređivanjem druge jednadžbe riješit ćemo se logaritama.

$$\log_2 x + \log_2 y = 6$$

$$\log_2 (xy) = 6$$

$$xy = 2^6 = 64$$

Iz prve jednadžbe izrazimo x i to uvrstimo u drugu jednadžbu.

$$(34 - y)\, y = 64$$

$$-y^2 + 34y - 64 = 0$$

$$y_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 32$$

$$y_2 = 32 \Rightarrow x_2 = 2$$

Rješenja zapisujemo kao uređene parove (32, 2), (2, 32).

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Iracionalno rješenje jednadžbe $7 \cdot 2^x - 4^x = 12$ jednako je:

a) $\log_2 3$ b) $\log_3 2$ c) $\log_3 4$ d) $\log_4 3$.

2. (IK 2009.) Koliki je umnožak rješenja jednadžbe $7 \cdot 2^x - 4^x = 12$?

a) 2 b) 6 c) $\log_2 6$ d) $\log_2 9$

3. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $\log_7 x = 3$.

4. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $\log_2 (x + 3) + \log_2 (x + 2) - 1 = 0$.

5. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $9^x - 5 \cdot 3^x + 4 = 0$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Rješenje jednadžbe $\log_7 x = 2\log_7 2 + 3\log_7 3$ je:

a) 7^5 b) 31 c) 108 d) 91.

2. Zbroj realnih rješenja jednadžbe $\log_2\left(3-2^x\right)=1-x$ pripada intervalu:

a) $\langle -\infty, -1\rangle$ b) $[-1, 1\rangle$ c) $[1, 10]$ d) $[10, 100\rangle$.

3. Realno rješenje jednadžbe $\log_2(x+1)-\log_2(2x-1)=1$ pripada skupu:

a) $\langle -\infty, 2\rangle$ b) $[2, 5\rangle$ c) $[5, 10\rangle$ d) $[10, 20\rangle$.

4. Zbroj rješenja jednadžbe $2\log(3x-5)-\log(x+1)=2-2\log 5$ jednak je:

a) 34/9 b) 3 c) –2 d) –1.

5. Realno rješenje jednadžbe $\log_2(\log_4 x)=1$ iznosi:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16.

6. Rješenje jednadžbe $\log_{\frac{1}{x-1}}\left(x^2+1\right)=0$ pripada skupu:

a) $[0, 1]$ b) nema rješenja

c) $\langle 1, 2\rangle$ d) $\langle 0, 2]$.

7. Rješenje jednadžbe $\log_2\left(3-2^{-x}\right)=1-x$ je:

a) manje od nula b) 0

c) veće od nula d) ne postoji.

8. Umnožak rješenja jednadžbe $\log^2 x - \log\left(x^2\right) - 8 = 0$ iznosi:

a) 100 b) 10 c) 0.01 d) 1.

9. Rješenje jednadžbe $\log_4\left(\log_3\left(\log_2(x-1)\right)\right)=0$ je:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 9.

10. Realno rješenje jednadžbe $\log_{0.5} x + \log_8 x = \frac{2}{3}$ pripada skupu:

a) $\langle -\infty, -1\rangle$ b) $[-1, 2\rangle$ c) $[2, 9\rangle$ d) $[9, 10\rangle$.

11. Zbroj realnih rješenja jednadžbe $\log_2^2 x + 2\log_2 x = 3$ iznosi:

a) 1.125 b) 2.125 c) 3.125 d) 4.125.

12. Rješenje jednadžbe $\log_2(5-x)+2\log_2\sqrt{3-x}=0$ je:

a) 8 b) $4-\sqrt{2}$ c) $4+\sqrt{2}$ d) $8+2\sqrt{2}$.

13. Realno rješenje jednadžbe

$$(2\log_2 x-1)^{-1}+(2\log_2 x-3)^{-1}=4\left(4\log_2^2 x-8\log_2 x+3\right)^{-1}$$

pripada skupu:

a) $\langle -\infty, 1\rangle$ b) $[1, 5\rangle$ c) $[5, 10]$ d) $[10, 100]$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Izračunajte umnožak realnih rješenja jednadžbe $\log_x 2(\log_x 2-3)=-2$.

2. Riješite jednadžbu $\log_2(x-1)+\log_2 x=1$.

3. Riješite jednadžbe.

a) $6^{6x}=66$ b) $5^{2x+1}=2^{5x-1}$

c) $7^{x-1}=13\cdot 10^x$ d) $3^{x-2}=5$

4. Riješite jednadžbe.

a) $\log_{\frac{1}{7}} x=-3$ b) $\log_3 x=3$

c) $\log x=4$ d) $\log_{\sqrt{2}}(2x-4)=4$

5. Riješite jednadžbe.

a) $\log_x 3=3$ b) $\log_x 81=2$

c) $\log_x 25=-2$ d) $\log_{x+1}16=2$

Riješite jednadžbe.

6. $\log\frac{1}{x^2}+\log\frac{1}{x}+\log x+\log x^2+\log x^3=6$

7. $\log_x 16-\frac{1}{2}=\log_x 8$

8. $\ln 2x+\ln x^2-\ln\sqrt[3]{x}=1+\ln 2-\ln x^{-3}$

9. $\frac{\ln x^{\pi}-1}{\ln x+1}=1$

10. $\log_2(9-2^x)=3-x$

11. $\log_3(1+\log_3(2x-7))=1$

12. $\left(\frac{4}{9}\right)^x\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\log 4}{\log 8}$

13. $7^{\log x}+13\cdot 7^{\log x-1}-5^{\log x+1}-3\cdot 5^{\log x-1}=0$

14. $\log_4\{\log_3(\log_2 x)\}=\frac{1}{2}$

15. $\log_x 10+\log_{x^2}10=2$

16. $\log_2 x + \log_4 x + \log_{16} x = 7$

17. $x^{1+\log x} = 100$

18. $\log_x \left(9x^2\right) \cdot \log_3^2 x = 4$

19. $\log_2 \left(4^x + 1\right) = x + \log_2 \left(2^{x+3} - 6\right)$

20. $2 \cdot 9^{\log x} - 8 \cdot 3^{\log x} = 90$

Riješite sustave jednadžbi.

21. $\begin{cases} \log\left(x^2 + y^2\right) = 1 + \log 13 \\ \log\left(x + y\right) - \log\left(x - y\right) = 3\log 2 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \log_2\left(x - y\right) = 4 - \log_2\left(x - y\right) \\ \dfrac{\log x - \log 4}{\log y - \log 3} = -1 \end{cases}$

23. $\begin{cases} x^{\log y} = 2 \\ x \cdot y = 20 \end{cases}$

24. $\begin{cases} \log_2\left(x - y\right) = 2 \\ 5^{x-2} \cdot 2^y = 2\ 500 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 7^{2x-1} \cdot 3^{y+1} = 189 \\ \log_2 y - \log_2 x = 1 \end{cases}$

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a **2.** d **3.** $x = 7^3$ **4.** $x = -1$ **5.** $x_1 = 0,\ x_2 = \log_3 4$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** c **3.** a **4.** b **5.** d **6.** b **7.** b
8. a **9.** d **10.** b **11.** b **12.** b **13.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $2\sqrt{2}$ **2.** 2

3. a) $x = \dfrac{\log 66}{6 \cdot \log 6} \approx 0.3897$ b) $x = \dfrac{\log 5 + \log 2}{5\log 2 - 2\log 5} \approx 9.32749$

c) $x = \dfrac{\log 13 + \log 7}{\log 7 - 1} \approx -12.646977$ d) $x = \dfrac{\log 5}{\log 3} + 2 \approx 3.46497$

4. a) $x = 7^3$ b) $x = 27$ c) $x = 10^4$ d) $x = 4$

5. a) $x = \sqrt[3]{3}$ b) $x = 9$ c) $x = \dfrac{1}{5}$ d) $x = 3$

6. $x = 100$ **7.** $x = 4$ **8.** $x = \dfrac{1}{e^3}$ **9.** $x = e^{\frac{2}{\pi - 1}} \approx 2.5443$

10. $x_1 = 0,\ x_2 = 3$ **11.** $x = 8$ **12.** $x = 2$ **13.** $x = 100$

14. $x = 512$ **15.** $x = \sqrt[4]{10^3}$ **16.** $x = 16$ **17.** $x_1 = 10,\ x_2 = 10^{-2}$

18. $x_1 = 3,\ x_2 = \dfrac{1}{9}$ **19.** $x = 0$ **20.** $x = 100$ **21.** (9, 7)

22. (6, 2) **23.** (10, 2), (2, 10) **24.** (6, 2) **25.** (1, 2)

2.5.5. Eksponencijalna i logaritamska nejednadžba

Eksponencijalna nejednadžba

Eksponencijalna funkcija $f(x) = b^x$ raste ako je baza $b > 1$ i vrijedi $b^{x_1} < b^{x_2} \Leftrightarrow x_1 < x_2$, odnosno $f(x) = b^x$ pada ako je baza $0 < b < 1$ i vrijedi $b^{x_1} < b^{x_2} \Leftrightarrow x_1 > x_2$. Eksponencijalne nejednadžbe rješavaju se upravo primjenom svojstava rasta i pada eksponencijalne funkcije.

Primjer 1: Riješimo nejednadžbe: a) $2^{x-1} > 8$ b) $0.4^{2x-3} \le \frac{5}{2}$ c) $3^{x-3} < 4$.

Rješenje: a) Baza eksponencijalne funkcije je $2 > 1$, pa slijedi:

$$2^{x-1} > 2^3$$
$$x - 1 > 3$$
$$x > 4$$

i rješenje je $x \in \langle 4, +\infty \rangle$.

b) Bazu eksponencijalne funkcije možemo zapisati $0.4 = \frac{2}{5} < 1$, pa slijedi:

$$\left(\frac{2}{5}\right)^{2x-3} \le \left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$$
$$2x - 3 \ge -1$$
$$2x \ge 2$$
$$x \ge 1$$

te je rješenje $x \in [1, +\infty\rangle$.

Za bazu smo mogli uzeti i $\frac{5}{2}$, pa bismo onda rješavali ovako:

$$\left(\frac{5}{2}\right)^{-2x+3} \le \left(\frac{5}{2}\right) \Rightarrow -2x + 3 \le 1 \Rightarrow -2x \le -2 \Rightarrow x \ge 1.$$

c) Vidimo da su baze različite i da ih ne možemo svesti na istu. Ovakvu nejednadžbu rješavamo primjenom veze eksponencijalne i logaritamske funkcije.

$$3^{x-3} < 4 \Rightarrow \log 3^{x-3} < \log 4$$
$$(x-3) \cdot \underbrace{\log 3}_{>0} < \log 4 \,/ : \log 3$$
$$x - 3 < \frac{\log 4}{\log 3}$$
$$x < \frac{\log 4}{\log 3} + 3$$
$$x < 4.26186$$

Primjer 2: Riješimo nejednadžbu $\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x} \le 0.125 \cdot 2^{-x}$.

Rješenje: Svedimo lijevu i desnu stranu nejednadžbe na istu bazu.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x^2+3x} \le 0.125 \cdot 2^{-x}$$

$$\left(2^{-1}\right)^{x^2+3x} \le 2^{-3} \cdot 2^{-x}$$

$$2^{-x^2-3x} \le 2^{-3-x}$$

Problem eksponencijalne nejednadžbe sveo se na rješavanje kvadratne nejednadžbe.

$$-x^2-3x \le -3-x \quad \Rightarrow \quad -x^2-2x+3 \le 0.$$

Odredimo nultočke.

$$-x^2-2x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{-2} = \frac{2 \pm 4}{-2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x_1 = -3,\ x_2 = 1$$

Znamo da je vodeći koeficijent negativan, parabola je svojim otvorom okrenuta prema dolje, negativno područje je ispod x-osi . Rješenje je $x \in \langle -\infty, -3] \cup [1, +\infty \rangle$.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2010.) Riješite nejednadžbu $0.5^x > 32$.

2. (IK 2010.) Riješite nejednadžbu $4^x < 5$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Skup svih rješenja nejednadžbe $6^{2x+3} < 2^{x+7} \cdot 3^{3x-1}$ je:

a) $\langle -\infty, -2 \rangle$ b) $\langle 4, +\infty \rangle$ c) $[2, +\infty \rangle$ d) $\langle -\infty, 2]$.

2. Skup svih rješenja nejednadžbe $3^{-x^2} > 3^{-|x|}$ je:

a) $\left\langle -2, \frac{1}{2} \right\rangle$ b) $\left\langle -3, \frac{1}{3} \right\rangle$ c) $\langle -1, 1 \rangle \setminus \{0\}$ d) $\langle 0, 1 \rangle$.

3. Rješenja nejednadžbe $0.7^{\frac{x^2+9}{x+3}} > 1$ su svi brojevi iz intervala:

a) $\langle -3, +\infty \rangle$ b) $\langle 0, 1 \rangle$ c) $\langle -5, -3 \rangle$ d) $\langle -\infty, -3 \rangle$.

4. Za rješenje nejednadžbe $2^{\log(2x-3)} > \frac{1}{2}$ vrijedi:

a) $x > 1.35$ b) $x > 1.45$ c) $x > 1.55$ d) $x > 1.65$.

5. Skup rješenja nejednadžbe $9^x - 3^{x+1} + 2 \geq 0$ je:

a) $\langle -\infty, 0] \cup [\log_3 2, +\infty \rangle$ b) $\langle -\log_3 2, \log_3 2 \rangle$

c) $\langle -\infty, -\log_3 2]$ d) $\langle -\infty, 3] \cup [9, +\infty \rangle$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Riješite nejednadžbe.

1. $\frac{1}{5^{2x-4}} < 125$

2. $4^{x-2} > 0.125$

3. $\left(\frac{3}{5}\right)^x \geq \left(1\frac{2}{3}\right)^3$

4. $10^x \leq 0.1 \cdot 1\,000^{x-1}$

5. $\frac{10^{\frac{1}{3}} \cdot 1\,000}{10^x} < 0.01$

6. $2^x \cdot 5^x > 0.1\,(10^{x-1})^5$

7. $27 \cdot 27^{2x-3} > 81^{3x-5}$

8. $4^{2x-3} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3$

9. $3^{2x-3} \geq \left(\frac{1}{3}\right)^{-2}$

10. $0.5^{2x^2+2} \geq 0.5^{5x}$

11. Grafički riješite nejednadžbu $f(x) \leq g(x)$ ako su $f(x) = 3^{-x+3} + 2$, a $g(x) = \log_3 x$.

12. Grafički riješite nejednadžbu $f(x) \leq g(x)$ ako su $f(x) = \frac{3}{2}x^2 - 4x - 5$, a $g(x) = 2^{x-3} - 3$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. $x < -5$ **2.** $x < \log_4 5$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. b **2.** c **3.** d **4.** c **5.** a

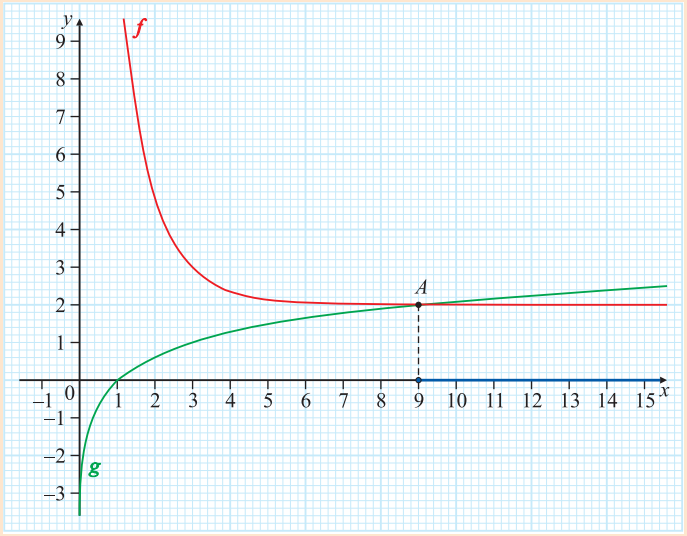
ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x \in \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ **2.** $x \in \left\langle \frac{1}{2}, +\infty \right\rangle$ **3.** $x \in \langle -\infty, -3]$ **4.** $x \in [2, +\infty\rangle$

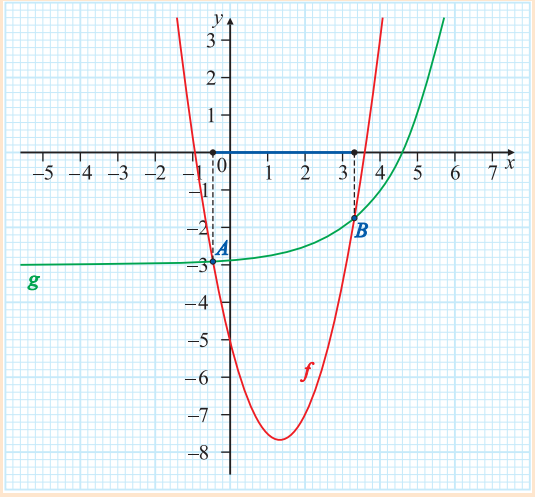
5. $x \in \left\langle \frac{16}{3}, +\infty \right\rangle$ **6.** $x \in \left\langle -\infty, \frac{3}{2} \right]$ **7.** $x \in \left\langle -\infty, \frac{7}{3} \right\rangle$ **8.** $x \in \left\langle -\infty, \frac{3}{4} \right]$

9. $x \in \left[\frac{5}{2}, +\infty \right\rangle$ **10.** $x \in \left[\frac{1}{2}, 2 \right]$

11. Rješenje je istaknuto plavom bojom.



12.



Logaritamska nejednadžba

Logaritamska funkcija $f(x) = \log_b x$ raste ako je baza $b > 1$ i vrijedi $\log_b x_1 < \log_b x_2 \Leftrightarrow x_1 < x_2$, odnosno $f(x) = \log_b x$ pada ako je baza $0 < b < 1$ i vrijedi $\log_b x_1 < \log_b x_2 \Leftrightarrow x_1 > x_2$. Logaritamske nejednadžbe rješavaju se upravo primjenom svojstva rasta i pada logaritamske funkcije uz uvažavanje pravila da logaritamska funkcija postoji samo tamo gdje su $x_1 > 0$ i $x_2 > 0$.

Primjer 1: Riješimo nejednadžbe: a) $\log_5 x > 3$ b) $\log_{0.5} x > -3$ c) $\log x \leq 3$.

Rješenje: a) Izravnom primjenom definicije logaritma dobivamo:

$x > 5^3 \Rightarrow x > 125$, uz uvjet da je $x > 0$.

Rješenje nejednadžbe je $x \in \langle 125, +\infty \rangle$.

b) Baza logaritma je manja od 1, pa dobivamo:

$x < \left(\frac{1}{2}\right)^{-3}$, uz uvjet $x > 0$.

Rješenje nejednadžbe je $x \in \langle 0, 8 \rangle$.

c) $\log x \leq 3$

$x \leq 10^3$, uz uvjet $x > 0$

Rješenje: $x \in \langle 0, 1\,000]$.

Primjer 2: Riješimo nejednadžbu $\log_x 25 \geq 2$.

Rješenje: U ovoj nejednadžbi promatramo dva slučaja (postavljamo uvjete na bazu).

I. Ako je $0 < x < 1$, tada vrijedi:

$\log_x 25 \geq 2 \Rightarrow 25 \leq x^2 \Rightarrow x^2 \geq 5^2$

$\Rightarrow |x| \geq 5 \Rightarrow x \leq -5$ ili $x \geq 5$.

Budući da je $0 < x < 1$, ovaj slučaj nema rješenja.

II. Ako je $x > 1$, tada iz

$\log_x 25 \geq 2 \Rightarrow 25 \geq x^2 \Rightarrow x^2 \leq 5^2$

$\Rightarrow |x| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x \leq 5$

te je rješenje nejednadžbe $1 < x \leq 5$.

Primjer 3: Riješimo nejednadžbu $\log_{0.2}(x-2) > -2$.

Rješenje: Izravnom primjenom definicije logaritma, uvažavajući domenu i bazu, dobivamo:

$0 < (x-2) < 0.2^{-2}$

$2 < x < 2 + 25$

$2 < x < 27$.

Primjer 4: Riješimo nejednadžbu $\frac{1}{\log x - 1} < \frac{1}{1 + \log x}$.

Rješenje: Uvodimo supstituciju $\log x = t$ i uvjetujemo $x > 0$.

$$\frac{1}{t-1} < \frac{1}{1+t}$$

$$\frac{1}{t-1} - \frac{1}{1+t} < 0$$

$$\frac{1+t-(t-1)}{(t-1)(1+t)} < 0$$

$$\frac{2}{(t-1)(1+t)} < 0$$

Vidimo da je brojnik pozitivan i zaključujemo da nazivnik mora biti negativan, $(t-1)(1+t) < 0$.

Rješavanje ove nejednadžbe svodi se na rješavanje dviju linearnih ili jedne kvadratne nejednadžbe, pa dobivamo $t \in \langle -1, 1 \rangle$.

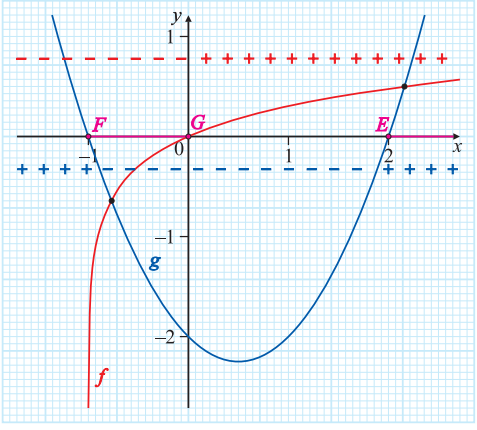
Vraćamo supstituciju: $\log x \in \langle -1, 1 \rangle$ i dobivamo $x \in \langle 0.1, 10 \rangle$.

Primjer 5: Riješimo nejednadžbu $\frac{x^2 - x - 2}{\log(x+1)} \geq 0$.

Rješenje: Nacrtamo li grafove obiju funkcija, brzo ćemo uočiti rješenje. Neka je $f(x) = \log(x+1)$, a $g(x) = x^2 - x - 2$. Razlomak će biti pozitivan, ako su i brojnik i nazivnik istog predznaka.

Uz to, moramo voditi računa o uvjetu $x + 1 > 0$, tj. $x > -1$.

Na grafu su crvenom bojom označena pozitivna i negativna područja logaritamske funkcije, a plavom kvadratne funkcije. Vidimo kako se predznaci poklapaju od -1 do 0 i za sve brojeve veće od 2. Kako rješenja trebaju biti veća ili jednaka nuli, a nazivnik ne smije biti nula ($\log(x+1) \neq 0 \Rightarrow x + 1 \neq 1 \Rightarrow \Rightarrow x \neq 0$), rješenje će biti $x \in \langle -1, 0 \rangle \cup [2, +\infty\rangle$.



ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Rješenje nejednadžbe $\frac{\log x+1}{\log x}<0$ je:

a) $\left\langle \frac{1}{100}, 100 \right\rangle$ b) $\langle 1, 10 \rangle$ c) $\left\langle \frac{1}{100}, 10 \right\rangle$ d) $\left\langle \frac{1}{10}, 1 \right\rangle$.

2. Rješenje nejednadžbe $\log_2(x-2)<-2$ je interval:

a) $\left\langle 2, \frac{9}{4} \right\rangle$ b) $\left\langle -\infty, \frac{9}{4} \right\rangle$ c) $\langle 2, +\infty \rangle$ d) $\left\langle -2, -\frac{7}{4} \right\rangle$.

3. Rješenje nejednadžbe $\log\frac{x+3}{x}>1$ je skup svih x za koje vrijedi:

a) $0<x<\frac{1}{3}$ b) $x>3$ c) $-3<x<0$ d) $-\frac{2}{3}<x<0$.

4. Skup svih rješenja nejednadžbe $\log_{\frac{1}{3}}\left(\frac{2-x}{3}\right)<0$ je:

a) $x<\frac{2}{3}$ b) $x<-1$ c) $2<x<3$ d) $-1<x<2$.

5. Skup svih rješenja nejednadžbe $\log_{\frac{2}{3}}(2x-3)<0$ je:

a) $x>\frac{3}{2}$ b) $x<\frac{3}{2}$ c) $-\frac{2}{3}<x<\frac{3}{2}$ d) $x>2$.

6. Rješenje nejednadžbe $\log(2x-3)>0$ je:

a) $\{x\in \boldsymbol{R} : x>2\}$ b) $\left\{x\in \boldsymbol{R} : x>\frac{3}{2}\right\}$ c) $\{x\in \boldsymbol{R} : x>3\}$ d) $[2, 3]$.

7. Rješenje nejednadžbe $\log(3x^2-5x-3)>\log(4x-3)$ je:

a) $\langle 0, 3 \rangle$ b) $\langle 4, +\infty \rangle$ c) $\langle -3, 3 \rangle$ d) $\langle 3, +\infty \rangle$.

8. Skup rješenja nejednadžbe $\log(2x)<\log 2$ je:

a) $\langle 0, 1 \rangle$ b) $\langle 0, 10 \rangle$ c) $\langle 1, 10]$ d) $\left\langle \frac{1}{10}, 10 \right]$.

9. Riješite nejednadžbu $\log_x 3\cdot\log_3(x+1)>1$.

a) $x\in\langle -1, 0 \rangle$ b) $x\in\langle -1, 1 \rangle$ c) $x\in\langle 1, +\infty \rangle$ d) Nema rješenja.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Riješite nejednadžbe.

1. $\log_3(2x-1) \le 4$

2. $\log_4(3-2x) \ge \frac{1}{2}$

3. $\ln(2x-3) < 5$

4. $\log_{\frac{1}{3}} x < 3$

5. $\log_{0.2}(3x) > -3$

6. $\log(-2x) \ge -1$

7. $\ln(4-7x) > -3$

8. $\log_x 6 \ge 4$

9. $\log_x 8 < -3$

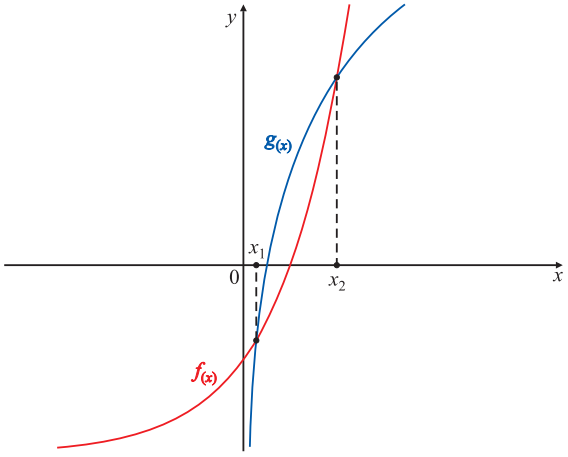
10. $\log 10^{7-2x} < 6$

11. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x-3}{x} > -1$

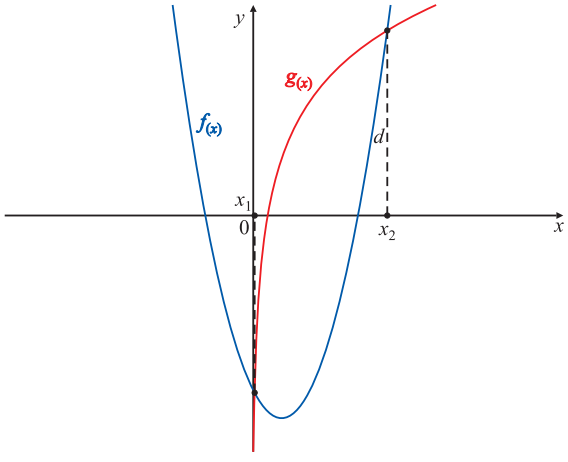
12. $\frac{-2x-x^2}{\log(-x)} \ge 0$

13. Označite na slici rješenje nejednadžbe $f(x) < g(x)$.

a)



b)



RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** a **3.** a **4.** b **5.** d **6.** a **7.** d **8.** a **9.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x \in \left\langle \frac{1}{2}, 41 \right]$

2. $x \in \left\langle -\infty, \frac{1}{2} \right]$

3. $x \in \left\langle \frac{3}{2}, \frac{e^5+3}{2} \right\rangle$

4. $x > \frac{1}{27}$

5. $x \in \left\langle 0, \frac{125}{3} \right\rangle$

6. $x \leq -\frac{1}{20}$

7. $x < \frac{4-e^{-3}}{7}$

8. $x \in \left\langle 1, \sqrt[4]{6} \right]$

9. $x \in \left\langle 0, \frac{1}{2} \right\rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$

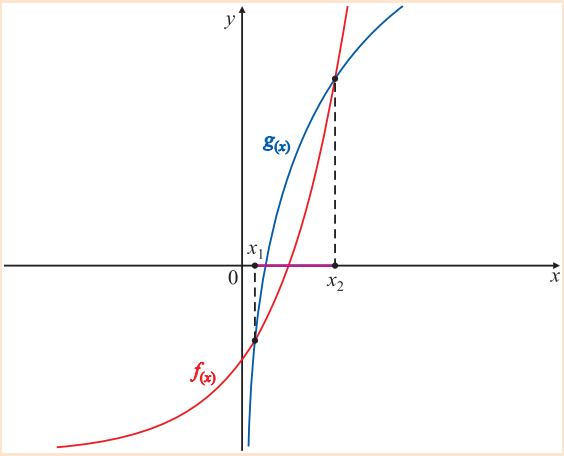
10. $x > \frac{1}{2}$

11. $x \in \left\langle -\infty, -\frac{3}{2} \right\rangle \cup \langle 3, +\infty \rangle$

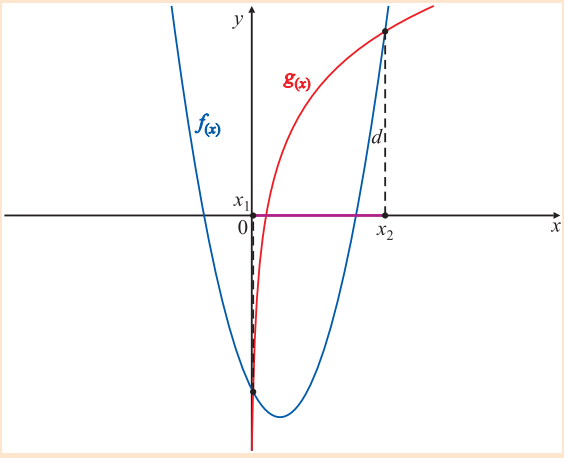
12. $x \in [-2, -1\rangle$

13. Rješenje je označeno ljubičastom bojom ($x \in \langle x_1, x_2 \rangle$).

a)



b)

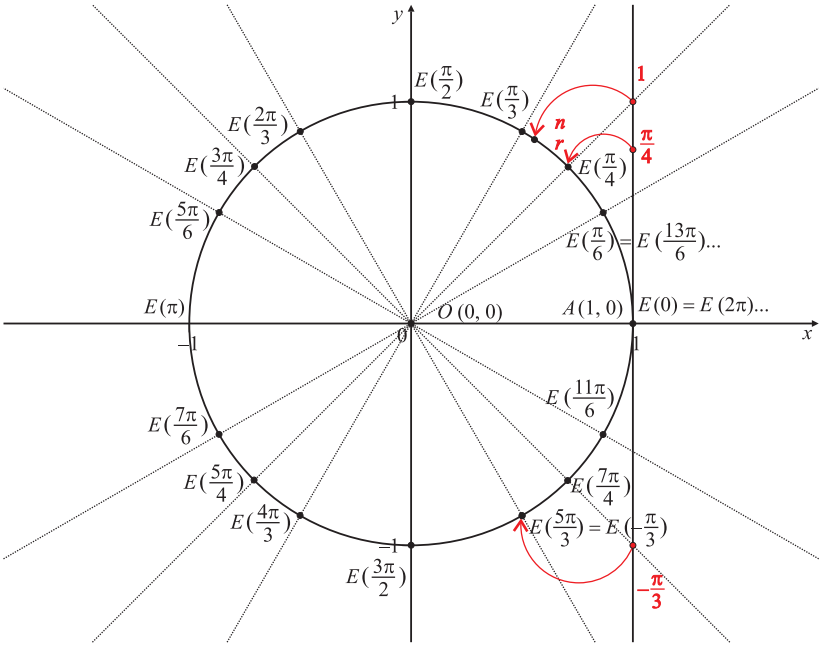


2.6. Trigonometrijske funkcije

2.6.1. Trigonometrijske funkcije

Brojevna kružnica

Brojevna kružnica je kružnica sa središtem u ishodištu, polumjera 1 ($r = |OA|$, $O(0, 0)$, $A(1, 0)$). Uz kružnicu prislonimo pravac koji je dodiruje u točki A i namatamo ga na kružnicu bez rastezanja. Interval pravca $[0, 2\pi\rangle$ će se preslikati na cijelu kružnicu (opseg kružnice je 2π, jer je polumjer 1), kao i interval $[2\pi, 4\pi\rangle$ i $[-2\pi, 0\rangle$, odnosno svaki drugi interval duljine 2π. Svaki realan broj t brojevnog pravca preslikava se u jednu točku $E(t)$ na kružnici i takvo preslikavanje zovemo eksponencijalno preslikavanje ($E(t) = T$). Svakoj točki T brojevne kružnice odgovara točno jedan broj α iz intervala $[0, 2\pi\rangle$ na brojevnom pravcu. Taj broj α naziva se **glavna mjera** kuta $\measuredangle AOT$.



Primjer 1: Odredimo glavnu mjeru kuta:

a) $1\,570°$ b) $-1\,570°$ c) $\dfrac{1\,234\pi}{7}$ d) $-\dfrac{24\pi}{7}$.

Rješenje: a) $1\,570° = 4 \cdot 360° + 130° \Rightarrow$ Glavna mjera kuta je $130°$.

b) $-1\,570° = -5 \cdot 360° + 230° \Rightarrow$ Glavna mjera kuta je $230°$.

c) $\dfrac{1\,234\pi}{7} = 176\pi + \dfrac{2}{7}\pi = 88 \cdot (2\pi) + \dfrac{2}{7}\pi$

$\Rightarrow$ Glavna mjera kuta je $\dfrac{2}{7}\pi$.

d) $-\frac{24\pi}{7} = -3\pi - \frac{3\pi}{7} = -4\pi + \frac{4\pi}{7} \Rightarrow$ Glavna mjera kuta je $\frac{4}{7}\pi$.

Primjer 2: Odredimo radijansku mjeru kuta zadanog u stupnjevima:
a) $\alpha = 101°$ b) $\beta = 101° 11' 11''$.

Rješenje: Ispruženom kutu mjere 180° odgovara radijanska mjera π. Ako je zadana mjera kuta u stupnjevima, tada se odgovarajuća mjera u radijanima određuje formulom

$$\alpha_{rad} = \frac{\alpha°}{180°} \cdot \pi.$$

$$\text{a) } \alpha = 101° \Rightarrow \alpha_{rad} = \frac{101°}{180°} \cdot \pi = 1.7627825.$$

$$\text{b) } \beta = 101° 11' 11'' = 101° + \left(\frac{11}{60}\right)° + \left(\frac{11}{3\,600}\right)° =$$

$$= 101.1863889°$$

$$\beta_{rad} = \frac{101.1863889°}{180°} \cdot \pi = 1.766035644$$

Primjer 3: Odredimo mjeru kuta u stupnjevima zadanog u radijanima:
a) $\alpha = \frac{\pi}{16}$ b) $\beta = 1$ rad.

Rješenje: Ako je zadana mjera kuta u radijanima, tada se mjera u stupnjevima računa formulom

$$\alpha° = \frac{\alpha_{rad}}{\pi} \cdot 180°.$$

$$\text{a) } \alpha = \frac{\pi}{16} \Rightarrow \alpha° = \frac{\frac{\pi}{16}}{\pi} \cdot 180° = \frac{180°}{16} = 11.25° =$$

$$= 11° + 0.25° \cdot 60 = 11°15'$$

$$\text{b) } \beta = 1\,\text{rad} \Rightarrow \beta° = \frac{1}{\pi} \cdot 180° = 57.29577951° =$$

$$= 57° + 0.29577951° \cdot 60 =$$

$$= 57° + 17.74677078' =$$

$$= 57°17' + 0.74677078' \cdot 60 =$$

$$= 57°17' + 44.8'' = 57°\,17'\,45''$$

Funkcije sinus i kosinus

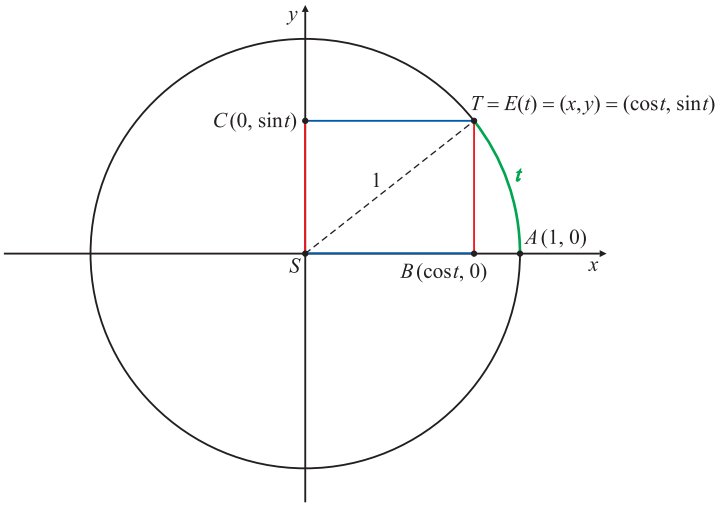
Neka je t realan broj, a $T = E(t)$ tom broju pridružena točka na brojevnoj kružnici. Tada T ima koordinate $(\cos t, \sin t)$. Vrijednost funkcije kosinus, $\cos t$, je apscisa, a vrijednost funkcije sinus, $\sin t$, je ordinata točke $T = E(t)$.

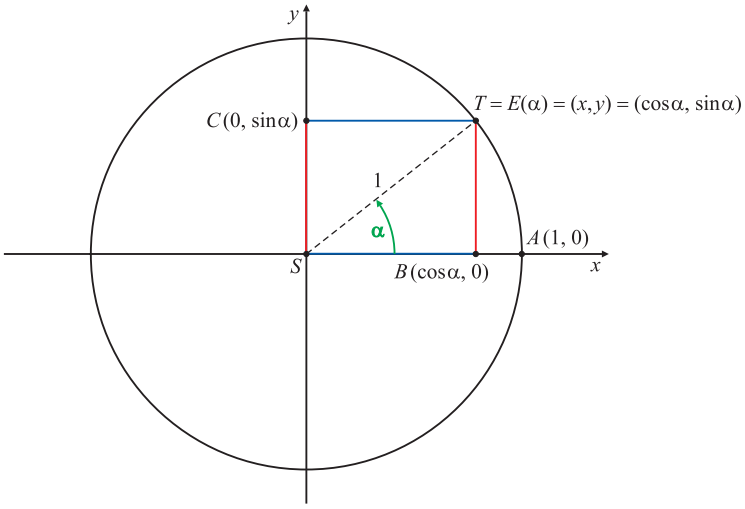
Predznaci funkcija sinus i kosinus jednaki su predznacima koordinata točaka u različitim kvadrantima i dani su u sljedećoj tablici.

	1. kvadrant	2. kvadrant	3. kvadrant	4. kvadrant
$\sin t$	+	+	–	–
$\cos t$	+	–	–	+

Polumjer brojevne kružnice je 1, tako da za svaki t vrijedi $|\sin t| \leq 1$, $|\cos t| \leq 1$.

Također vrijedi osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ (Pitagorin poučak), jer je ΔSBT pravokutan trokut.

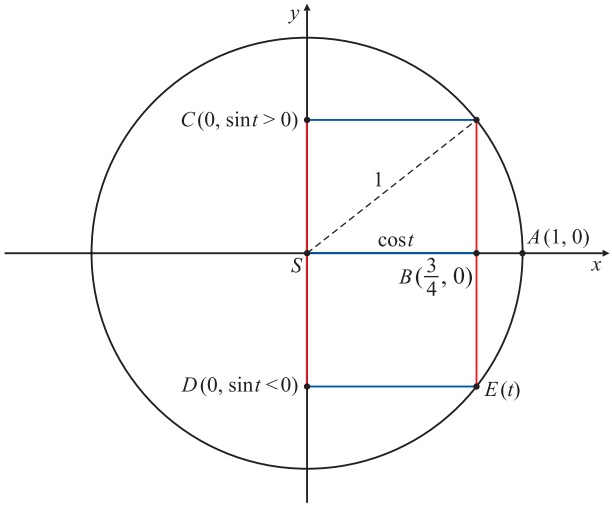




Primjer 4: Odredimo na brojevnoj kružnici točku $E(t)$ ako je:

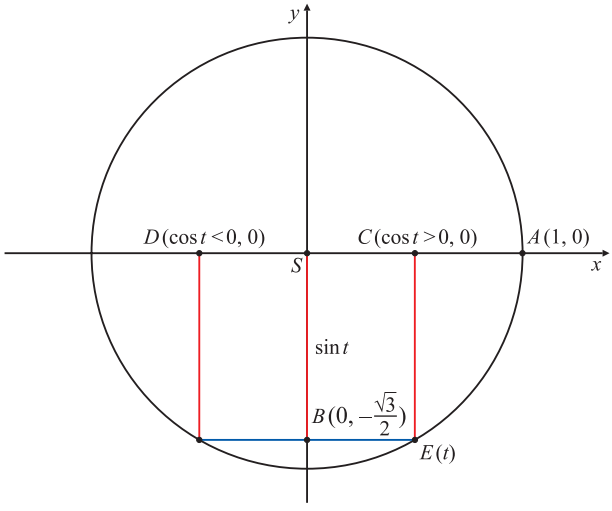
a) $\cos t = \frac{3}{4},\ \sin t < 0$ b) $\sin t = -\frac{\sqrt{3}}{2},\ \cos t > 0.$

Rješenje: a) Odredimo na x-osi točku čija je apscisa $\frac{3}{4}\left(\cos t = \frac{3}{4}\right)$ i njome povucimo okomicu na apscisu. Vidimo da ta okomica siječe brojevnu kružnicu u dvije točke, no samo je jednoj ordinata negativna ($\sin t < 0$), tako da se točka $E(t)$ nalazi u četvrtom kvadrantu.



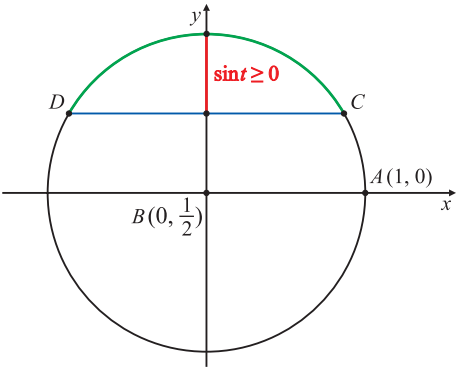
b) Sličnim postupkom dolazimo do točke $E(t)$.

(Kalkulatorom izračunavamo vrijednost $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.867$.)



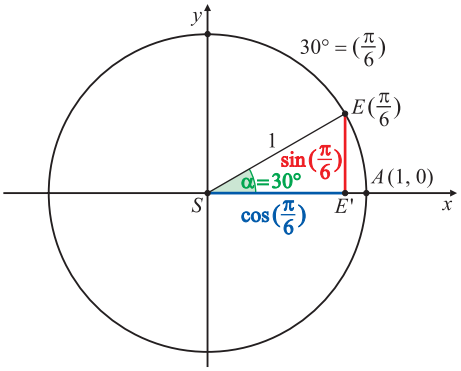
Primjer 5: Odredimo na brojevnoj kružnici skup svih rješenja nejednadžbe $\sin t \geq \frac{1}{2}$.

Rješenje: Na y-osi odredimo točku s koordinatama $B\left(0, \frac{1}{2}\right)$. Za sve točke iznad točke B vrijedi da su im ordinate veće od $\frac{1}{2}$ (crveno podebljan dio y-osi), a za ordinatu točke B vrijedi da je jednaka $\frac{1}{2}$. Na kružnici se taj dio nalazi lijevo i desno od osi ordinata (od točke C do točke D, uključujući i točke).



Primjer 6: Odredimo na brojevnoj kružnici vrijednosti funkcija sinus i kosinus kutova od 30° i 60°.

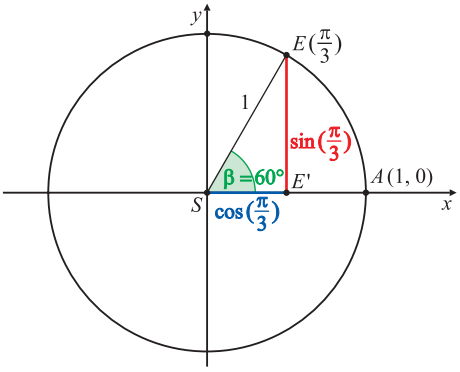
Rješenje: a) U brojevnoj kružnici konstruiramo kut od 30°, te odredimo koordinate točke $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$.



Trokut $\Delta ESE'$ je pravokutan, s pravim kutom u vrhu E', a on je i polovina jednakostraničnog trokuta, duljine stranice 1.
Stranica $\overline{EE'}$ je polovica stranice jednakostraničnog trokuta, što znači da je $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Koristeći Pitagorin teorem, lako dolazimo do duljine treće stranice $\overline{SE'} \Rightarrow |SE'|^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow |SE'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, te zaključujemo da je $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) Kao i u prošlom slučaju, konstruiramo u brojevnoj kružnici kut od 60°, odredimo točku $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$, te odredimo njene koordinate.



Ponovo se radi o polovini jednakostraničnog trokuta duljine stranice 1, samo drugačije položenog. Koristeći isti način razmišljanja dolazimo do zaključka da je $|SE'| = \frac{1}{2}$, a $|EE'| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$, a $\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Vidimo da su $\cos\frac{\pi}{6} = \sin\frac{\pi}{3}$ i $\sin\frac{\pi}{6} = \cos\frac{\pi}{3}$, a to je svojstvo komplementarnih kutova (zbroj komplementarnih kutova je 90°, odnosno $\frac{\pi}{2}$). Došli smo do vrlo važnog svojstva $\sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos t$, odnosno $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin t$.

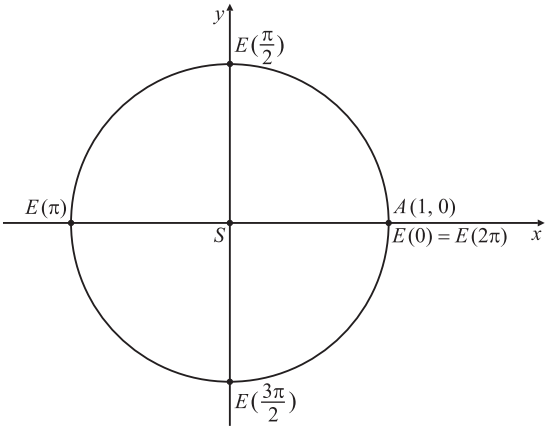
Primjer 7: Odredimo na brojevnoj kružnici vrijednosti funkcija sinus i kosinus kutova od 90°, 180°, 270° i 360°.

Rješenje: Nacrtajmo brojevnu kružnicu i promatrajmo četiri točke koje nam predstavljaju zadane kutove. Koordinate točaka na brojevnoj kružnici su $T = (\cos t, \sin t)$.
Koordinate točke A, odnosno $E(0)$ su $(1, 0)$, te zaključujemo kako je $\cos 0 = \cos 2\pi = 1$, $\sin 0 = \sin 2\pi = 0$.

Točka $E\left(\frac{\pi}{2}\right) = (0, 1) \Rightarrow \cos\frac{\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = 1.$

Točka $E(\pi) = (-1, 0) \Rightarrow \cos\pi = -1, \sin\pi = 0.$

Točka $E\left(\frac{3\pi}{2}\right) = (0, -1) \Rightarrow \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1.$



x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1

Primjer 8: Odredimo: a) $\sin\frac{17\pi}{6}$ b) $\cos\frac{17\pi}{6}$.

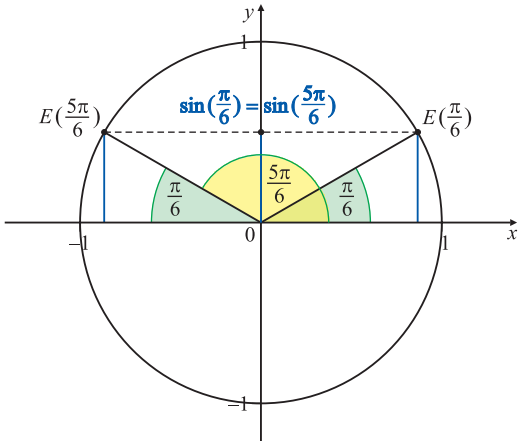
Rješenje: Odredimo glavnu mjeru kuta $\frac{17\pi}{6} = 2\pi + \frac{5\pi}{6}$. Glavna mjera kuta je $\frac{5\pi}{6}$. Nađimo taj kut na brojevnoj kružnici. Kut se nalazi u drugom kvadrantu.

a) Sinus kuta iz drugog kvadranta je pozitivan broj.

Povučemo li okomicu iz točke $E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ na ordinatu, ona će sjeći kružnicu u točki $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$, te zaključujemo kako je

$$\sin\frac{5\pi}{6}=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2} \Rightarrow \sin\frac{17\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

Zbroj ovih dvaju kutova je π, tako da vrijedi
$\sin(\pi - t) = \sin t$.

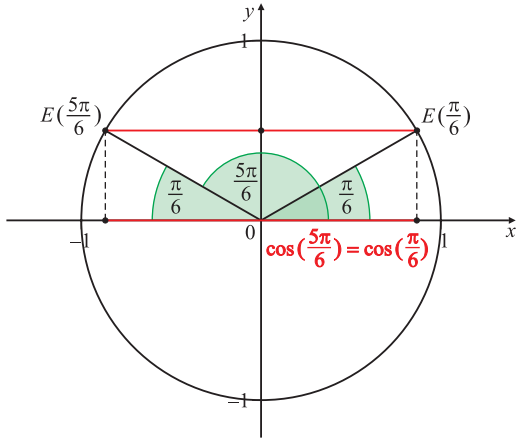


b) Kosinus kuta iz drugog kvadranta je negativan broj.

Povučemo li okomice iz točaka $E\left(\frac{5\pi}{6}\right)$ i $E\left(\frac{\pi}{6}\right)$ na apscisu, ona će sjeći apscisu u dvjema točkama koje su jednako udaljene od ishodišta, te zaključujemo kako je

$$\cos\frac{5\pi}{6}=-\cos\frac{\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \cos\frac{17\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Zbroj ovih dvaju kutova je π, tako da vrijedi
$\cos(\pi - t) = -\cos t$.



Primjer 9: Odredimo: a) $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$ b) $\cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$.

Rješenje: a) Odredimo glavnu mjeru kuta $-\frac{14\pi}{3} = -4\pi - \frac{2\pi}{3} = -6\pi + \frac{4\pi}{3}$.

Glavna mjera kuta je $\frac{4\pi}{3}$. Kut se nalazi u trećem kvadrantu.

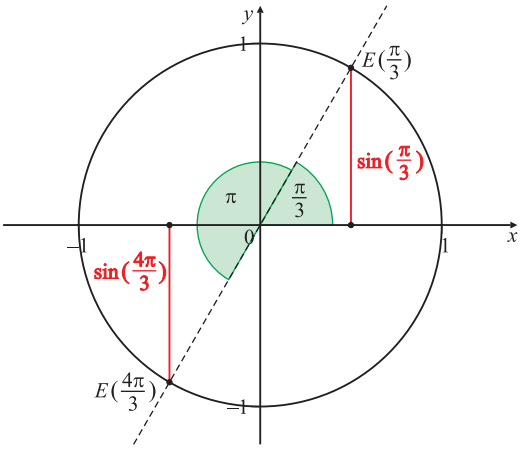
Sinus kuta trećeg kvadranta je negativan broj.

Produžimo li krak kuta kroz ishodište iz točke $E\left(\frac{4\pi}{3}\right)$, on će sjeći kružnicu u točki $E\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Vidimo da je $\sin\frac{4\pi}{3} = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, odnosno $\sin\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Kut $\frac{4\pi}{3}$ dobivamo kao zbroj $\pi + \frac{\pi}{3}$, tako da vrijedi $\mathbf{\sin(\pi + t) = -\sin t}$.

Da smo trebali odrediti $\cos\left(-\frac{14\pi}{3}\right)$, zaključivali bismo na sličan način te bi vrijedilo $\cos\left(-\frac{14\pi}{3}\right) = \cos\frac{4\pi}{3} = -\cos\frac{\pi}{3} = -\frac{1}{2}$.

Općenito vrijedi $\mathbf{\cos(\pi + t) = -\cos t}$.



b) Odredimo glavnu mjeru kuta $-\frac{25\pi}{4} = -6\pi - \frac{\pi}{4} = -8\pi + \frac{7\pi}{4}$.

Glavna mjera kuta je $\frac{7\pi}{4}$. Kut se nalazi u četvrtom kvadrantu.

Kosinus kuta iz četvrtog kvadranta je pozitivan broj.

Povučemo li okomicu iz točke $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$ na apscisu, ona će sjeći kružnicu u točki $E\left(\frac{\pi}{4}\right)$. Zaključujemo kako je

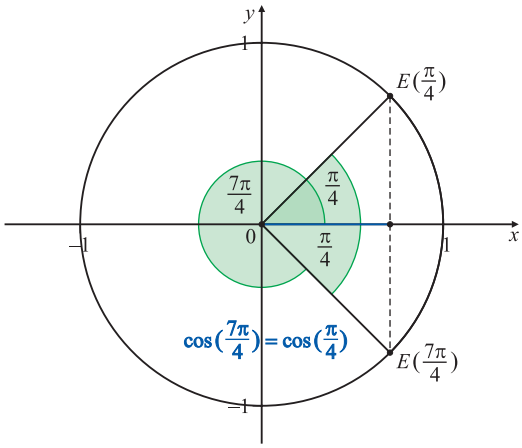
$$\cos\frac{7\pi}{4}=\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \cos\left(-\frac{25\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Kut $\frac{7\pi}{4}$ dobivamo kao razliku $2\pi-\frac{\pi}{4}$, pa vrijedi $\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}$, a općenito $\mathbf{\cos(2\pi - t) = \cos t}$.

Kako bismo odredili $\sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)$, zaključimo da je sinus kuta iz četvrtog kvadranta negativan broj, pa dobivamo:

$$\sin\frac{7\pi}{4}=-\sin\frac{\pi}{4}=-\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \sin\left(-\frac{25\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Općenito vrijedi $\mathbf{\sin(2\pi - t) = -\sin t}$.



Primjer 10: Izračunajmo $\cos x$ ako je $\sin x=\frac{5}{13}$, a $x\in\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]$.

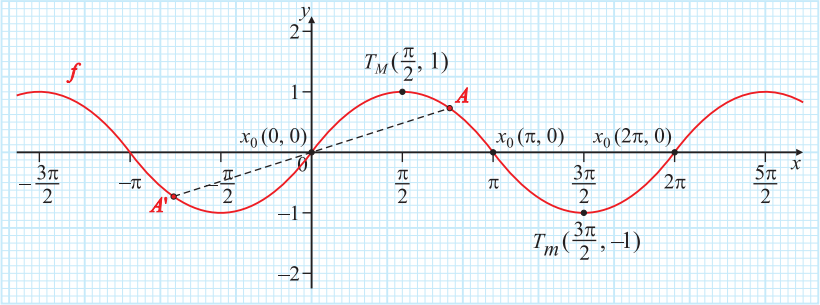
Rješenje: Iz uvjeta za x, vidimo da je x iz drugog kvadranta, te je $\cos x<0$. Koristeći osnovni trigonometrijski identitet $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, izračunat ćemo $\cos x$.

$$\frac{25}{169}+\cos^2 x=1 \Rightarrow \cos^2 x=1-\frac{25}{169}$$

$$\Rightarrow \cos^2 x=\frac{144}{169} \Rightarrow \cos x=\pm\frac{12}{13}$$

Znači $\cos x=-\frac{12}{13}$.

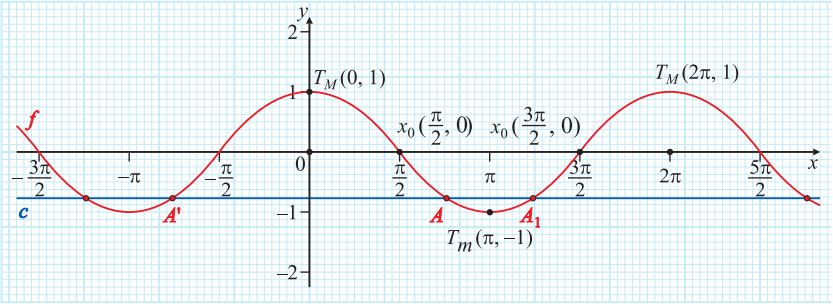
Graf funkcije sinus nazivamo **sinusoida**. Domena funkcije su svi realni brojevi, a slika je interval $[-1, 1]$.



Graf funkcije sinus simetričan je s obzirom na ishodište ($A \to A'$), tj. funkcija sinus je **neparna funkcija** $\sin(-x) = -\sin x$. Vidimo da se funkcija sinus neograničeno ponavlja, a njen osnovni period je 2π, $\sin(t + 2\pi) = \sin t$. Promatramo li funkciju na njenom osnovnom periodu $[0, 2\pi]$, vidimo da ima tri nultočke (na početku $x_0 = 0$, u sredini $x_0 = \pi$ i na kraju perioda $x_0 = 2\pi$). Između prvih dviju nultočki, funkcija postiže maksimum $T_M\left(\frac{\pi}{2}, 1\right)$, a između sljedećih dviju nultočki, postiže minimum $T_m\left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)$. Tijek funkcije dan je u tablici.

x	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
$f(x)$	0	↗	1	↘	0	↘	-1	↗	0

Graf funkcije kosinus nazivamo **kosinusoida**. Domena funkcije su svi realni brojevi, a slika je interval $[-1, 1]$. Graf kosinusoide možemo dobiti pomakom sinusoide za $\frac{\pi}{2}$ ulijevo.



Graf funkcije kosinus simetričan je s obzirom na ordinatu ($A \to A'$, $A_1 \to A_1'$), tj. funkcija kosinus je **parna funkcija** $\cos(-x) = x$. Vidimo da se i funkcija kosinus neograničeno ponavlja, a njen osnovni period je 2π, $\cos(t + 2\pi) = \cos t$. Promatramo li funkciju na njenom osnovnom periodu $[0, 2\pi]$, vidimo da na početku i kraju perioda postiže maksimum $T_M(0, 1)$ i $T_M(2\pi, 1)$, a točno između ovih dvaju maksimuma je najmanja vrijednost $T_m(\pi, -1)$. Između

prvog maksimuma i prvog minimuma, nalazi se prva nultočka $x_0 = \frac{\pi}{2}$, a između prvog minimuma i drugog maksimuma nalazi se druga nultočka $x_0 = \frac{3\pi}{2}$. Tijek funkcije dan je tablicom.

x	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π	↗	$\frac{3\pi}{2}$	↗	2π
$f(x)$	1	↘	0	↘	-1	↗	0	↗	1

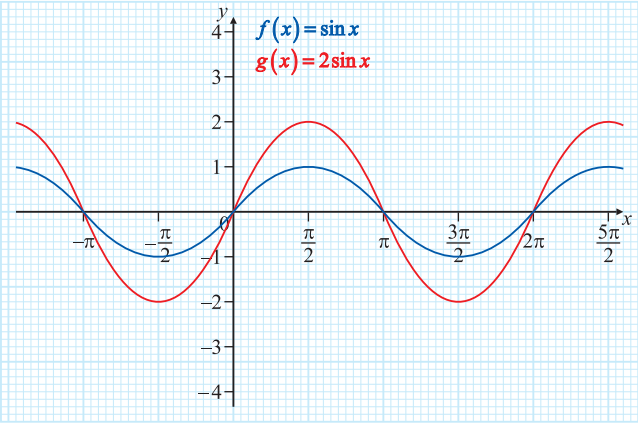
Primjer 11: Nacrtajmo graf funkcije $m(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$.

Rješenje: Graf funkcije $m(x) = A\sin(bx + c) + d$ možemo dobiti jednostavnim transformacijama grafa funkcije $f(x) = \sin x$. Funkciju $k(x) = A\sin(bx + c)$ nazivamo **harmonijska funkcija**.

Pozitivnu konstantu $A > 0$ nazivamo **amplituda**, a ona „rasteže“ sinusoidu po ordinati.

Kako bismo nacrtali graf funkcije $g(x) = 2\sin x$, odredimo amplitudu. Amplituda je 2, što znači da naša funkcija postiže najveću vrijednost 2, a najmanju -2 i cijeli graf se nalazi između pravaca $y = 2$ i $y = -2$.

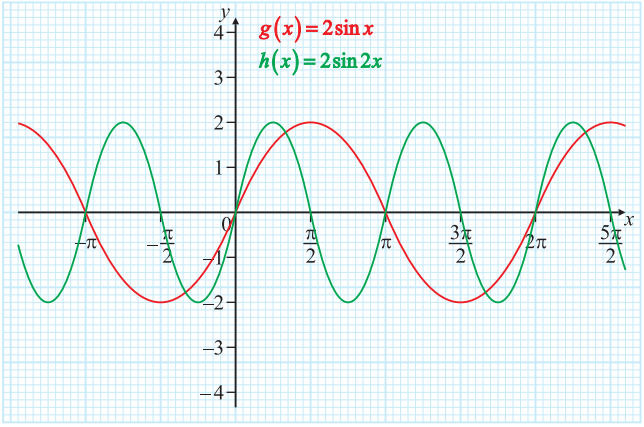
Položaj cijele sinusoide ostaje isti (nultočke obiju funkcija f i g su jednake ..., $-\pi$, 0, π, 2π,...).



Konstantu b (kod harmonijskih funkcija) nazivamo **kružna frekvencija**. Ona određuje **period** zadane funkcije $P = \frac{2\pi}{b}$.

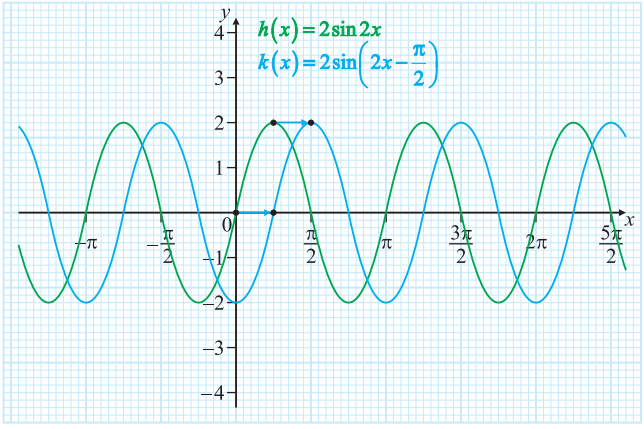
Period funkcije $h(x) = 2\sin 2x$ je $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$, što znači da graf funkcije $\sin x$ stegnemo prema osi ordinata, pa se jedan njen „val“ nalazi u intervalu duljine π. U tom periodu funkcija se ponaša isto kao i funkcija $\sin x$ u periodu duljine 2π.

Vidimo da je sada broj nultočaka dvostruko veći $(\ldots, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi, \frac{5\pi}{2}, \ldots)$, kao i broj minimuma, odnosno maksimuma početne funkcije, na istom intervalu.

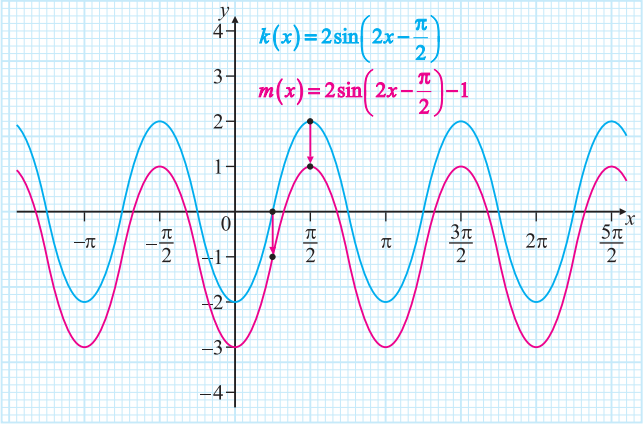


Broj c (kod harmonijskih funkcija) zovemo **fazni pomak** i on nam određuje pomak funkcije u smjeru apscise. Funkciju $k(x) = A\sin(bx + c)$ možemo zapisati $k(x) = A\sin\left(b\left(x + \frac{c}{b}\right)\right)$, tako da pomak računamo kao $x_0 = -\frac{c}{b}$, što je ujedno i prva nultočka funkcije u njenom periodu.

Pomak funkcije $m(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right)$ je $x_0 = \frac{\pi}{4}$, a to znači da funkciju $h(x) = 2\sin 2x$ pomičemo u desno za $\frac{\pi}{4}$. Nultočke su pomaknute za $\frac{\pi}{4}$ $(\ldots, -\frac{5\pi}{4}, -\frac{3\pi}{4}, -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \ldots)$.

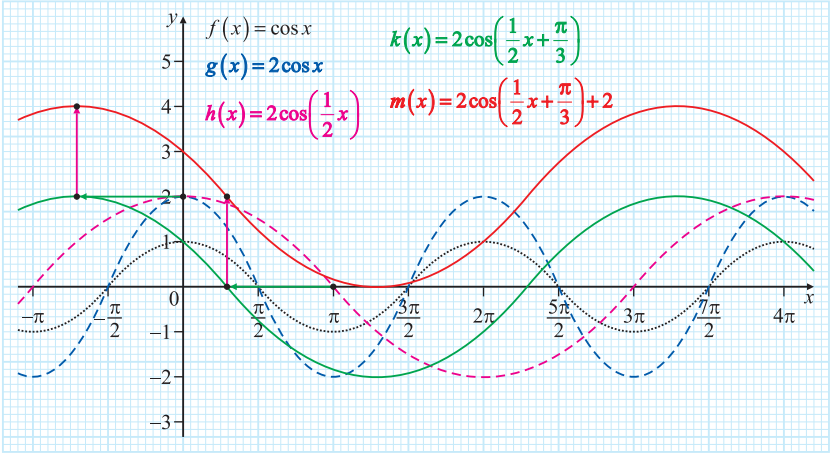


Broj d nam pokazuje koliko moramo pomaknuti funkciju $k(x) = A\sin(bx + c)$ u smjeru ordinate da bismo dobili $m(x) = A\sin(bx + c) + d$. Za funkciju $m(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - 1$ je $d = -1$, što znači da ćemo funkciju m pomaknuti za 1 prema dolje. Sada je najveća vrijednost funkcije 1, a najmanja vrijednost –3. Nultočke su također pomaknute.



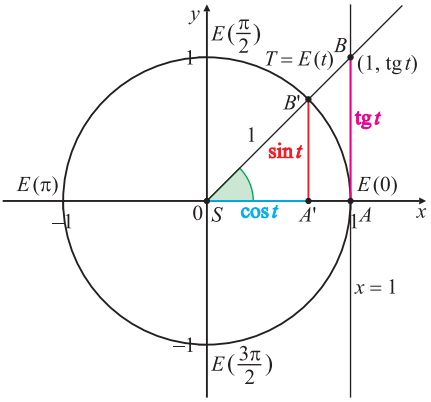
Primjer 12: Nacrtajmo graf funkcije $m(x) = 2\cos\left(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3}\right) + 2$.

Rješenje: Graf funkcije $m(x) = A\cos(bx + c) + d$ dobivamo sličnim postupkom kao i graf funkcije $f(x) = A\sin(bx + c) + d$, transformacijama grafa $\cos x$. Amplituda funkcije je 2, period $P = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$, pomak $-\frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{1}{2}} = -\frac{2\pi}{3}$ i pomak u smjeru ordinate je 2 prema gore. Najveća vrijednost funkcije $m(x)$ je 4, a najmanja 0.



Funkcije tangens i kotangens

Neka je t realan broj, a $T = E(t)$ tom broju pridružena točka na brojevnoj kružnici. Povucimo tangentu u točki $A(1, 0)$ na brojevnu kružnicu. Pravac točkama ST sjeći će tangentu u točki B. Ordinata te točke je **tangens** realnog broja t, $\operatorname{tg} t$.



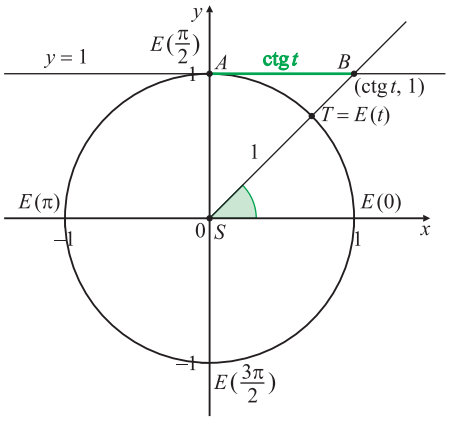
Vidimo da $\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$ i $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{2}$ nisu definirani jer je pravac kroz točke $SE\left(\frac{\pi}{2}\right)$ i $SE\left(\frac{3\pi}{2}\right)$ paralelan s tangentom i ne postoji presjek.

Trokuti ΔSAB i $\Delta SA'B'$ slični su trokuti i iz toga slijedi $\frac{|AB|}{|SA|} = \frac{|A'B'|}{|SA'|} \Rightarrow \frac{\operatorname{tg} t}{1} = \frac{\sin t}{\cos t}$, pa dobivamo osnovnu vezu funkcija sinus, kosinus i tangens $\mathbf{tg}\,t = \dfrac{\sin t}{\cos t}$.

Točka T na našoj je slici u prvom kvadrantu i vidimo da je $\operatorname{tg} t$ pozitivan. Ako se T nalazi u drugom kvadrantu, $\operatorname{tg} t$ će biti negativan, u trećem kvadrantu bit će ponovo pozitivan, a u četvrtom negativan.

S brojevne kružnice možemo očitati da je $\mathbf{tg\,0 = tg\,\pi = tg\,2\pi = 0}$.

Ako povučemo tangentu u točki $A(0, 1)$ na brojevnu kružnicu, pravac točkama ST sjeći će tangentu u točki B. Apscisa te točke je **kotangens** realnog broja t, $\operatorname{ctg} t$.



Vidimo da $\operatorname{ctg} 0$ i $\operatorname{ctg} \pi$ nisu definirani jer je pravac kroz točke $SE(0)$ i $SE(\pi)$ paralelan s tangentom i ne postoji presjek.

Sličnim postupkom kao i za funkciju tangens dobivamo osnovnu vezu funkcija sinus, kosinus i kotangens $\operatorname{ctg} t = \dfrac{\cos t}{\sin t}$.

Predznaci funkcije kotangens po kvadrantima jednaki su kao i za funkciju tangens.

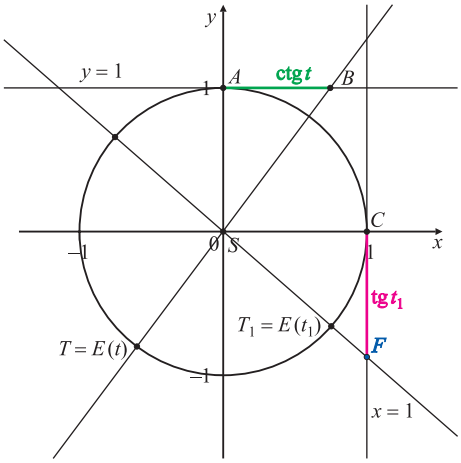
S brojevne kružnice možemo očitati da je $\operatorname{ctg} \dfrac{\pi}{2} = \operatorname{ctg} \dfrac{3\pi}{2} = 0$.

Primjer 13: Odredimo na brojevnoj kružnici točke $E(t)$ ako je:

a) $\operatorname{ctg} t = \dfrac{3}{4}$, $\sin t < 0$ b) $\operatorname{tg} t = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos t > 0$.

Rješenje: a) Odredimo na tangenti kroz točku $A(0, 1)$ točku čija je apscisa $\dfrac{3}{4}$. To je $B\left(\dfrac{3}{4}, 1\right)$ i tu točku spojimo sa središtem brojevne kružnice. U presjeku s kružnicom dobili smo dvije točke od kojih samo za jednu $T = E(t)$ vrijedi da je $\sin t < 0$. Točka se nalazi u trećem kvadrantu.

b) Odredimo na tangenti kroz točku $C(1, 0)$ točku čija je ordinata $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. To je $F\left(1, -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ i tu točku spojimo sa središtem brojevne kružnice. U presjeku s kružnicom dobili smo dvije točke od kojih samo za jednu $T_1 = E(t_1)$ vrijedi da je $\cos t > 0$. Točka se nalazi u četvrtom kvadrantu.

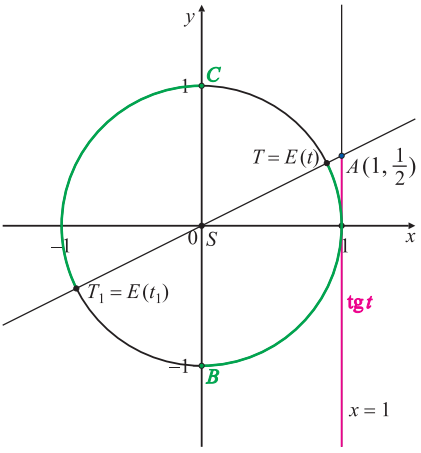


Primjer 14: Odredimo na brojevnoj kružnici skup svih rješenja nejednadžbe $\operatorname{tg} t \le \dfrac{1}{2}$.

Rješenje: Spojimo točku $A\left(1, \dfrac{1}{2}\right)$ sa središtem kružnice i dobijemo dvije točke T i T_1 na kružnici.

Za sve točke na tangenti ispod točke A vrijedi $\operatorname{tg} t \le \dfrac{1}{2}$.

Dio kružnice od točke T_1 (uključujući i samu točku) do točke C je rješenje nejednadžbe, ali točka $C\left(\frac{\pi}{2}\right)$ nije rješenje jer tangens nije definiran u $\frac{\pi}{2}$. Drugi dio rješenja je dio kružnice od točke T (uključujući i samu točku) do točke $B = E\left(\frac{3\pi}{2}\right)$, koja nije rješenje jer tangens nije definiran u $\frac{3\pi}{2}$.



Vrijednosti funkcije tangens i kotangens za neke posebne kutove, kao što su 30°, 60° i 45° računamo vrlo jednostavno iz veze funkcija sinus, kosinus, tangens i kotangens i vrijednosti funkcija sinus i kosinus tih kutova.

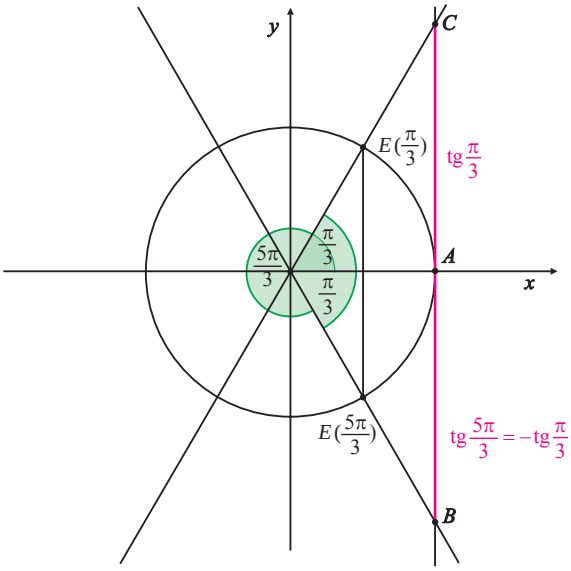
$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \operatorname{tg} 30^\circ = \operatorname{ctg} 60^\circ$$

Koristeći te vrijednosti i ostale možemo načiniti tablicu vrijednosti svih trigonometrijskih funkcija.

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–	0	–	0
$\operatorname{ctg} x$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	–	0	–

Primjer 15: Odredimo: a) $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3}$ b) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)$.

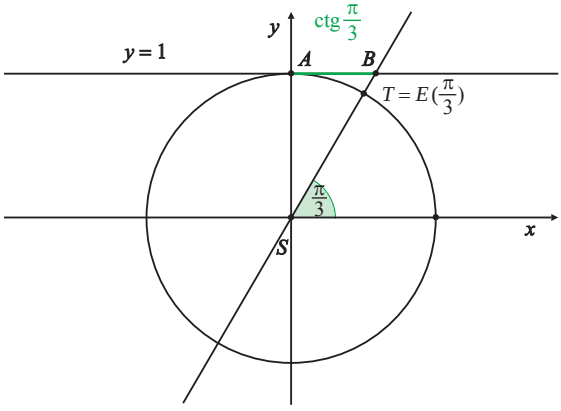
Rješenje: a) Odredimo glavnu mjeru kuta $\frac{17\pi}{3} = 4\pi + \frac{5\pi}{3}$. Glavna mjera kuta je $\frac{5\pi}{3}$.



Nađimo taj kut na brojevnoj kružnici. Kut se nalazi u četvrtom kvadrantu.
Tangens kuta u četvrtom kvadrantu je negativan broj.

Koristeći već pokazana svojstva svođenja kutova na prvi kvadrant, vidimo da je $\operatorname{tg}(2\pi - t) = -\operatorname{tg} t$, tako da je vrijednost $\operatorname{tg}\frac{17\pi}{3} = \operatorname{tg}\frac{5\pi}{3} = -\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = -\sqrt{3}$.

b) Odredimo glavnu mjeru kuta $-\frac{17\pi}{3} = -6\pi + \frac{\pi}{3}$. Glavna mjera kuta je $\frac{\pi}{3}$.



Nađimo taj kut na brojevnoj kružnici. Kut se nalazi u prvom kvadrantu.
Kotangens kuta u prvom kvadrantu je pozitivan i vidimo da je $\operatorname{ctg}\left(-\frac{17\pi}{3}\right)=\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Primjer 16: Ako je $\operatorname{ctg}t=1\frac{2}{9}$, koliko je $\frac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}$?

Rješenje: Ako je $\operatorname{ctg}t=1\frac{2}{9}$, znači da je $\frac{\cos t}{\sin t}=\frac{11}{9}\Rightarrow\cos t=\frac{11}{9}\sin t$, a kada to uvrstimo u naš razlomak, dobivamo rješenje:

$$\frac{\sin t-\cos t}{\sin t+\cos t}=\frac{\sin t-\frac{11}{9}\sin t}{\sin t+\frac{11}{9}\sin t}=\frac{\cancel{\sin t}\left(1-\frac{11}{9}\right)}{\cancel{\sin t}\left(1+\frac{11}{9}\right)}=\frac{-\frac{2}{9}}{\frac{20}{9}}=-\frac{1}{10}.$$

Primjer 17: Izračunajmo vrijednosti ostalih trigonometrijskih funkcija ako je $\operatorname{ctg}t=-\frac{20}{21}, t\in\left\langle\frac{7\pi}{2},4\pi\right\rangle$.

Rješenje: Iz uvjeta vidimo da je t iz četvrtog kvadranta. Izravno iz vrijednosti kotangensa dobivamo vrijednost tangensa.

$$\operatorname{tg}t=-\frac{21}{20}$$

Koristeći vezu trigonometrijskih funkcija, računamo ostale vrijednosti.

$$\frac{\cos t}{\sin t}=-\frac{20}{21}\Rightarrow\cos t=-\frac{20}{21}\sin t$$

$$\sin^2 t+\left(-\frac{20}{21}\sin t\right)^2=1$$

$$\sin^2 t+\frac{400}{441}\sin^2 t=1$$

$$\sin^2 t\left(1+\frac{400}{441}\right)=1$$

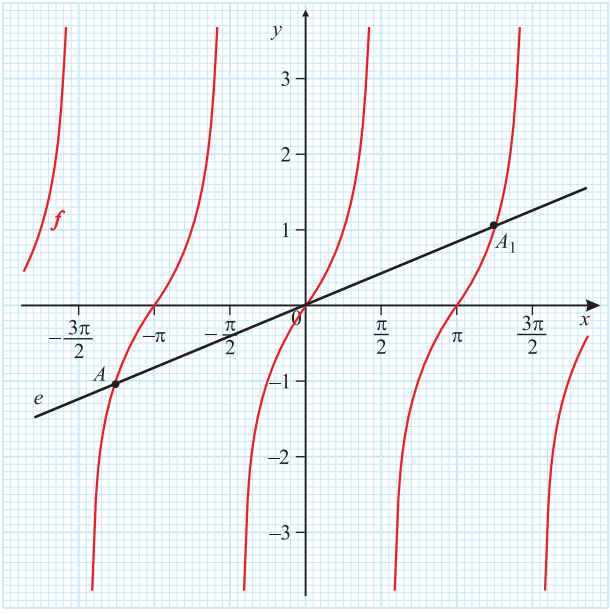
$$\sin^2 t=\frac{1}{\frac{841}{441}}\Rightarrow\sin^2 t=\frac{441}{841}\Rightarrow\sin t=\pm\frac{21}{29}$$

Sinus kuta iz IV. kvadranta je negativan broj, pa je

$$\sin t=-\frac{21}{29}$$

$$\Rightarrow\cos t=-\frac{20}{21}\left(-\frac{21}{29}\right)\Rightarrow\cos t=\frac{20}{29}.$$

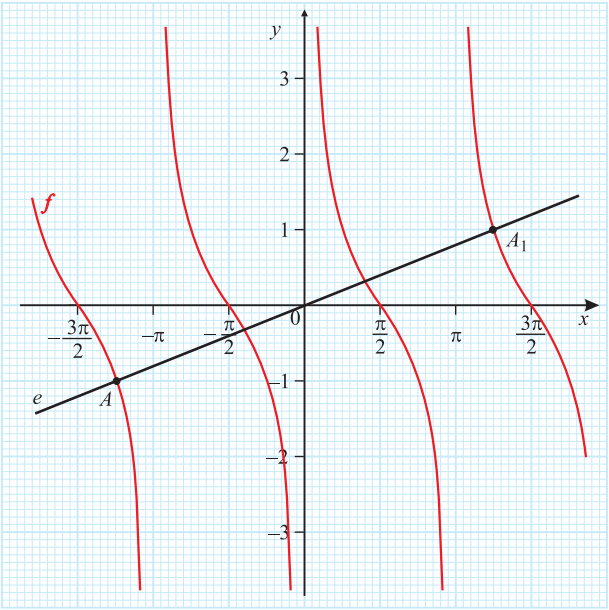
Graf funkcije tangens nazivamo **tangensoida**. Domena tangensoide su svi realni brojevi, osim višekratnika broja $\frac{\pi}{2}$ u kojima nije definirana, a slika su svi realni brojevi.



Graf tangensoide simetričan je s obzirom na ishodište ($A \to A'$), tj. funkcija tangens je neparna funkcija $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$. Vidimo da se funkcija tangens periodično ponavlja, a njen osnovni period je π, $\operatorname{tg}(t + \pi) = \operatorname{tg} t$. Promatramo li funkciju na njenom osnovnom periodu, $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, vidimo da ima jednu nultočku $x_0 = 0$. Tangens raste na svom osnovnom periodu, $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$, i približavanjem prema $\frac{\pi}{2}$ vrijednosti funkcije teže u $+\infty$. Pravci kroz $k \cdot \frac{\pi}{2}$, $k = 2n - 1$, $n \in \mathbf{Z}$ asimptote su funkcije tangens. Nultočke funkcije su $\ldots, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots, k\pi, \ldots$; $k \in \mathbf{Z}$. Tijek funkcije na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$ dan je tablicom.

x	$-\frac{\pi}{2}$	↗	0	↗	$-\frac{\pi}{2}$
$f(x)$	$-\infty$	↗	0	↗	$+\infty$

Graf funkcije kotangens nazivamo **kotangensoida**. Domena kotangensoide su svi realni brojevi, osim višekratnika broja π u kojima nije definirana, a slika su svi realni brojevi.



Kotangensoida je simetrična s obzirom na ishodište $(A \to A')$, tj. funkcija kotangens je neparna funkcija $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. Vidimo da se funkcija kotangens periodično ponavlja, a njen osnovni period je π, $\operatorname{ctg}(t + \pi) = \operatorname{ctg} t$.

Promatramo li funkciju na njenom osnovnom periodu, $\langle 0, \pi \rangle$, vidimo da ima jednu nultočku $x_0 = \frac{\pi}{2}$. Kotangens pada na svom osnovnom periodu $\langle 0, \pi \rangle$ i približavanjem prema π vrijednosti funkcije teže u $-\infty$. Pravci kroz $k\pi$, $n \in \boldsymbol{Z}$ asimptote su funkcije kotangens. Nultočke funkcije su $\ldots, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \ldots, k \cdot \frac{\pi}{2}, \ldots$; $k = 2n - 1, n \in \boldsymbol{Z}$. Tijek funkcije na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$ dan je tablicom.

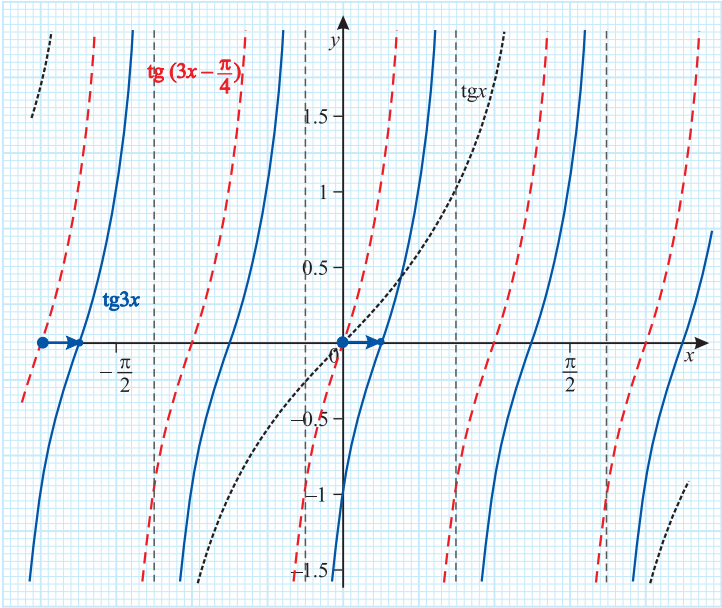
x	0	↗	$\frac{\pi}{2}$	↗	π
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↘	$-\infty$

Primjer 18: Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \operatorname{tg}(3x - \frac{\pi}{4})$.

Rješenje: Iz Graf funkcije $m(x) = A\operatorname{tg}(bx + c)$ možemo dobiti jednostavnim transformacijama grafa funkcije $f(x) = \operatorname{tg} x$.

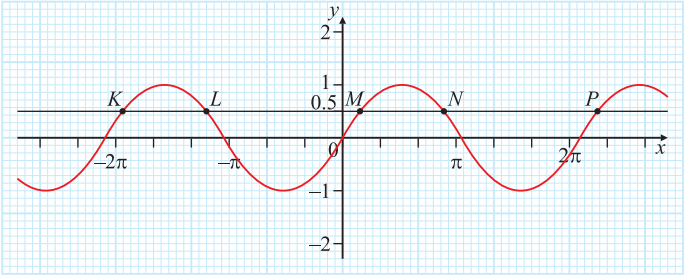
Period funkcije tangens određujemo $P = \frac{\pi}{b}$, te je period naše funkcije $P = \frac{\pi}{3}$.

Pomak funkcije računamo, kao i kod funkcija sinus i kosinus, $-\frac{c}{b}$, pa je pomak naše funkcije $\frac{\pi}{12}$ udesno.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Apscise istaknutih točaka K, L, M, N, P na slici rješenja su jednadžbe:



a) $2\sin x - 1 = 0$ b) $2\sin x + 1 = 0$ c) $2\cos x - 1 = 0$ d) $2\cos x + 1 = 0$.

2. (IK 2008.) Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{2}\sin x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$.

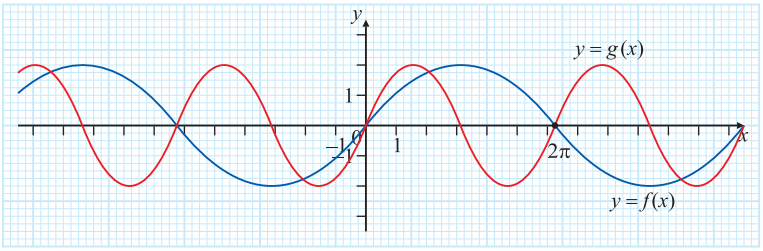
x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–

a) Odredite amplitudu i osnovni period funkcije.

b) Skicirajte graf funkcije na intervalu $[-\pi, 2\pi]$.

3. (NI 2008.) Za koju vrijednost x iz intervala $[0, \pi]$ funkcija $f(x) = \operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ nije definirana?

4. (NI 2008.) Na slici su prikazani grafovi trigonometrijskih funkcija f i g.



a) Odredite funkcije.
b) Očitajte s grafa koliko rješenja ima jednadžba $f(x) = g(x)$ na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

5. (NI 2009.) a) Odredite amplitudu i period funkcije $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$, te sve nultočke iz intervala $[0, 6\pi]$.

b) Na intervalu $[0, 6\pi]$ nacrtajte graf funkcije $f(x) = 3\sin\frac{x}{2}$.

c) Na brojevnoj kružnici označite sve točke $E(t)$ za koje je $\sin t = \frac{1}{2}$.

d) Neka je $\sin t = -0.6$ i $t \in \left\langle \pi, \frac{3\pi}{2} \right\rangle$. Koliko je $\sin 2t$?

e) Ako je $\operatorname{tg} x = a$, izračunajte $\frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

6. (NI 2009.) a) Odredite $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

b) Za $x = \frac{7\pi}{4}$ odredite vrijednost funkcije $f(x) = \frac{\cos x - \sin x}{\cos^2 x + 1}$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Preračunajte $-\frac{2\pi}{5}$ u stupnjeve.

a) $-288°$ b) $-124°$ c) $-72°$ d) $-144°$

2. Preračunajte $470°$ u radijane.

a) $\frac{47\pi}{180}$ b) $\frac{47\pi}{18}$ c) $\frac{18\pi}{23}$ d) $\frac{11\pi}{18}$

3. Čemu $E\left(-\frac{28\pi}{3}\right)$ nije jednako?

a) $\frac{2\pi}{3}$ b) $\frac{158\pi}{3}$ c) $-\frac{58\pi}{3}$ d) $-\frac{49\pi}{3}$

4. Sinus broja t je ordinata, a kosinus apscisa točke $E(t)$ u koju je na brojevnoj kružnici smješten broj t. Je li ova tvrdnja točna?

a) DA b) NE

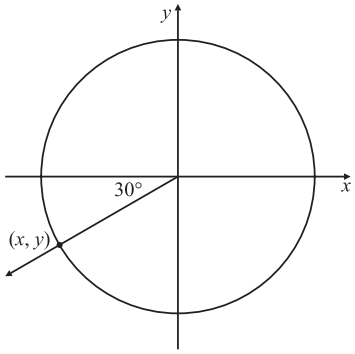
5. Je li moguće $\sin\alpha = 6.28$?

a) DA b) NE

6. Ako je $\sin t \cdot \cos t < 0$, broj t je na brojevnoj kružnici u:

a) I. kvadrantu b) II. kvadrantu
c) III. kvadrantu d) IV. kvadrantu.

7. Odredite koordinate (x, y) na jediničnoj kružnici na slici.



a) $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

b) $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

c) $(-30, -210)$

d) $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

8. Izraz $\sin 240°$ jednak je:

a) $\sin 60°$ b) $-\sin 60°$ c) $\cos 60°$ d) $-\cos 60°$.

9. Za koje kutove je $\cos\beta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$?

a) 60° i 120°. b) 150° i 210°. c) 210° i 330°. d) 60° i 300°.

10. Vrijednost izraza $4\sin\left(-\frac{35}{4}\pi\right)\cdot\cos\left(-\frac{17}{3}\pi\right)$ je:

a) $-2\sqrt{2}$ b) $2\sqrt{2}$ c) $-\sqrt{2}$ d) $\sqrt{2}$.

11. Ako je ϕ pozitivan šiljasti kut i $\sin\phi = a$, koji izraz predstavlja $\cos\phi$?

a) $\sqrt{a}$ b) $\sqrt{1-a^2}$ c) $\frac{1}{\sqrt{a}}$ d) $\frac{1}{\sqrt{1-a^2}}$

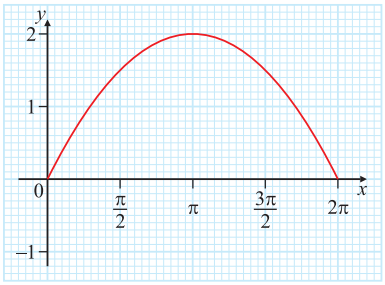
12. U kojem kvadrantu, s porastom kuta α, rastu i $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$?

a) I. kvadrantu b) II. kvadrantu c) III. kvadrantu d) IV. kvadrantu

13. Kolika je vrijednost $\sin x$, ako je $\cos x = -\frac{15}{17}$, $-\frac{7\pi}{2} < x < -3\pi$?

a) $\frac{8}{17}$ b) $-\frac{8}{17}$ c) $\sqrt{\frac{32}{17}}$ d) $-\frac{2}{17}$

14. Koja funkcija je prikazana grafom na intervalu $[0, 2\pi]$?



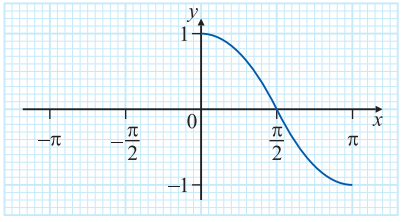
a) $f(x) = 2\sin\frac{x}{2}$

b) $f(x) = 2\sin x$

c) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$

d) $f(x) = \sin 2x$

15. Koja funkcija je prikazana grafom na intervalu $[0, \pi]$?



a) $f(x) = \cos x$

b) $f(x) = \cos\frac{x}{2}$

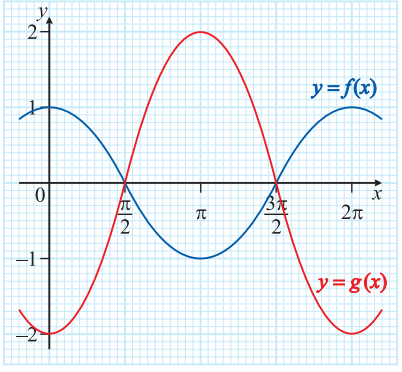
c) $f(x) = \cos 2x$

d) $f(x) = \frac{1}{2}\cos x$

16. Graf funkcije $y = |\sin x|$ ne sadrži točke:

a) u prvom i drugom kvadrantu
b) u drugom i trećem kvadrantu
c) u trećem i četvrtom kvadrantu
d) u prvom i četvrtom kvadrantu.

17. Na slici su prikazane funkcije:



a) $f(x) = -\cos x$, $g(x) = -2\cos x$

b) $f(x) = -\cos x$, $g(x) = 2\cos x$

c) $f(x) = \cos x$, $g(x) = -2\cos x$

d) $f(x) = \cos x$, $g(x) = 2\cos x$.

18. Veličina kuta između π i 2π kojemu je tangens jednak $-\sqrt{3}$, iznosi:

a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{3}$.

19. Koje su funkcije negativne za kutove iz trećeg kvadranta?

a) $\operatorname{ctg} x$ i $\cos x$ b) $\sin x$ i $\operatorname{tg} x$ c) $\sin x$ i $\cos x$ d) $\operatorname{tg} x$ i $\operatorname{ctg} x$

20. Koje funkcije su negativne za kut α iz drugog kvadranta?

a) $\sin\alpha$ i $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$ i $\operatorname{tg}\alpha$ c) $\sin\alpha$ i $\operatorname{ctg}\alpha$ d) $\operatorname{ctg}\alpha$ i $\cos\alpha$

21. Ako veličina kuta α iznosi 2 radijana, onda je $\operatorname{tg}\alpha$:

a) 2.185 b) –2.185 c) 1.185 d) –1.185.

22. Za svaki kut α izraz $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha + \sin^4\alpha - 1$ ima vrijednost:

a) 0 b) 1 c) –1 d) $\sin^2\alpha + 1$.

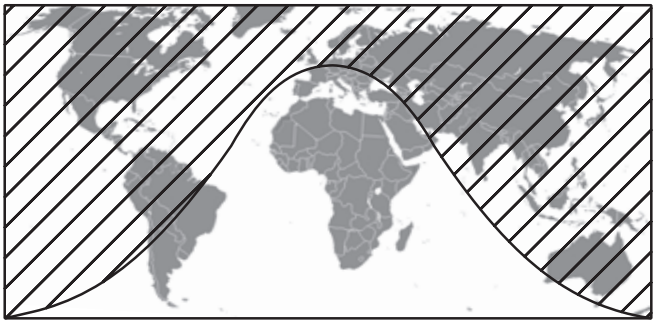
23. Izrazite $\operatorname{ctg}(-840°)$ kao trigonometrijsku funkciju kuta u prvom kvadrantu.

a) $\operatorname{ctg}60°$ b) $\operatorname{tg}60°$ c) $-\operatorname{tg}60°$ d) $-\operatorname{ctg}60°$

24. Vrijednost izraza $\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} x}$ je:

a) $\cos x$ b) $\operatorname{ctg} x$ c) $\sin x$ d) $\operatorname{tg} x$.

25. Osjenčani dio karte Zemlje predstavlja područja noći, a neosjenčani područja dana u određenom trenutku.



Koja vrsta funkcije najbolje predstavlja krivulju koja razdvaja područje noći od područja dana?

a) Kvadratna.
b) Kosinusoida.
c) Tangensoida.
d) Logaritamska.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite glavnu mjeru kuta.

a) $\dfrac{55\pi}{7}$ b) $-\dfrac{112\pi}{13}$

c) $3\,456°\ 34'\ 56''$ d) $-4\,321°\ 43'\ 21''$

2. Odredite na brojevnoj kružnici točku $E(t)$ ako je $\sin(t) = -\dfrac{1}{2}$, $\cos(t) < 0$.

3. Odredite na brojevnoj kružnici rješenje nejednadžbe:

a) $\sin x \geq -\dfrac{2}{3}$ b) $\cos x < \dfrac{3}{4}$.

4. Na brojevnoj kružnici označite intervale realnih brojeva $\left\langle \frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{2} \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$.

5. Izračunajte:

a) $\cos\left(-\frac{19\pi}{6}\right)\sin\frac{17\pi}{3}-\cos\frac{23\pi}{6}\sin\left(-\frac{34\pi}{3}\right)$

b) $\cos\left(-\frac{17\pi}{6}\right)\sin\frac{35\pi}{3}-\cos\frac{77\pi}{3}\sin\left(-\frac{13\pi}{2}\right)$.

6. Na brojevnoj kružnici označite sve točke za koje je:

a) $\sin t = 2$ b) $\cos t = -\frac{1}{2}$.

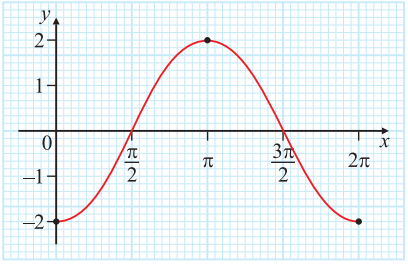
7. Odredite vrijednosti funkcija sinus i kosinus za kutove:

a) $210°$ b) $\frac{10\pi}{6}$ c) $315°$ d) $\frac{123\pi}{4}$.

8. Ako je $\sin\alpha = -\frac{15}{17}$, $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$, izračunajte $\cos\alpha$.

9. Odredite amplitudu funkcije $f(x) = 4\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$.

10. Graf prikazuje trigonometrijsku funkciju. Napišite jednadžbu ove funkcije.



11. Odredite period funkcije $f(x) = -\frac{1}{2}\cos\left(4x-\frac{5\pi}{6}\right)$.

12. Skicirajte graf funkcije $f(x) = 2\sin\left(4x-\frac{2\pi}{3}\right)+1$ na intervalu $[0,\ 2\pi]$.

13. Skicirajte graf funkcije $f(x) = \cos 3x$ na intervalu $[0,\ 2\pi]$.

14. Konstruirajte graf funkcije $f(x) = \sin x$ na intervalu $[-\pi,\ 2\pi]$.

a) Odredite na grafu točku za koju vrijedi $\sin(-1)$.

b) Odredite na grafu točku za koju vrijedi $\sin(4)$.

c) Odredite vrijednost x za koji je $\sin x = \frac{1}{2}$.

d) Odredite vrijednost x za koji je $\sin x > \frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. a) U istom koordinatnom sustavu skicirajte grafove funkcija $f(x)=2\cos 2x$ i $g(x)=-\sin x$ u intervalu $-\pi \le x \le \pi$.

b) Koristeći nacrtane grafove, odredite koliko rješenja ima jednadžba $2\cos 2x=-\sin x$ na zadanom intervalu.

16. Prosjek godišnjih snježnih padalina određenog područja dan je funkcijom $S(t)=20+10\cos\left(\frac{\pi}{5}t\right)$, gdje S predstavlja količinu godišnjih snježnih padalina u centimetrima, a t predstavlja broj godina počevši od 1970. godine.

a) Koliki je minimum godišnjih snježnih padalina (u centimetrima) za ovo područje?

b) Kojih je godina, između 1970. i 2000., količina snježnih padalina bila najmanja?

17. Za funkciju $f(x)=3\sin\left(2\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right)$ odredite amplitudu i period, a zatim nacrtajte graf zadane funkcije u intervalu $[-\pi, \pi]$.

18. Odredite periode sljedećih funkcija.

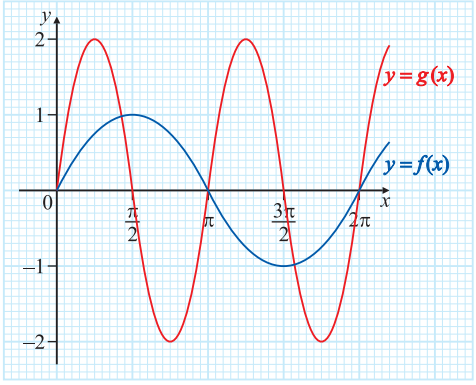
a) $f(x)=-\sin\frac{x}{2}$ b) $g(x)=\frac{2}{3}\cos\left(3x-\frac{\pi}{2}\right)$

c) $h(x)=-\frac{1}{2}\operatorname{tg}(1-2x)$ d) $k(x)=4\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{4}x+\frac{\pi}{6}\right)$

19. Odredite je li funkcija parna, neparna ili nije ni parna ni neparna.

$f(x)=\frac{2\sin x-\cos x}{\operatorname{tg}^2 x}$, za $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, $k\in\mathbf{Z}$.

20. Na slici su prikazani grafovi dviju trigonometrijskih funkcija. Odredite njihove jednadžbe.



21. Zadana je funkcija $f(x) = 2\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{3}\right)$. Nacrtajte njen graf na intervalu $[-4\pi, 4\pi]$.

22. Zadana je funkcija $f(x) = \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$. Odredite period i amplitudu funkcije i nacrtajte njen graf na intervalu $[-2\pi, 2\pi]$.

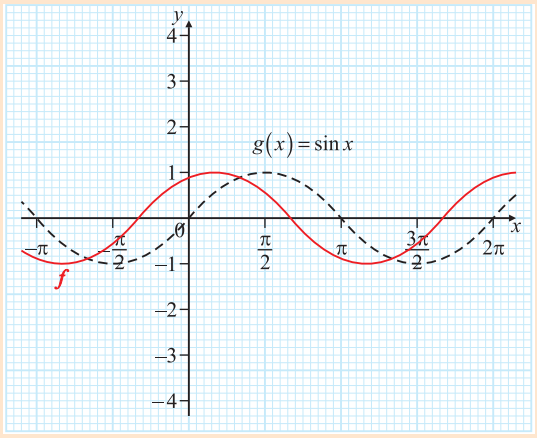
RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a

2. a) $f(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$, amplituda je 1, period je 2π.

b)

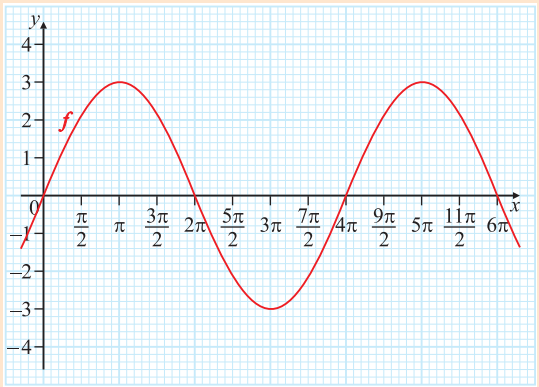


3. $x = \frac{5\pi}{6}$

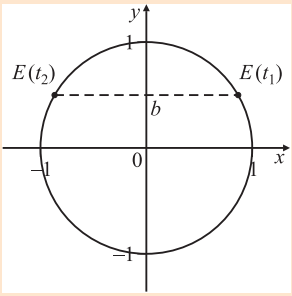
4. a) $f(x) = \sin\frac{x}{2}$, $g(x) = \sin x$ b) 5

5. a) Amplituda je 3, period je 4π, nultočke $x_1 = 0$, $x_2 = 2\pi$, $x_3 = 4\pi$, $x_4 = 6\pi$.

b)



c)



d) $\sin 2t = 0.96$

e) $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x} = \dfrac{a+1}{a-1}$

6. a) $\sin\left(\dfrac{7\pi}{4}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ b) $f(x) = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

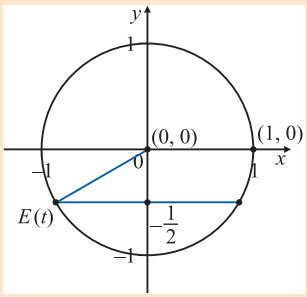
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c	**2.** b	**3.** d	**4.** a	**5.** b	**6.** b	**7.** a	**8.** b	**9.** b
10. c	**11.** b	**12.** d	**13.** a	**14.** a	**15.** a	**16.** c	**17.** c	**18.** d
19. c	**20.** d	**21.** b	**22.** a	**23.** a	**24.** a	**25.** b		

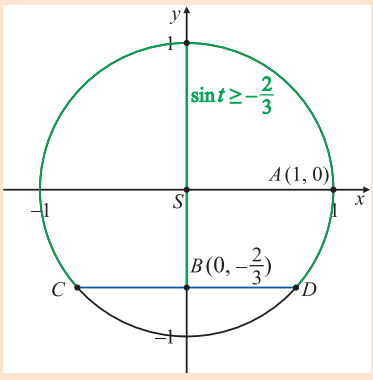
ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. a) $\dfrac{13\pi}{7}$ b) $\dfrac{18\pi}{13}$ c) 216° 34' 56" d) 358° 16' 39"

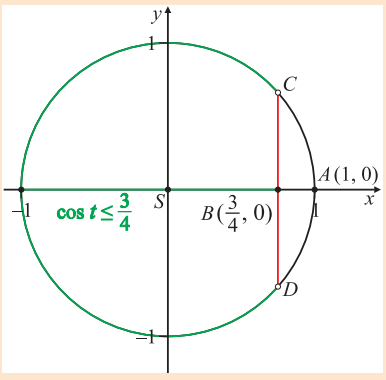
2.



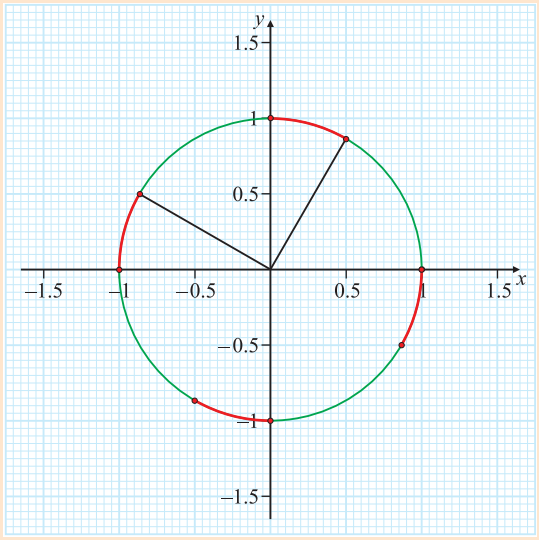
3. a) Uključujući i točke C i D.



b) Točke C i D nisu u rješenju.



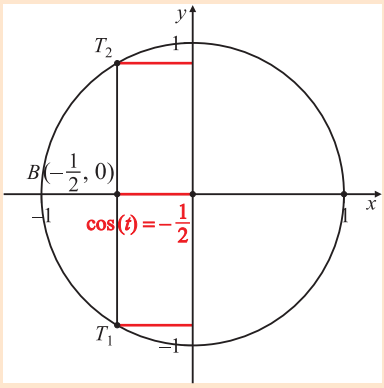
4.



5. a) 0

b) $\frac{5}{4}$

6. a) Takve točke ne postoje. b)



7. a) $\sin 210° = -\frac{1}{2}, \cos 210° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $\sin\frac{5\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2}$

c) $\sin 315° = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \cos 315° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

d) $\sin\frac{123\pi}{4} = \sin\left(30\pi + \frac{3\pi}{4}\right) = \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

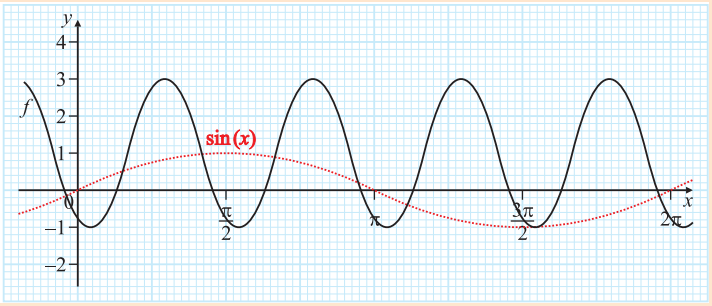
8. $\cos\alpha = \frac{8}{17}$

9. 4

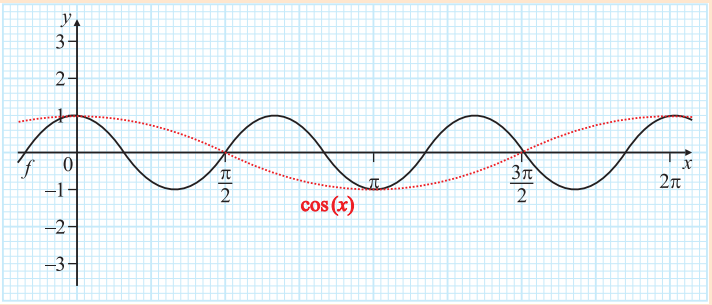
10. $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -2\cos x$

11. $P = \frac{\pi}{2}$

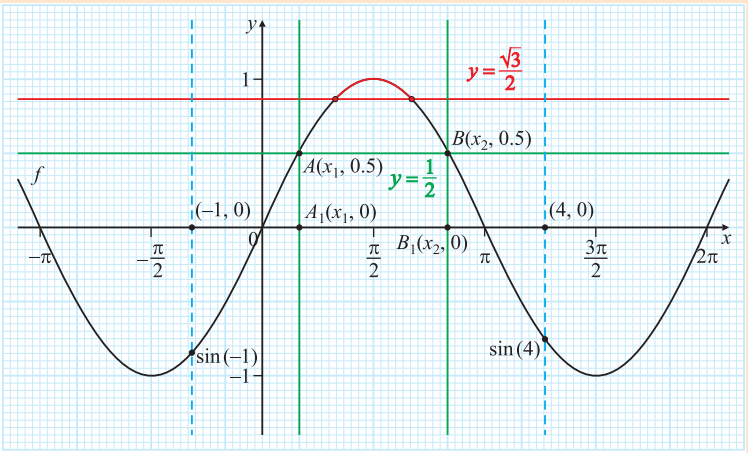
12.



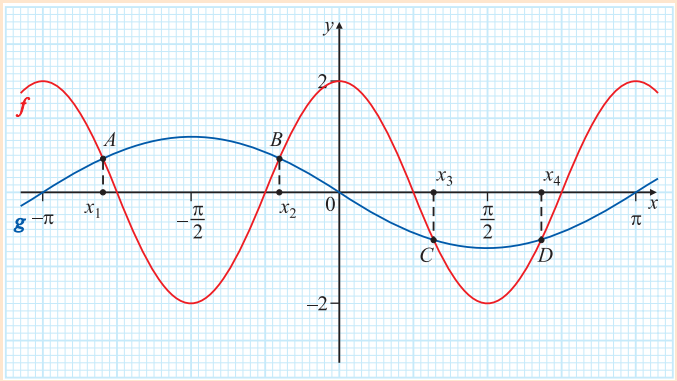
13.



14.

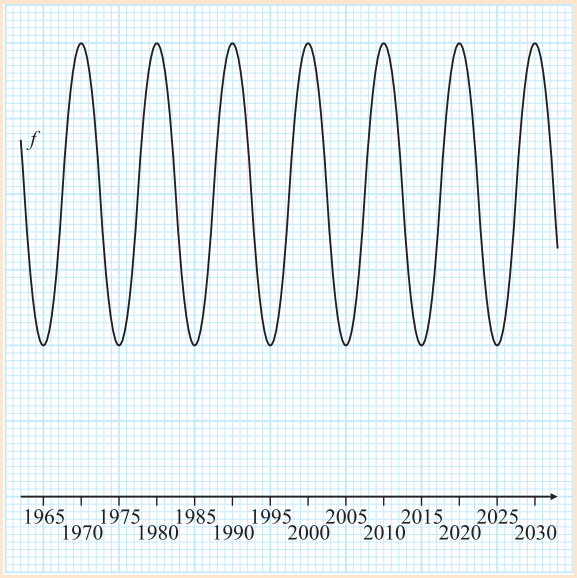


15. a)



b) 4 rješenja

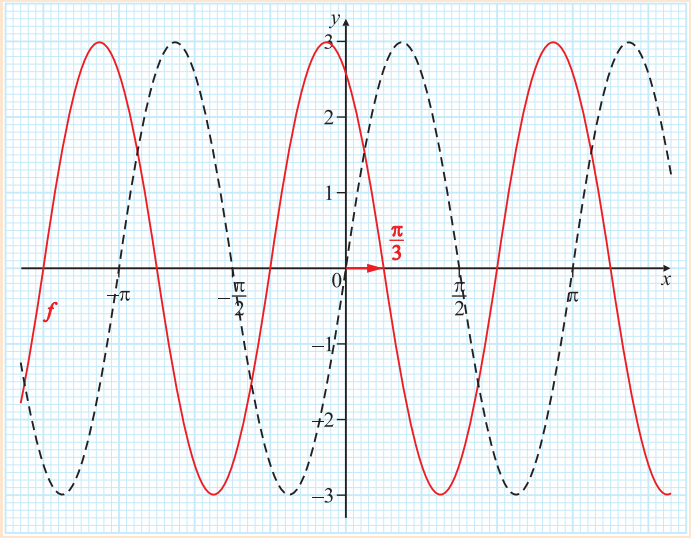
16.



a) 10 centimetara

b) 1975., 1985., 1995. godine.

17. (amplituda = 3, period = π)

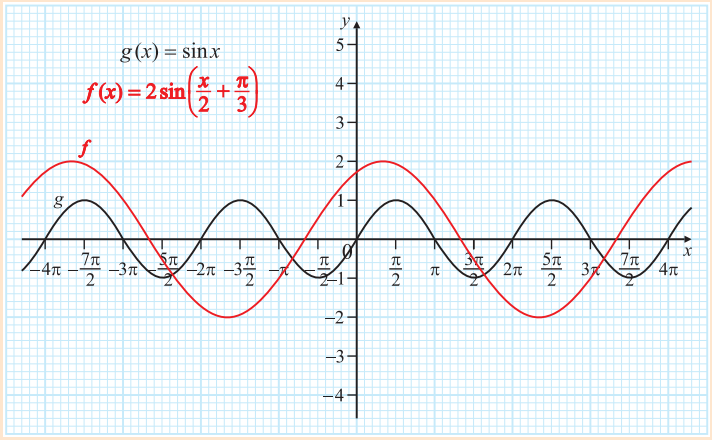


18. a) 4π b) $\frac{2\pi}{3}$ c) $\frac{\pi}{2}$ d) $\frac{4}{3}\pi$

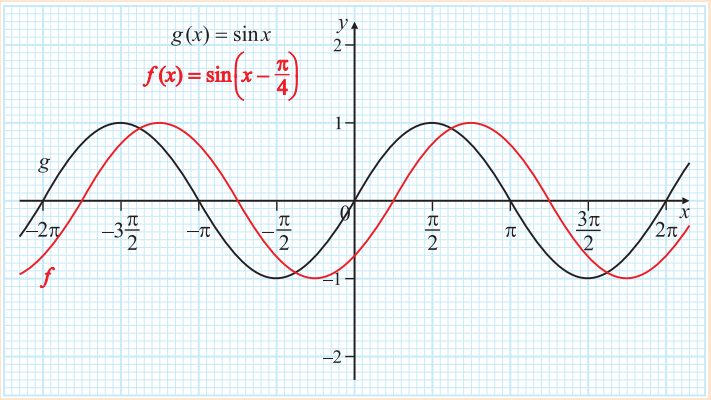
19. Nije ni parna, ni neparna.

20. $f(x) = \sin x$, $g(x) = 2\sin 2x$

21.



22. a) $P = 2\pi$, $a = 1$



2.6.2. Trigonometrijski identiteti

Osnovne veze trigonometrijskih funkcija

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}, \quad \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x = 1$$

Znajući vrijednosti jedne od trigonometrijskih funkcija, možemo odrediti vrijednosti bilo koje druge.

~~$(\sin x)^2 = \sin x^2$~~

$(\sin x)^2 = \sin^2 x$ ✓

Primjer 1: Dokažimo $\dfrac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\operatorname{ctg}^2 x - \operatorname{tg}^2 x} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$, za $x \neq \dfrac{\pi}{2} k$, $k \in \mathbf{Z}$.

Rješenje:

$$\frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x} - \dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\dfrac{\cos^4 x - \sin^4 x}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}} =$$

$$= \frac{\sin^2 x \cos^2 x \cancel{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}}{\cancel{\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right)}\left(\underbrace{\cos^2 x + \sin^2 x}_{1}\right)} = \sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

Trigonometrijske funkcije zbroja i razlike, poznatije kao **adicijske formule,** daju nam način kako izračunati trigonometrijske funkcije kutova koje možemo napisati kao zbroj ili razliku.

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \mp \sin x \cdot \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} y}$$

Primjer 2: Izračunajmo $\sin 15°$ bez upotrebe kalkulatora.

Rješenje: Kut od 15° ili $\dfrac{\pi}{12}$ možemo zapisati kao razliku kutova od 45° i 30° odnosno $\left(\dfrac{\pi}{12} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\pi}{6}\right)$ ili kao 60° – 45°, odnosno $\dfrac{\pi}{3} - \dfrac{\pi}{4}$ jer njihove vrijednosti trigonometrijskih funkcija znamo. Koristeći adicijsku formulu za sinus razlike imamo:

$$\sin 15° = \sin(45° - 30°) = \sin 45° \cdot \cos 30° - \cos 45° \cdot \sin 30° =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.$$

Primjer 3: Dokažimo: $\operatorname{tg} 62° = \dfrac{\cos 17° + \sin 17°}{\cos 17° - \sin 17°}$.

Rješenje: $\operatorname{tg} 62° = \operatorname{tg}(45°+17°) = \dfrac{\operatorname{tg} 45° + \operatorname{tg} 17°}{1 - \operatorname{tg} 45° \operatorname{tg} 17°} = \dfrac{1+\operatorname{tg} 17°}{1-\operatorname{tg} 17°} =$

$$= \frac{1+\dfrac{\sin 17°}{\cos 17°}}{1-\dfrac{\sin 17°}{\cos 17°}} = \frac{\cos 17° + \sin 17°}{\cos 17° - \sin 17°}.$$

Koristeći adicijske formule lako dokazujemo i sljedeće korisne identitete:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{ctg} x \qquad \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \operatorname{tg} x$$

$$\sin(\pi - x) = \sin x \qquad \cos(\pi - x) = -\cos x$$

$$\sin(\pi + x) = -\sin x \qquad \cos(\pi + x) = -\cos x$$

$$\sin(2\pi - x) = -\sin x \qquad \cos(2\pi - x) = \cos x.$$

Primjer 4: Ako je $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{1}{5}$, a $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \dfrac{3}{5}$ i $\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$, $0 < y < \dfrac{\pi}{2}$, izračunajmo $\cos(x - y)$.

Rješenje: Iz $\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \dfrac{4}{5}$ saznajemo da je $\sin x = \dfrac{4}{5}$, a iz $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - y\right) = \dfrac{3}{5}$ vidimo da je $\cos y = \dfrac{3}{5}$. Iz ostalih uvjeta vidimo da je x iz drugog, a y iz prvog kvadranta.

Budući da trebamo izračunati $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$, još trebamo saznati vrijednosti $\cos x$ i $\sin y$, a to ćemo izračunati koristeći osnovnu vezu sinusa i kosinusa.

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\left(\dfrac{4}{5}\right)^2 + \cos^2 x = 1$

$\cos^2 x = \dfrac{9}{25}$

$\cos x = \pm\dfrac{3}{5}$

Budući znamo da je x iz drugog kvadranta pa je $\cos x = -\dfrac{3}{5}$.

$$\sin^2 y + \cos^2 y = 1$$

$$\sin^2 y + \left(\frac{3}{5}\right)^2 = 1$$

$$\sin^2 y = \frac{16}{25}$$

$$\sin y = \pm\frac{4}{5}$$

Znamo da je y iz prvog kvadranta pa je $\sin y = \frac{4}{5}$.

Konačno,

$$\cos(x-y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y =$$

$$= -\frac{3}{5}\cdot\frac{3}{5} + \frac{4}{5}\cdot\frac{4}{5} = -\frac{9}{25} + \frac{16}{25} = \frac{7}{25}.$$

Koristeći adicijske formule lako dokazujemo i sljedeće poznate identitete:

$$\textbf{sin } \mathbf{2}x = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = \textbf{2 sin } x \cdot \textbf{cos } x.$$

Sličnim postupkom dolazimo i do ostalih.

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2\operatorname{ctg} x}$$

Nazivamo ih **trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta**. Vrijedi i:

$$\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

Jednostavnom supstitucijom $t = 2x \implies x = \frac{t}{2}$ dobivamo **trigonometrijski identitet polovičnog kuta**

$$\sin^2 \frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{2}$$

Korištenjem osnovnih veza dolazimo i do ostalih identiteta polovičnog kuta.

$$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1+\cos t}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{t}{2} = \frac{1-\cos t}{\sin t}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{t}{2} = \frac{1+\cos t}{\sin t}$$

Primjer 5: Izračunajmo $\operatorname{tg} 22° 30' + \operatorname{ctg} 22° 30'$.

Rješenje: $\operatorname{tg}\ 22°30' + \operatorname{ctg}\ 22°30' = \operatorname{tg}\frac{45°}{2} + \operatorname{ctg}\frac{45°}{2} =$

$$= \frac{1-\cos 45°}{\sin 45°} + \frac{1+\cos 45°}{\sin 45°} =$$

$$= \frac{2}{\sin 45°} = \frac{2}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}.$$

$$2 \cdot \sin\frac{60°}{2} = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2 \cdot \sin\frac{60°}{2} = 2 \cdot \sin 30° = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Primjer 6: Ako je $\sin x = \frac{12}{13}, \frac{\pi}{2} < x < \pi$, odredimo vrijednosti trigonometrijskih funkcija dvostrukog kuta.

Rješenje: Kako bismo izračunali preostale vrijednosti trigonometrijskih funkcija, odredimo najprije $\cos x$.

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x = 1 - \frac{144}{169}$$

$$\cos^2 x = \frac{25}{169}$$

$$\cos x = \pm\frac{5}{13} \qquad (x \text{ je u drugom kvadrantu})$$

$$\cos x = -\frac{5}{13}$$

Sad odredimo $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = -\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{12}$.

Iz formula za trigonometrijske funkcije dvostrukog kuta slijedi:

$$\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x = 2 \cdot \frac{12}{13} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) = -\frac{120}{169}$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = \left(-\frac{5}{13}\right)^2 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25}{169} - \frac{144}{169} = -\frac{119}{169}$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{120}{119}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{119}{120}.$$

Primjer 7: Pojednostavnimo izraz $\dfrac{4\cos^2\alpha-3}{\cos 2\alpha-\dfrac{1}{2}}$.

Rješenje: $\dfrac{4\cos^2\alpha-3}{\cos 2\alpha-\dfrac{1}{2}}=\dfrac{4\cos^2\alpha-3\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha-\dfrac{1}{2}\sin^2\alpha-\dfrac{1}{2}\cos^2\alpha}=$

$$=\frac{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{\frac{1}{2}\cos^2\alpha-\frac{3}{2}\sin^2\alpha}=$$

$$=\frac{\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}{\frac{1}{2}\left(\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha\right)}=2.$$

Osim navedenih identiteta postoje još i formule pretvorbe zbroja trigonometrijskih funkcija u umnožak i pretvorbe umnoška u zbroj.

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left(\sin\left(x+y\right)+\sin\left(x-y\right)\right)$$

$$\cos x\cdot\cos y=\frac{1}{2}\left(\cos\left(x+y\right)+\cos\left(x-y\right)\right)$$

$$\sin x\cdot\sin y=\frac{1}{2}\left(\cos\left(x-y\right)-\cos\left(x+y\right)\right)$$

Primjer 8: Pojednostavnimo izraz $\dfrac{\sin 50^\circ+\sin 30^\circ}{\cos 55^\circ+\cos 35^\circ}$.

Rješenje: $\dfrac{\sin 50^\circ+\sin 30^\circ}{\cos 55^\circ+\cos 35^\circ}=\dfrac{2\sin\dfrac{50^\circ+30^\circ}{2}\cdot\cos\dfrac{50^\circ-30^\circ}{2}}{2\cos\dfrac{55^\circ+35^\circ}{2}\cdot\cos\dfrac{55^\circ-35^\circ}{2}}=$

$$=\frac{\sin 40^\circ\cdot\cancel{\cos 10^\circ}}{\cos 45^\circ\cdot\cancel{\cos 10^\circ}}=\frac{\sin 40^\circ}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}\cdot\sin 40^\circ$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2009.) Neka je $\sin t=-0.6$, $t\in\left\langle\pi,\dfrac{3\pi}{2}\right\rangle$. Koliko je $\sin 2t$?

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Ako je $\alpha + \beta = 60°$ i $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, onda je $\operatorname{tg}\beta$:

a) $\sqrt{3}$ b) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\frac{\sqrt{3}}{5}$.

2. $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$ jednako je:

a) 1 b) $\frac{\pi}{2}$ c) π d) 0.

3. Izraz $\sin\left(\frac{\pi}{6}+\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{6}-\alpha\right)$ je za svaki α jednak:

a) 1 b) $\sin\alpha$ c) $\cos\alpha$ d) $\cos 2\alpha$.

4. $\frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\alpha}{2}\right)$ jednako je:

a) 2 b) 1 c) –2 d) 3.

5. Izraz $\sin^4 x - \cos^4 x$ jednak je:

a) $\sin^2 x - \cos^2 x$ b) 0 c) $\operatorname{tg}^4 x$ d) 1.

6. $\operatorname{tg} 165° =$

a) $\sqrt{3}-2$ b) 1 c) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ d) $-\sqrt{3}-2$.

7. Ako je $\alpha+\beta=\frac{\pi}{2}$, vrijednost izraza $\frac{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)}{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}$ jednaka je:

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{1}{2}$ c) 2 d) 3.

8. Ako je $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, onda je $\cos 2\alpha$ jednak:

a) $\frac{24}{25}$ b) $\frac{7}{25}$ c) $-\frac{7}{25}$ d) $-\frac{24}{25}$.

9. Ako je $\operatorname{tg} x = 2$, tada $\sin 3x$ iznosi:

a) $\pm\frac{2}{5\sqrt{5}}$ b) $\pm\frac{5\sqrt{5}}{2}$ c) $\pm\frac{4}{5\sqrt{5}}$ d) $\pm\frac{3}{2}$.

10. Ako je $|\cos\alpha| = \frac{1}{4}$ i ako se kut α nalazi u drugom kvadrantu, onda je $\operatorname{tg} 2\alpha$ jednak:

a) –0.3 b) $-\frac{1}{8}$ c) $\frac{1}{8}$ d) $\frac{\sqrt{15}}{7}$.

11. Ako je $\frac{\cos 2x}{\cos x + \sin x} = \sin x$, onda je $\operatorname{tg} 2x$ jednak:

a) 1 b) 2 c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{7}{4}$.

12. Ako je α pozitivan šiljasti kut i $\sin\alpha = \frac{\sqrt{5}}{3}$, koliko je $\cos 2\alpha$?

a) $\frac{1}{9}$ b) $-\frac{1}{9}$ c) $\frac{1}{3}$ d) $-\frac{1}{3}$

13. Za koju vrijednost izraz $\frac{\sin x}{1+2\cos x}$ nije definiran?

a) 60° b) 120° c) 180° d) 300°

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Dokažite: $\frac{1-4\sin^2\alpha}{4\cos^2\alpha - 3} = 1$.

2. Dokažite: $\operatorname{tg} 35° = \frac{\cos 10° - \sin 10°}{\cos 10° + \sin 10°}$.

3. Ako je $\operatorname{tg} x = -2$, $\operatorname{tg} y = \frac{1}{3}$, odredite $\operatorname{tg}(x+y)$ i $\operatorname{tg}(x-y)$.

4. Pojednostavite: $\sin(45° + y) - \sin(45° - y)$.

5. Dokažite: $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 1$.

6. Dokažite: $\frac{\sin 6x}{\sin 2x} - \frac{\cos 6x}{\cos 2x} = 2$.

7. Pojednostavite:

a) $\frac{\sin 2x}{\cos^2 x}$ b) $\sin 2x(\operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x)$.

8. Odredite vrijednost umnoška $-\cos 45° \cdot \sin 45°$.

9. Ako je $f(x) = \sin x + \cos\frac{x}{2}$, odredite $f(2\pi)$.

10. Ako je $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ i $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, izračunajte $\sin 2\alpha$.

11. Izračunajte bez upotrebe kalkulatora: $\cos^4\frac{7\pi}{12}-\sin^4\frac{7\pi}{12}$.

12. Dokažite: $\cos\left(\frac{\pi}{6}-x\right)-\cos\left(\frac{\pi}{6}+x\right)=\sin x$.

13. Dokažite: $\frac{\sin x-\sin y}{\cos x+\cos y}=\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)$.

14. Izračunajte $\sin 15° + \cos 15°$.

15. Pojednostavite: $\frac{\sin\frac{4x}{9}\cos\frac{5x}{9}+\sin\frac{5x}{9}\cos\frac{4x}{9}}{\cos\frac{2x}{13}\cos\frac{11x}{13}-\sin\frac{2x}{13}\sin\frac{11x}{13}}$.

16. Izračunajte: $\cos 50°\cos 35°\cos 15° + \sin 55°\sin 50°\sin 15° - \sin 215°\sin 35°$.

17. Zadana je funkcija $f(x)=\sin\frac{x}{2}+\sqrt{3}\cos\frac{x}{2}$. Prikažite funkciju u obliku $f(x)=a\sin(bx+c)$.

18. Zadana je funkcija $f(x)=\frac{1}{2}\sin 2x\left[\frac{\sqrt{2}}{\cos x}-\frac{\sqrt{2}}{\sin x}\right]$. Prikažite funkciju u obliku $f(x)=a\sin(bx+c)$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. 0.96

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** d **3.** c **4.** b **5.** a **6.** a **7.** b
8. c **9.** a **10.** d **11.** c **12.** b **13.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

3. $\operatorname{tg}(x+y)=-1,\ \operatorname{tg}(x-y)=-7$ **4.** $\sqrt{2}\sin y$ **7.** a) $2\operatorname{tg}x$ b) 2 **8.** $-\frac{1}{2}$
9. $f(2\pi)=-1$ **10.** $\frac{4\sqrt{2}}{9}$ **11.** $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **14.** $\frac{\sqrt{6}}{2}$ **15.** $\operatorname{tg}x$ **16.** 1
17. $f(x)=2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$ **18.** $f(x)=\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$

2.6.3. Trigonometrijske jednadžbe

Jednadžbe koje sadrže trigonometrijske funkcije nepoznatog broja ili kuta zovemo trigonometrijske jednadžbe.

Primjer 1: Riješimo jednadžbe:

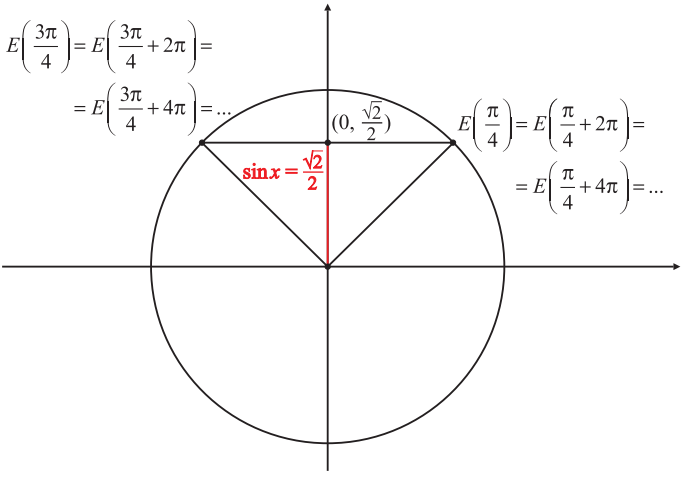
a) $2\sin x-\sqrt{2}=0$ b) $2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}=0.$

Rješenje: a) Svedimo jednadžbu na jednostavniji oblik.

$$2\sin x-\sqrt{2}=0$$
$$2\sin x=\sqrt{2}$$
$$\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Najjednostavniji i najsigurniji način rješavanja trigonometrijskih jednadžbi je očitavanje rješenja s trigonometrijske kružnice.

Odredimo na trigonometrijskoj kružnici one točke za koje vrijedi $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vidimo da je takvih točaka beskonačno mnogo.



S obzirom da je funkcija sinus pozitivna u prvom i drugom kvadrantu, a period funkcije je 2π, rješenja možemo zapisati ovako:

$\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}\cup\left\{\frac{3\pi}{4}+2k\pi, k\in\boldsymbol{Z}\right\}$ ili jednostavnije

$x_1=\frac{\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z},\qquad x_2=\frac{3\pi}{4}+2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}.$

Ovakvu jednadžbu nazivamo osnovnom trigonometrijskom jednadžbom.

b) $2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)-\sqrt{2}=0$

$2\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\sqrt{2}$

$\sin\left(\frac{1}{2}x+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Rješavanje ove jednadžbe svodi se na rješavanje jednadžbe iz prošlog primjera, samo što rješavanje dalje teče ovako:

$\frac{1}{2}x_1+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{4}+2k\pi$

$\frac{1}{2}x_1=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,/\cdot 2$

$x_1=2\left(-\frac{\pi}{12}+2k\pi\right)$

$x_1=-\frac{\pi}{6}+4k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$

$\frac{1}{2}x_2+\frac{\pi}{3}=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$

$\frac{1}{2}x_2=\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{3}+2k\pi\,/\cdot 2$

$x_2=2\left(\frac{5\pi}{12}+2k\pi\right)$

$x_2=\frac{5\pi}{6}+4k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$

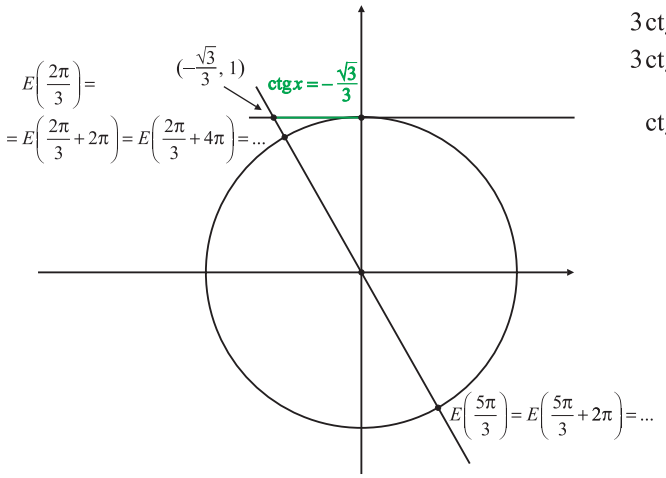
Primjer 2: Riješimo jednadžbu $3\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}=0$.

Rješenje: Svedimo jednadžbu na osnovni oblik.

$3\operatorname{ctg}x+\sqrt{3}=0$

$3\operatorname{ctg}x=-\sqrt{3}$

$\operatorname{ctg}x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$



Funkcije tangens i kotangens imaju period π, tako da se vrijednosti ponavljaju za svaki π, a negativne su u drugom i četvrtom kvadrantu. Rješenja možemo zapisati ovako:

$x_1=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$ ili $x_2=\frac{5\pi}{3}+k\pi\ \ k\in\boldsymbol{Z}$.

Za cjelobrojne vrijednosti k, vidimo da ćemo dobiti iste vrijednosti za x_1 i x_2, tako da rješenje možemo zapisati ovako: $x=\frac{2\pi}{3}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$.

Primjer 3: Riješimo jednadžbu $2\cos^2 x + 5\cos x + 2 = 0$.

Rješenje: Ako $\cos x$ zamijenimo nekom novom nepoznanicom, dobit ćemo kvadratnu jednadžbu.

$\cos x = t \qquad 2t^2 + 5t + 2 = 0$

$$t_1 = -\frac{1}{2}, \qquad t_2 = -2$$

Dalje rješavanje ove jednadžbe svodi se na rješavanje osnovnih trigonometrijskih jednadžbi.

$\cos x = t_1$	$\cos x = t_2$
$\cos x = -\frac{1}{2}$	$\cos x = -2$
$x_1 = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \boldsymbol{Z}$	Vrijednost kosinusa ne može biti manja od -1 tako da ova jednadžba nema rješenja.
$x_2 = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, \ k \in \boldsymbol{Z}$	

Primjer 4: Riješimo jednadžbu $\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x - \cos\frac{x}{2}\sin 2x = -1$.

Rješenje: Prepoznajemo adicijsku formulu sinusa razlike.

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x - \cos\frac{x}{2}\sin 2x = -1$$

$$\sin\frac{x}{2}\cdot\cos 2x - \cos\frac{x}{2}\cdot\sin 2x = \sin\left(\frac{x}{2} - 2x\right)$$

Funkcija sinus je neparna funkcija, znači $\sin(-x) = -\sin x$.

$$\sin\left(\frac{x}{2} - 2x\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \sin\left(-\frac{3x}{2}\right) = -1$$

$$-\sin\frac{3x}{2} = -1 \quad \Rightarrow \quad \sin\frac{3x}{2} = 1$$

Funkcija sinus ima vrijednost 1 za $\frac{\pi}{2}$, tj.

$$\frac{3x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \,/ : \frac{3}{2}$$

$$x = \frac{\pi + 4k\pi}{3} = \frac{\pi}{3} + \frac{4k\pi}{3}, \ k \in \boldsymbol{Z}.$$

Primjer 5: Riješimo jednadžbu $3\sin 2x - 6\sin x = 2\cos x - 2\cos^2 x$.

Rješenje: Vidimo da su varijable trigonometrijskih funkcija različite ($2x$ i x). Koristeći formulu sinusa dvostrukog kuta, sve će varijable postati iste.

$6\sin x\cdot\cos x - 6\sin x = 2\cos x - 2\cos^2 x$

Uočavamo da na lijevoj i desnoj strani jednadžbe možemo izlučiti zajednički faktor.

$$6\sin x(\cos x - 1) = 2\cos x(1 - \cos x)$$

$$6\sin x(\cos x - 1) - 2\cos x(1 - \cos x) = 0$$

$$(\cos x - 1)(6\sin x + 2\cos x) = 0$$

Sada jednadžbu svodimo na osnove jednadžbe.

$\cos x - 1 = 0$

$\cos x = 1$

$x_1 = 2k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

$6\sin x + 2\cos x = 0$

$6\sin x = -2\cos x \ / : 2\cos x$

$3\,\mathrm{tg}\, x = -1$

$\mathrm{tg}\, x = -\frac{1}{3}$

Kalkulatorom izračunamo $\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$ i dobijemo

$x_2 = -18°\ 26'\ 6'' + 180°k,\ k \in \mathbf{Z}.$

Primjer 6: Riješimo jednadžbu $\sin 2x = \sin x$.

Rješenje: Ako prebacimo desnu stranu jednadžbe na lijevu, jednadžbu možemo vrlo jednostavno, koristeći formule pretvorbe iz razlike u umnožak, dovesti na oblik osnovne jednadžbe.

$\sin 2x - \sin x = 0$

$2\cos\frac{2x+x}{2}\sin\frac{2x-x}{2} = 0 \,/ : 2$

$\cos\frac{3x}{2}\cdot\sin\frac{x}{2} = 0$

Jednadžba se svodi na dvije osnovne jednadžbe.

$\cos\frac{3x_1}{2} = 0$

$\frac{3x_1}{2} = \frac{\pi}{2} + k\pi \,/ \cdot\frac{2}{3}$

$x_1 = \frac{\pi}{3} + \frac{2}{3}k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$

$\sin\frac{x_2}{2} = 0$

$\frac{x_2}{2} = k\pi \,/ \cdot 2$

$x_2 = 2k\pi,\quad k \in \mathbf{Z}$

Primjer 7: Riješimo jednadžbu $\sin x \cos 4x = \sin 5x$.

Rješenje: Ovakvu jednadžbu rješavamo koristeći dvije pretvorbe. Najprije na lijevoj strani jednadžbe umnožak pretvorimo u zbroj.

$\frac{1}{2}\left(\sin\left(x+4x\right) + \sin\left(x-4x\right)\right) = \sin 5x$

$\frac{1}{2}\left(\sin 5x + \sin\left(-3x\right)\right) = \sin 5x \ / \cdot 2$

$\sin 5x - \sin 3x = 2\sin 5x$

$-\sin 5x - \sin 3x = 0 / \cdot(-1)$

$\sin 5x + \sin 3x = 0$

Sada koristimo i drugu pretvorbu iz zbroja u umnožak.

$$2\sin\frac{5x+3x}{2}\cdot\cos\frac{5x-3x}{2}=0\,/\cdot 2$$

$$\sin\frac{5x+3x}{2}\cdot\cos\frac{5x-3x}{2}=0$$

$$\sin 4x\cdot\cos x=0$$

Dobili smo osnovne trigonometrijske jednadžbe.

$$\sin 4x_1=0 \qquad\qquad \cos x_2=0$$

$$4x_1=k\pi\,/:4 \qquad\qquad x_2=\frac{\pi}{2}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$$

$$x_1=\frac{k\pi}{4},\ k\in\boldsymbol{Z}$$

Primjer 8: Riješimo jednadžbu $\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ na intervalu $[0,\,2\pi]$.

Rješenje: U ovoj jednadžbi imamo i različite varijable i različite funkcije. Vezom $\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x$ možemo lijevu stranu jednadžbe prikazati pomoću funkcije kosinus, tj.

$$\sin\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)\right)=\cos\left(\pi-2x\right).$$

Dobivamo sljedeću jednadžbu: $\cos\left(\pi-2x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0.$

Koristeći formulu pretvorbe iz razlike u umnožak, dolazimo do osnovnih jednadžbi.

$$\cos\left(\pi-2x\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$-2\sin\frac{\pi-2x+x+\frac{\pi}{4}}{2}\cdot\sin\frac{\pi-2x-\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{2}=0\,/:(-2)$$

$$\sin\frac{\frac{5\pi}{4}-x}{2}\cdot\sin\frac{\frac{3\pi}{4}-3x}{2}=0$$

$$\sin\frac{5\pi-4x}{8}\cdot\sin\frac{3\pi-12x}{8}=0$$

Osnovne jednadžbe rješavamo uobičajeno.

$$\sin\frac{5\pi-4x_1}{8}=0 \qquad\qquad \sin\frac{3\pi-12x_2}{8}=0$$

$$\frac{5\pi-4x_1}{8}=k\pi\,/\cdot 8 \qquad\qquad \frac{3\pi-12x_2}{8}=k\pi\,/\cdot 8$$

$$5\pi-4x_1=8k\pi \qquad\qquad 3\pi-12x_2=8k\pi$$

$$-4x_1=8k\pi-5\pi\,/:(-4) \qquad\qquad -12x_2=8k\pi-3\pi\,/:(-12)$$

$$x_1=\frac{5\pi}{4}-2k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z} \qquad\qquad x_2=\frac{\pi}{4}-\frac{2k\pi}{3},\ k\in\boldsymbol{Z}$$

Da bismo dobili rješenja na zadanom intervalu, uvrštavamo cjelobrojne vrijednosti za k.

$0 \le \frac{5\pi}{4} - 2k\pi \le 2\pi$ $\qquad$ $0 \le \frac{\pi}{4} - \frac{2k\pi}{3} \le 2\pi$

$-\frac{3}{8} \le k \le \frac{5}{8}$ $\qquad$ $-\frac{21}{8} \le k \le \frac{3}{8}$

$\Rightarrow\ k = 0$ $\qquad$ $\Rightarrow k = -2, -1, 0$

$\Rightarrow\ x_1 = \frac{5\pi}{4}$ $\qquad$ $\Rightarrow x_2 = \frac{19\pi}{12},\ x_3 = \frac{11\pi}{12},\ x_4 = \frac{\pi}{4}$

Primjer 9: Riješimo jednadžbu $3\sin^2 x - 2\sin(2x) + 5\cos^2 x = 2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$.

Rješenje: Uredimo ovu jednadžbu (koristimo sinus dvostrukog kuta).

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)$$

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

Dobivamo jednadžbu koju nazivamo homogena trigonometrijska jednadžba i rješavamo je tako da cijelu jednadžbu podijelimo sa $\cos^2 x$.

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{4\sin x \cdot \cancel{\cos x}}{\cos\cancel{^2}\, x} + 3\frac{\cancel{\cos^2 x}}{\cancel{\cos^2 x}} = 0$$

$$\operatorname{tg}^2 x - 4\operatorname{tg} x + 3 = 0$$

Umjesto $\operatorname{tg} x$ uvedemo novu nepoznanicu t i dobivamo kvadratnu jednadžbu.

$$t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$t_1 = 1 \qquad t_2 = 3$$

Dobivamo osnovne trigonometrijske jednadžbe.

$\operatorname{tg} x_1 = 1$ $\qquad$ $\operatorname{tg} x_2 = 3$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbf{Z}$ $\qquad$ $x_2 = 71^\circ\ 33'\ 54'' + 180^\circ k,\ k \in \mathbf{Z}$

Rješenja na intervalu možemo izračunati i bez rješavanja nejednadžbi (kao u primjeru 8.). Vidimo da u prvom slučaju za $k = 0$ dobivamo $x_1 = \frac{\pi}{4}$, te za $k = -1$, $x_2 = -\frac{3\pi}{4}$, a u drugom slučaju, također za $k = 0$, dobivamo $x_3 = 71^\circ\ 33'\ 54''$, te za $k = -1$, $x_2 = -108^\circ\ 26'\ 6''$.

Primjer 10: Odredimo period, amplitudu, pomak, nultočke, točke maksimuma i minimuma i nacrtajmo graf funkcije $f(x) = -2\sin 2x + 2\sqrt{3}\cos 2x$, na intervalu $[-\pi, 2\pi]$.

Rješenje: Kako bismo izračunali sve što se traži i nacrtali graf ove funkcije, prikažimo je u jednostavnijem obliku. Vidimo da možemo izlučiti 2.

$f(x) = 2\left(-\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x\right)$. Ako sada ponovo izlučimo 2 dobivamo $f(x) = 2 \cdot 2\left(-\frac{1}{2}\sin 2x + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)$ i primjećujemo da smo uz $\sin 2x$ i $\cos 2x$ dobili poznate vrijednosti, $\cos\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2}$, $\sin\frac{2\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, tako da je sada

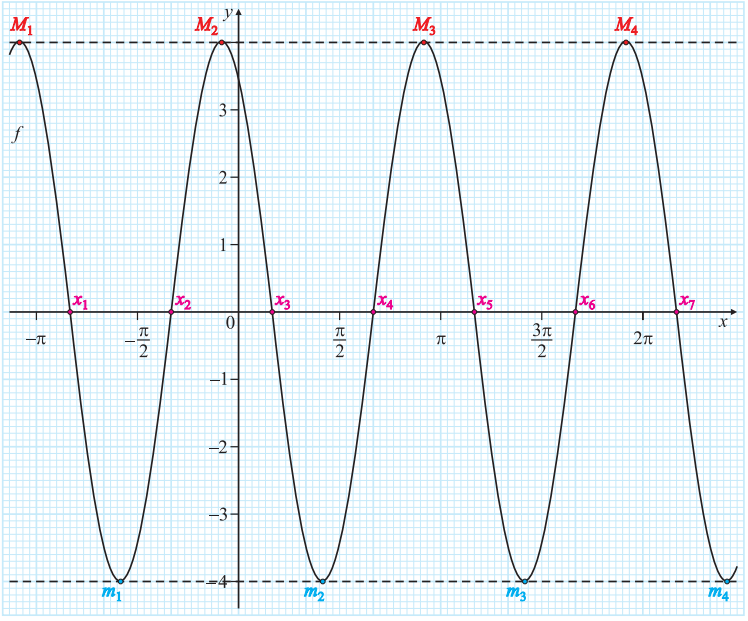
$f(x) = 4\left(\cos\frac{2\pi}{3}\cdot\sin 2x + \sin\frac{2\pi}{3}\cdot\cos 2x\right)$.

Možemo prepoznati adicijsku formulu za sinus zbroja.

$f(x) = 4\sin\left(2x + \frac{2\pi}{3}\right)$

Period je $P = \frac{2\pi}{2} = \pi$, amplituda je 4 i pomak $-\frac{\frac{2\pi}{3}}{2} = -\frac{\pi}{3}$.

Sada je lako nacrtati i graf ove funkcije. Na grafu su točke maksimuma označene sa M_1, M_2, M_3, M_4, točke minimuma sa m_1, m_2, m_3, m_4, a nultočke sa x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Ove točke ćemo sada vrlo lako i izračunati.



Za izračunavanje točaka maksimuma funkciju ćemo izjednačiti s njenom najvećom vrijednošću, a to je vrijednost amplitude 4.

$$4\sin\left(2x_M+\frac{2\pi}{3}\right)=4\,/:4$$

$$\sin\left(2x_M+\frac{2\pi}{3}\right)=1$$

$$2x_M+\frac{2\pi}{3}=\frac{\pi}{2}+2k\pi$$

$$2x_M=-\frac{\pi}{6}+2k\pi\,/:2$$

$$x_M=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$$

Kako bismo dobili točke u traženom intervalu, uvrštavamo cjelobrojne vrijednosti k.

$$k=0\ \Rightarrow\ x_M=-\frac{\pi}{12}$$

$$k=1\ \Rightarrow\ x_M=\frac{11\pi}{12}$$

$$k=2\ \Rightarrow\ x_M=\frac{23\pi}{12}$$

Za izračunavanje točaka minimuma funkciju ćemo izjednačiti s njenom najmanjom vrijednošću, a to je – 4.

$$4\sin\left(2x_m+\frac{2\pi}{3}\right)=-4\,/:4$$

$$\sin\left(2x_m+\frac{2\pi}{3}\right)=-1$$

$$2x_m+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$$

$$2x_m=\frac{5\pi}{6}+2k\pi\,/:2$$

$$x_m=\frac{5\pi}{12}+k\pi,\ k\in\boldsymbol{Z}$$

Kako bismo dobili točke u traženom intervalu, uvrštavamo cjelobrojne vrijednosti k.

$$k=-1\ \Rightarrow\ x_m=-\frac{7\pi}{12}$$

$$k=0\ \Rightarrow\ x_m=\frac{5\pi}{12}$$

$$k=1\ \Rightarrow\ x_m=\frac{17\pi}{12}$$

Za izračunavanje nultočaka, funkciju ćemo izjednačiti s nulom.

$$4\sin\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)=0 \,/:4$$

$$\sin\left(2x_0+\frac{2\pi}{3}\right)=0$$

$$2x_0+\frac{2\pi}{3}=k\pi$$

$$2x_0=-\frac{2\pi}{3}+k\pi \,/:2$$

$$x_0=-\frac{\pi}{3}+\frac{k\pi}{2},\ k\in \boldsymbol{Z}$$

Kako bismo dobili točke u traženom intervalu, uvrštavamo cjelobrojne vrijednosti k.

$k=-1 \Rightarrow x_0=-\frac{5\pi}{6}$ $\quad k=2 \Rightarrow x_0=\frac{2\pi}{3}$

$k=0 \Rightarrow x_0=-\frac{\pi}{3}$ $\quad k=3 \Rightarrow x_0=\frac{7\pi}{6}$

$k=1 \Rightarrow x_0=\frac{\pi}{6}$ $\quad k=4 \Rightarrow x_0=\frac{5\pi}{3}$.

Primjer 11: Funkcijom $f(x)=2.64\cdot\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)+2.74$ dana je razina vode kao funkcija vremena, odnosno plima i oseka u nekom mjestu na moru, određenog dana.

a) Odredimo kolika je razlika u razini vode između plime i oseke.
b) Koliki je period ove funkcije?
c) U koje je vrijeme poslije ponoći oseka?
d) Koliki je maksimum funkcije? Što to znači u realnoj situaciji?
e) Koliki je minimum funkcije? Što to znači u realnoj situaciji?

Rješenje: a) Maksimum funkcije (plima) je za

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)=1, \text{ tj. za } x=0 \Rightarrow f_{\max}=2.64+2.74=5.38,$$

a minimum (oseka) za

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right)=-1 \Rightarrow f_{\min}=-2.64+2.74=0.1.$$

Razlika je $5.38 - 0.1 = 5.28$.

b) Period ove funkcije je $P=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$.

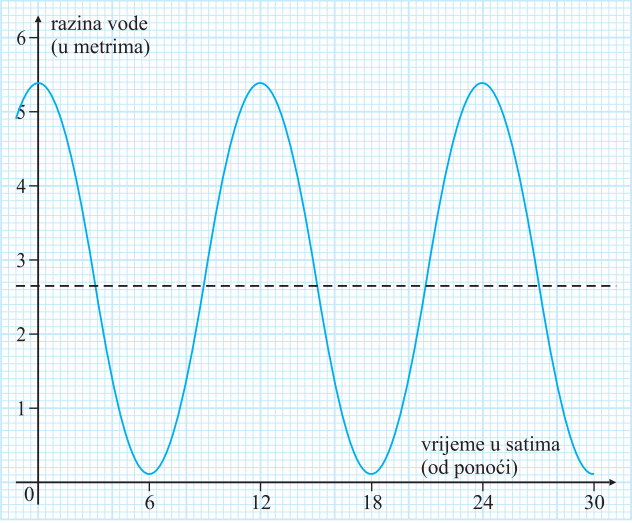
c) Kako bismo izračunali kad je oseka, tražimo kada funkcija postiže svoju najmanju vrijednost:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}x\right) = -1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\pi}{6}x = \pi + 2k\pi \quad \Rightarrow \quad x = 6 + 12k.$$

Uvrštavajući cjelobrojne vrijednosti za broj k, dobit ćemo da je oseka u 6 sati i u 18 sati.

d) Maksimum funkcije smo već izračunali, a iznosi 5.38. Razina mora je najviša kada je plima, a to je maksimum ove funkcije.

e) Minimum funkcije je 0.1, a predstavlja razinu mora kada je oseka.
Ako nacrtamo graf ove funkcije, odgovore na sva ova pitanja čitamo s grafa.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Ispišite sva rješenja jednadžbe $\sin\left(\frac{x-\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{x-\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4}$ iz intervala $x \in [0,\ 6\pi]$.

2. (NI 2009.) Odredite rješenja jednadžbe $\cos 2x - \cos x = 0$ iz intervala $[0,\ 2\pi\rangle$.

3. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $\cos\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) = 0.5$.

4. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $2 \sin 2x = \cos x$.

5. (IK 2010.) Riješite jednadžbu $2\ \mathrm{tg}^2 x - \mathrm{tg}\ x - 1 = 0$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Zbroj prvih četiriju pozitivnih rješenja jednadžbe $2\sin(3x) - 1 = 0$ je:

a) $\frac{\pi}{3}$ b) π c) 2π d) 5π.

2. Veličina kuta između π i 2π kojemu je tangens jednak $-\sqrt{3}$, iznosi:

a) $\frac{7\pi}{6}$ b) $\frac{4\pi}{3}$ c) $\frac{3\pi}{2}$ d) $\frac{5\pi}{3}$.

3. Broj rješenja jednadžbe $\sin\alpha + \sin 2\alpha + \sin 3\alpha + \sin 4\alpha = 0$ koja se nalaze u intervalu $[0, \pi]$ iznosi:

a) 5 b) 3 c) 4 d) 6.

4. Sva rješenja jednadžbe $\sin 2x + \cos 2x = -\sqrt{2}$ dana su sa:

a) $\frac{\pi}{8}(8k+5),\ k \in \boldsymbol{Z}$ b) $\frac{\pi}{3}(2k+1),\ k \in \boldsymbol{N}$

c) $\frac{\pi}{4}(3k+7),\ k \in \boldsymbol{Z}$ d) $\frac{\pi}{4}(2k+1),\ k \in \boldsymbol{Z}$.

5. Skup svih rješenja jednadžbe $1 - 5\sin x + 2\cos^2 x = 0$, uz uvjet $\cos x \leq 0$, je skup (k je cijeli broj):

a) $(3+4k)\frac{\pi}{3}$ b) $(5+12k)\frac{\pi}{6}$ c) $(2-3k)\frac{\pi}{4}$ d) $(1+2k)\frac{\pi}{2}$.

6. Na cijelom intervalu $3 < x < 4$ funkcija $f(x) = \sin x$ je:

a) veća od nule b) manja od nule
c) rastuća d) padajuća.

7. Ako je x ono rješenje jednadžbe $1 + 4\sin x - 4\cos^2 x = 0$ koje se nalazi u prvom kvadrantu, tada je $\operatorname{tg} x$ jednak:

a) 1 b) $\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) 0.

8. Koliko rješenja ima jednadžba $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} = 4$ na intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4

9. Broj rješenja jednadžbe $\sin 7x = \sin 3x$ koja se nalaze unutar intervala $[0, 2\pi]$ je:

a) 5 b) 10 c) 15 d) 20.

10. Broj rješenja jednadžbe $2\cos^2 x - \sin x \cos x + \sin^2 x = 0$ koja se nalaze u intervalu $[0, 100]$ je:

a) 0 b) 1 c) 10 d) 100.

11. Rješenje sustava $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 1 + \sqrt{3},\ \operatorname{ctg} x + \operatorname{ctg} y = \frac{3+\sqrt{3}}{3}$ za koje je $x,\ y \in \langle 0,\ \pi \rangle$ iznosi:

a) $x = 30°, y = 45°$ b) $x = 45°, y = 60°$
c) $x = 60°, y = 30°$ d) $x = 135°, y = 60°$.

12. Broj rješenja jednadžbe $\sin x = \sin 2x$ u intervalu $[0,\ 2\pi]$ je:

a) 2 b) 4 c) 5 d) 6.

13. Ukupan broj rješenja jednadžbe $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$ na intervalu $\langle 0,\ 2\pi \rangle$ je:

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3.

14. Broj korijena jednadžbe $\sin\left|x + \frac{\pi}{2}\right| = \frac{1}{2}$ u intervalu $\langle -\pi,\ \pi \rangle$ iznosi:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

15. Zbroj rješenja jednadžbe $\cos 2x + \sin x = 0$, koja se nalaze u intervalu $[0,\ 2\pi]$ jednak je:

a) $2.5\,\pi$ b) $3\,\pi$ c) $3.5\,\pi$ d) $4\,\pi$.

16. Zbroj rješenja jednadžbe $\cos 10x = \frac{1}{2}$ u intervalu $\left\langle 0,\ \frac{\pi}{2} \right\rangle$ iznosi:

a) $\frac{16\pi}{15}$ b) $\frac{49\pi}{60}$ c) $\frac{37\pi}{30}$ d) $\frac{29\pi}{15}$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Riješite jednadžbu $\cos 3x = \sin 60°$ u intervalu $\langle -180°, 180° \rangle$.

2. Odredite vrijednost od ϕ u intervalu $90° \le \phi \le 270°$ koja zadovoljava jednadžbu $2\sin\phi + 1 = 0$.

3. Pronađite sve vrijednosti varijable ϕ u intervalu $0° \le \phi \le 180°$ koje zadovoljavaju jednadžbu $8\cos^2\phi - 2\cos\phi - 1 = 0$. (Rješenje zaokružite na najbliži stupanj.)

4. Ako je $x \in [0,\ 2\pi]$, riješite jednadžbu $2(\cos x + 1) = 1$.

5. Ako je $0 \le \theta \le 2\pi$, riješite jednadžbu $4\operatorname{tg}\theta + 2 = 2\operatorname{tg}\theta$.

6. Ako je $0 \le \alpha \le 360°$, riješite jednadžbu $2(\cos\alpha + 3) = 0$.

7. Riješite jednadžbu $2(\cos x + 1) = 3 - 4\cos x$ na najbliži stupanj za $0 \le x \le 360°$.

8. Riješite jednadžbu $4\sin^2 x - 1 = 0$.

9. Riješite jednadžbu $5\sin^2 x - 4\sin x - 1 = 0$ na intervalu $0 \le x \le 360°$.

10. Na intervalu $0 \le x \le 360°$, pronađite sve vrijednosti x koji zadovoljavaju jednadžbu $4\cos x + 3 = \dfrac{2}{\cos x}$ (zaokružite rješenje na najbliži stupanj).

11. Riješite jednadžbu $3\cos 2\theta = 2 - \sin\theta$ na intervalu $0 \le \theta \le 360°$, zaokružujući na stupnjeve.

12. U intervalu $[0°, 360°]$ pronađite sve vrijednosti koje zadovoljavaju jednadžbu $2\operatorname{ctg} x + \dfrac{4}{\operatorname{ctg} x} = 7$ zaokružujući na stupnjeve i minute.

13. Riješite jednadžbu $\operatorname{tg} x \cdot \sin^2 x = 2\operatorname{tg} x$.

14. Na monitoru promatramo ponašanje dvaju različitih impulsa i snimamo ih u istom koordinatnom sustavu za x koji je $0 \le x \le 360°$. Impulsi su dani sljedećim jednadžbama:

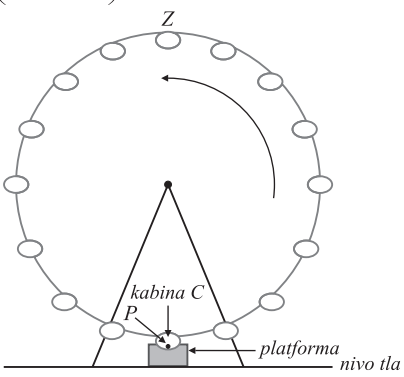
$y = 2\sin^2 x$

$y = 1 - \sin x$.

Odredite sve vrijednosti od x, u stupnjevima, za koje se ta dva impulsa susreću u intervalu $0 \le x \le 360°$.

15. Veliki kotač u luna parku vrti se suprotno od kazaljke na satu jednolikom brzinom. Ljudi ulaze u kabine kotača s platforme koja se nalazi iznad razine tla. Kotač ima 16 jednoliko raspoređenih kabina. Pauk se u 13 h pričvrstio u točku P na vanjskoj strani kabine kada je točka P na najnižem položaju. Visina h, zadana u metrima, točke P iznad razine tla, u vrijeme t poslije 13 sati, dana je sa:

$$h(t) = 62 + 60\sin\left(\frac{(5t-1)\pi}{2}\right).$$



a) Nađite maksimalnu visinu (u metrima) točke P iznad razine tla.

b) Nađite minimalnu visinu (u metrima) točke P iznad razine tla.

c) U koje se vrijeme (poslije 13 sati) točka P prvi put vrati na najniži položaj?

d) Odredite vrijeme (poslije 13 sati) kada točka P dostiže visinu od 92 metra nad zemljom.
e) Odredite interval (u minutama) kada točka P dostiže visinu od bar 92 metra.
f) Koliko traje cijeli krug?
g) Kada točka P prvi put dostigne položaj točke Z, pauk se odluči spustiti na tlo. Pada s kabine okomito prema tlu brzinom 5 m/s. Koliko dugo će pauk padati dok ne dotakne tlo?

16. Prodaja računala obično je predmet sezonske fluktuacije. U određenoj tvrtki prodaja računala u 2008. i 2009. godini može se aproksimirati funkcijom $s(t) = 0.106 \cdot \sin(1.39t + 1.61) + 0.455,\ 1 \le t \le 8$, gdje je t vrijeme u kvartalima ($t = 1$ predstavlja kraj prvog kvartala 2008. godine), a $s(t)$ kvartalni prihod od prodaje računala u milijunima kuna.

a) Procijenite u kojim kvartalima se prodalo najviše računala u sljedeće 2 godine (od siječnja 2008. do siječnja 2010.).
b) Procijenite kada se prodalo najmanje računala u sljedeće 2 godine (od siječnja 2008. do siječnja 2010.).
c) Koliki je prihod u kvartalima kada se prodaje najviše računala?
d) Koliki je prihod u kvartalima kada se prodaje najmanje računala?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. $x_1 = \frac{3\pi}{2},\ x_2 = \frac{5\pi}{2},\ x_3 = \frac{11\pi}{2}$ **2.** $x_1 = 0,\ x_2 = \frac{2\pi}{3},\ x_3 = \frac{4\pi}{3}$ **3.** $x_1 = \frac{5\pi}{12},\ x_2 = \frac{13\pi}{12}$

4. $x_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ x_2 = 14°\ 28'\ 39'' + 360°k,\ x_3 = 165°\ 31'\ 21'' + 360°k,\ k \in Z$

5. $x_1 = 153°\ 26'\ 6'' + 180°k,\ x_2 = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in Z$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** d **3.** a **4.** a **5.** b **6.** d **7.** c **8.** d
9. c **10.** a **11.** b **12.** c **13.** a **14.** c **15.** c **16.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x_1 = -130°,\ x_2 = -110°,\ x_3 = -10°,\ x_4 = 10°,\ x_5 = 110°,\ x_6 = 130°$ **2.** $\phi = \frac{7\pi}{6}$ ili $\phi = 210°$

3. 60°, 104° **4.** $x_1 = \frac{2\pi}{3},\ x_2 = \frac{4\pi}{3}$ **5.** $x_1 = \frac{3\pi}{4},\ x_2 = \frac{7\pi}{4}$ **6.** Nema rješenja.

7. $x_1 = 31°,\ x_2 = 329°$ **8.** $x_1 = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ x_2 = \frac{5\pi}{6} + k\pi,\ k \in Z$ **9.** $x_1 = 90°,\ x_2 = 192°,\ x_3 = 348°$

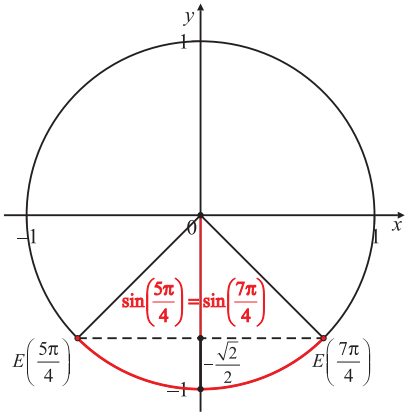
10. $x_1 = 65°,\ x_2 = 295°$ **11.** $\theta_1 = 199°,\ \theta_2 = 341°,\ \theta_3 = 30°,\ \theta_4 = 150°$
12. $x_1 = 14°\ 2',\ x_2 = 194°\ 2',\ x_3 = 116°\ 34',\ x_4 = 296°\ 34'$ **13.** $x = k\pi,\ k \in Z$
14. $x_1 = 30°,\ x_2 = 150°,\ x_3 = 270°$
15. a) 122 m b) 2 m c) U 13 sati i 48 minuta.
d) U 13 sati i 16 minuta. e) Od 16 do 32 minute. f) 96 minuta, 24.4 s
16. a) 4., 9. b) 2., 6., 11. c) 561 000 kuna d) 349 000 kuna

2.6.4. Trigonometrijske nejednadžbe

Trigonometrijske nejednadžbe rješavamo pomoću trigonometrijske kružnice ili pomoću grafova trigonometrijskih funkcija.

Primjer 1: Riješimo nejednadžbu $\sin x \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Rješenje:

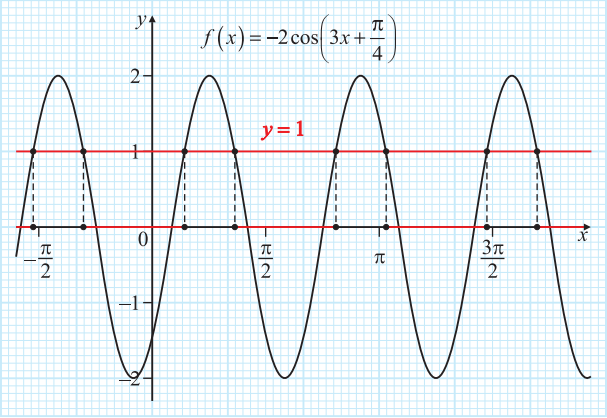


Odredimo na trigonometrijskoj kružnici točke za koje je $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. Znamo da su to točke $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. Sada na kružnici nalazimo sve točke čije su ordinate manje od $-\frac{\sqrt{2}}{2}$. Vidimo da su to točke od $\frac{5\pi}{4}$ do $\frac{7\pi}{4}$, odnosno $\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{7\pi}{4}$. Funkcija sinus je periodična, pa je skup rješenja dan sa $\left\{\frac{5\pi}{4} + 2k\pi \leq x \leq \frac{7\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \boldsymbol{Z}\right\}$ ili $x \in \left[\frac{5\pi}{4} + 2k\pi, \frac{7\pi}{4} + 2k\pi\right],\ k \in \boldsymbol{Z}$.

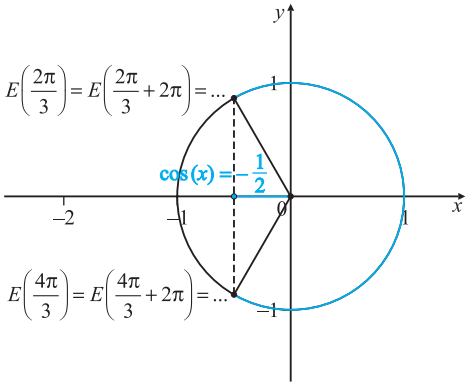
Rješenje uključuje i same točke $E\left(\frac{5\pi}{4}\right)$ i $E\left(\frac{7\pi}{4}\right)$.

Primjer 2: Riješimo nejednadžbu $-2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) < 1$ na intervalu $[0,\ 2\pi]$.

Rješenje: Rješenja možemo tražiti koristeći graf funkcije $f(x) = -2\cos\left(3x + \frac{\pi}{4}\right)$.



Nalazimo sjecišta funkcije f i pravca $y = 1$ i promatramo gdje je funkcija ispod pravca. Na slici su crvenom bojom označena područja na osi apscisa gdje je vrijednost funkcije f manja od 1. No, kao što vidimo, nije jednostavno pročitati vrijednosti na x-osi. Kako bismo pročitali vrijednosti, ponovo koristimo trigonometrijsku kružnicu i ponavljamo postupak iz prošlog primjera ili samo rješavamo jednadžbu $-2\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=1$, odnosno $\cos\left(3x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}$.



Rješenje je: $x \in \left\langle \frac{13\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi, \frac{29\pi}{36} + \frac{2}{3}k\pi \right\rangle$, $k \in \mathbf{Z}$, odnosno na intervalu $[0, 2\pi]$,

$$x \in \left[0, \frac{5\pi}{36}\right\rangle \cup \left\langle \frac{13\pi}{36}, \frac{29\pi}{36}\right\rangle \cup \left\langle \frac{37\pi}{36}, \frac{53\pi}{36}\right\rangle \cup \left\langle \frac{61\pi}{36}, 2\pi\right].$$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Rješenje nejednadžbe $\sin x > \cos x$ u intervalu $\langle 0,\ 2\pi\rangle$ je:

a) $\frac{7\pi}{4} < x < 2\pi$ b) $\frac{\pi}{4} < x < \frac{5\pi}{4}$ c) $-\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$ d) $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$.

2. Riješite nejednadžbu $4\sin^2 x > 3$ na intervalu $0 \le x \le \pi$.

a) $\frac{\pi}{3} \le x \le \frac{2\pi}{3}$ b) $0 \le x \le \pi$ c) $\varnothing$ d) $\frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$

3. Zadani su skupovi $S_1 = \left\{x : \sin x \ge \frac{1}{2}\right\}$, $S_2 = \{x : \operatorname{tg} x < 0\}$, $S_3 = [0,\ 2\pi]$. Njihov presjek je:

a) $\left\langle \frac{\pi}{2},\ \frac{5\pi}{6}\right]$ b) $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{5\pi}{6}\right]$ c) $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right]$ d) $\left[\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

4. Skup svih rješenja nejednadžbe $\sin x - \sqrt{3}\cos x > 0$ u intervalu $\left\langle 0,\ \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je skup:

a) $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ b) $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\rangle$ c) $\left\langle 0, \frac{\pi}{4}\right\rangle$ d) $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

5. Rješenje nejednadžbe $2\sin^2 x + \sqrt{3}\sin x - 3 > 0$ iz intervala $[0,\ 2\pi]$ je interval:

a) $\left\langle 0, \frac{2\pi}{3}\right\rangle$ b) $\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ c) $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\rangle$ d) $\left\langle \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}\right\rangle$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

Riješite nejednadžbe.

1. $\sin\frac{\pi x}{3} < \sin\frac{\pi}{3}$

2. $\cos\left(\frac{5\pi}{2} + x\right) \ge \frac{\sqrt{3}}{2}$

3. $-\cos\left(\frac{\pi}{6} - x\right) \ge 1$

4. Za svaku od zadanih nejednadžbi (1. – 3. zadatak) odredite rješenja na intervalu $[-\pi,\ \pi]$.

5. Neka je $T(t) = 38.7 + 1.7 \cdot \sin\left(\frac{t\pi}{8}\right)$ formula po kojoj se pacijentu koji boravi u bolnici 16 dana povećava i smanjuje temperatura, gdje je t vrijeme mjereno u danima od početka boravka u bolnici i $T(t)$ temperatura mjerena u °C.

a) Izračunajte pacijentovu početnu temperaturu.
b) Kolika je pacijentova temperatura četvrtog dana boravka u bolnici?
c) Od kojeg do kojeg dana je pacijentova temperatura bila manja ili jednaka 37.5 °C?
d) Koliko dana je pacijentova temperatura bila iznad 40 °C?
e) Kojeg dana je temperatura pala ispod 37 °C?
f) Kolika je temperatura bila dvanaestog dana boravka u bolnici?
g) U kojem intervalu pacijentova temperatura konstantno opada?

RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

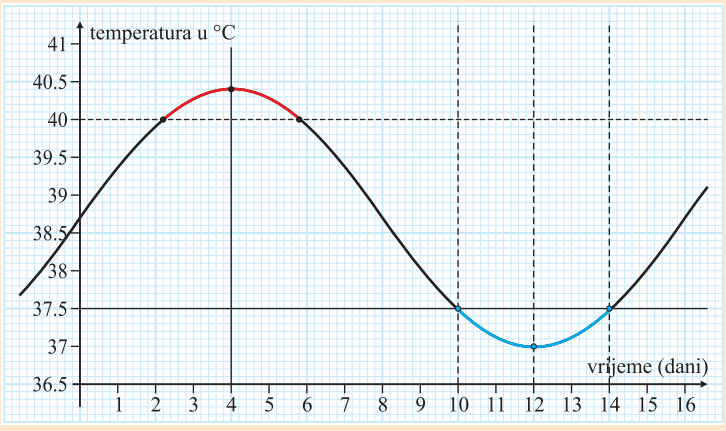
1. b **2.** d **3.** a **4.** a **5.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $x \in \langle 2+6k, 7+6k \rangle,\ k \in Z$ **2.** $x \in \left[\frac{4\pi}{3}+2k\pi, \frac{5\pi}{3}+2k\pi\right],\ k \in Z$ **3.** $x = \frac{7\pi}{6}+2k\pi,\ k \in Z$

4.1. $x \in \langle -\pi, 1\rangle \cup \langle 2, \pi\rangle$; **4.2.** $x \in \left[-\frac{2\pi}{3}, -\frac{\pi}{3}\right]$; **4.3.** $x \in \left\{-\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$;

5. a) 38.7 °C b) 40.4 °C c) Od desetog do četrnaestog dana.
d) 4 dana e) Ni jednog. f) 37 °C
g) Od četvrtog do dvanaestog dana.



2.7. Domena i slaganje funkcija. Inverzna funkcija

2.7.1. Domena funkcije

Domena realne **funkcije** je skup svih realnih brojeva za koje je zadana funkcija definirana, tj. za koje ima smisla. Zato se takva domena naziva prirodna domena ili prirodno područje definicije funkcije. Oznaka za domenu funkcije je $\mathcal{D}(f)$.

Primjer 1: Odredimo područje definicije funkcije:

a) $f(x) = 2x + 3$
b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$
c) $f(x) = 3^{2x+3}$
d) $f(x) = \sin 2x$.

Rješenje: a) $f(x) = 2x + 3$ je linearna funkcija i poznato je da možemo izračunati vrijednost za bilo koji realni broj bez ograničenja, znači $\mathcal{D}(f) = \boldsymbol{R}$.

b) $f(x) = x^2 - 2x + 3$ je kvadratna funkcija i kao i kod linearne $\mathcal{D}(f) = R$.

Obje funkcije su polinomi, a za sve polinome vrijedi da im je domena skup realnih brojeva.

c) $f(x) = 3^{2x+3}$ je eksponencijalna funkcija i znamo da kod eksponencijalne funkcije baza mora biti pozitivan realan broj, a za eksponent nema ograničenja. Zaključujemo kako je domena i ove funkcije skup $\boldsymbol{R}$.

d) $f(x) = \sin 2x$. Vrijednost funkcije sinus možemo izračunati za bilo koji realni broj, tako je domena i ove funkcije skup $\boldsymbol{R}$.

Sve četiri funkcije su elementarne funkcije.

Primjer 2: Odredimo područje definicije funkcije:

a) $f(x) = \dfrac{2}{5-x}$

b) $g(x) = \log_2(5-x)$

c) $h(x) = \sqrt{\dfrac{2}{5-x}}$

d) $k(x) = \dfrac{\sqrt{5+x}}{\log_2(5-x)}$.

Rješenje: a) Ovakvu funkciju nazivamo racionalna funkcija.

$f(x) = \dfrac{2}{5-x}$ ima smisla ako je nazivnik različit od nule.

Kako je $5 - x = 0$, za $x = 5$, prirodna domena bit će svi realni brojevi osim broja 5 i to zapisujemo $\mathcal{D}(f) = \boldsymbol{R} \setminus \{5\}$.

b) Ovo je logaritamska funkcija. Vrijednosti te funkcije možemo izračunati za sve pozitivne brojeve, znači $5-x>0 \Rightarrow x<5$, pa je prirodna domena skup svih realnih brojeva manjih od broja 5, $\mathcal{D}(g)=\langle -\infty, 5\rangle$.

c) Ovo je korijenska funkcija ili funkcija korjenovanja i ona ima smisla jedino ako je izraz pod korijenom pozitivan ili jednak nuli:

$$\frac{2}{5-x}\geq 0 \Rightarrow 2>0 \Rightarrow 5-x>0 \Rightarrow x<5.$$

Prirodna domena je skup svih realnih brojeva manjih od broja 5, $\mathcal{D}(h)=\langle -\infty, 5\rangle$.

d) Ova funkcija je kombinacija prethodnih triju funkcija, tako da moramo voditi računa o svim dijelovima. Odredit ćemo domenu posebno za svaku (koristeći prethodne zaključke).

$k_1(x)=\log_2(5-x)$ kao u b) primjeru $\mathcal{D}(k_1)=\langle -\infty, 5\rangle$, no ova logaritamska funkcija je u nazivniku, pa taj izraz ne smije biti jednak nuli

$\log_2(5-x)\neq 0 \Rightarrow 5-x\neq 2^0 \Rightarrow x\neq 4$, znači $x\in \boldsymbol{R}\setminus\{4\}$.

Nadalje, $k_2(x)=\sqrt{5+x}$ kao u c) primjeru

$5+x\geq 0 \Rightarrow x\geq -5$.

Rješavanjem sustava $\begin{cases} x<5 \\ x\geq -5 \\ x\neq 4 \end{cases}$ dobivamo domenu

$\mathcal{D}(k)=[-5,5\rangle\setminus\{4\}=[-5,4\rangle\cup\langle 4,5\rangle$.

Primjer 3: Odredimo područje definicije funkcije $f(x)=\log|x^2-3|$.

Rješenje: $|x^2-3|\geq 0$ za sve realne brojeve, a logaritamska funkcija ima smisla za sve pozitivne brojeve, znači da mora biti $|x^2-3|\neq 0$. Kako bismo to doznali, izračunat ćemo kada je $|x^2-3|=0$. Slijedi:

$x^2-3=0 \Rightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0 \Rightarrow x_1=\sqrt{3},\ x_2=-\sqrt{3}$.

Domena funkcije je $\mathcal{D}(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{-\sqrt{3},\sqrt{3}\}$.

Primjer 4: Odredimo područje definicije funkcije $f(x)=\sqrt{1-\sqrt{x}}$.

Rješenje: Korijen postoji za pozitivne realne brojeve i brojeve jednake nuli.

$1-\sqrt{x}\geq 0 \Rightarrow \sqrt{x}\leq 1\ /^2 \Rightarrow |x|\leq 1 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$

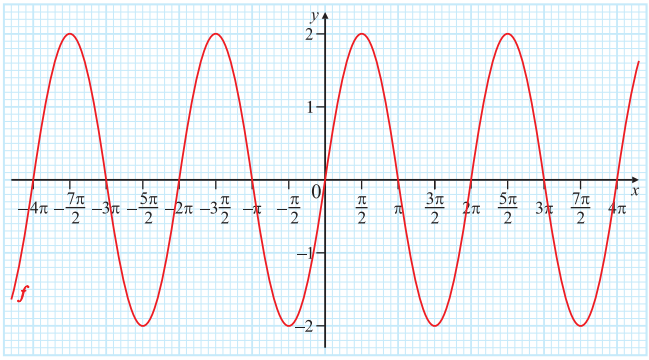
Postoji još jedan korijen, te postavljamo isti uvjet $x\geq 0$.

Rješenje ovog sustava nejednadžbi je $x\in[0,1]$, znači $\mathcal{D}(f)=[0,1]$.

Slika funkcije je skup svih vrijednosti funkcije. Za funkciju $f : A \to B$ slika funkcije je $\operatorname{Im} f = \{f(x) : x \in A\}$.

Primjer 5: Odredimo sliku funkcije:

a) $f(x) = 2x + 3$
b) $f(x) = 5$
c) zadane grafom (vidi sliku).



Rješenje: a) $f(0) = 3$, $f(5) = 13$, $f(-5) = -7$,… Vrijednost ove funkcije možemo izračunati za bilo koji realan broj, što znači da je domena funkcije skup realnih brojeva, a vrijednosti koje dobivamo također su svi realni brojevi, tako da je slika skup realnih brojeva, $\operatorname{Im} f = \boldsymbol{R}$.

b) $f(0) = 5$, $f(5) = 5$, $f(-10) = 5$,… Vrijednost ove funkcije, za bilo koji element domene, uvijek je 5, što znači da je slika ove funkcije $\operatorname{Im} f = \{5\}$.

c) Pogledamo li graf ove funkcije, vidimo da ona nigdje ne prelazi vrijednost veću od 2 niti manju od –2, pa možemo zaključiti da je njena slika $\operatorname{Im} f = [-2, 2]$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Područje definicije realne funkcije $f(x) = \log_4(-x^2 - 2x + 15)$ je:

a) $\langle -\infty, -5\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$
b) $\langle 1, 15\rangle$
c) $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 15, +\infty\rangle$
d) $\langle -5, 3\rangle$.

2. Područje definicije realne funkcije $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 5}{x^3 - 4x - 3x^2 + 12}$ je:

a) $\boldsymbol{R}$
b) $\boldsymbol{R} \setminus \{-4, -3, 12\}$
c) $\boldsymbol{R} \setminus \{-2, 2, 3\}$
d) $\boldsymbol{R} \setminus \{-4, -3\}$.

3. Područje definicije realne funkcije $f(x)=\log_2\left(x^2-9\right)+\dfrac{2x}{x^2+9x+20}$ je:

a) $\langle -3, 3\rangle$ b) $\langle -9, -3\rangle$

c) $\langle -\infty, -5\rangle \cup \langle -5, -4\rangle \cup \langle -4, -3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$ d) $\langle -5, -4\rangle$.

4. Područje definicije realne funkcije $f(x)=\sqrt{x^4-6x^2-27}$ je:

a) $\langle -3, 3\rangle$ b) $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$

c) $\langle -\infty, -3]\cup[3, +\infty\rangle$ d) $\langle -\infty, -\sqrt{3}\,]\cup[\sqrt{3}, +\infty\rangle$.

5. Odredite područje definicije funkcije $f(x)=\sqrt{\log\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}$.

a) $\langle 0, +\infty\rangle$ b) $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, +\infty\rangle$

c) $\langle -\infty, -1\rangle$ d) $\langle -1, 0\rangle$

6. Odredite domenu funkcije $f(x)=\log\left(1-x^2\right)^2$.

a) $\langle -1, 1\rangle$ b) $[-1, 1]$ c) $\boldsymbol{R}\setminus\{-1, 1\}$ d) $\boldsymbol{R}$

7. Što je domena funkcije $f(x)=\dfrac{2x^2}{x^2-9}$?

a) Svi realni brojevi osim 0. b) Svi realni brojevi osim 3.

c) Svi realni brojevi osim 3 i –3. d) Svi realni brojevi.

8. Što je domena funkcije $f(x)=\dfrac{3x^2}{x^2-49}$?

a) $\{x : x\in \boldsymbol{R},\ x\neq 7\}$ b) $\{x : x\in \boldsymbol{R},\ x\neq \pm 7\}$

c) $\{x : x\in \boldsymbol{R}\}$ d) $\{x : x\in \boldsymbol{R},\ x\neq 0\}$

9. Što je domena funkcije $f(x)=\dfrac{4x}{\sqrt{x-4}}$?

a) $x > 0$ b) $x < 4$ c) $x \geq 4$ d) $x > 4$

10. Domena funkcije $f(x)=\ln(x^2)+1$ je:

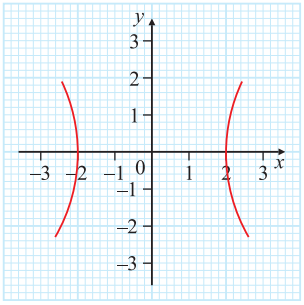
a) $\boldsymbol{R}\setminus\{0\}$ b) $\langle -1, +\infty\rangle$ c) $\boldsymbol{R}$ d) $\langle 0, +\infty\rangle$

11. Domena funkcije $f : D\to \boldsymbol{R}$, $f(x)=\ln\left(|x-3|\right)+6$ je:

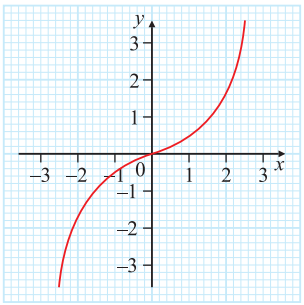
a) $\boldsymbol{R}\setminus\{3\}$ b) $\langle 3, +\infty\rangle$ c) $\boldsymbol{R}$ d) $\langle 3, +\infty\rangle$.

12. Koji od zadanih grafova nije funkcija?

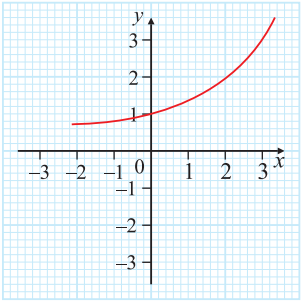
a)



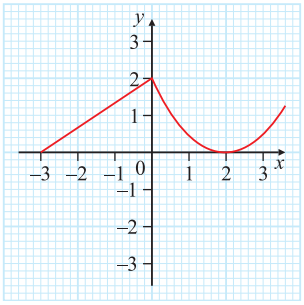
b)



c)

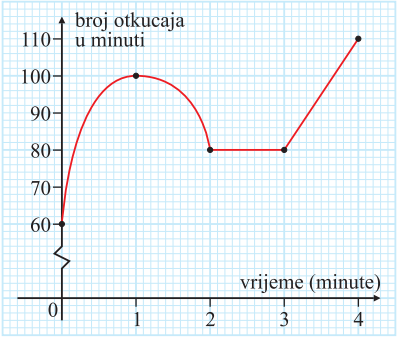


d)



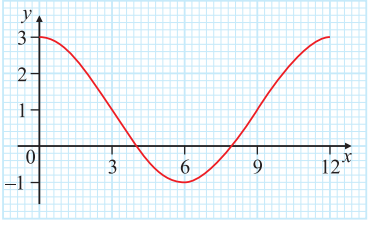
13. Graf pokazuje broj otkucaja srca u minuti za trkača tijekom 4 minute. Koji interval je slika ove funkcije?

a) $[0,4]$ b) $[1,4]$ c) $[0,110]$ d) $[60,110]$



14. Graf na slici prikazuje funkciju f. Koji je od zadanih podataka točan za funkciju f?

	amplituda	slika
a)	2	$[0,12]$
b)	2	$[-1,3]$
c)	4	$[-1,3]$
d)	3	$[-1,3]$



15. Koja je relacija točna za sve realne brojeve?

a) $|x-1|>0$ b) $|x-1|>(x-1)$

c) $\sqrt{x^2}=x$ d) $\sqrt{x^2}=|x|$

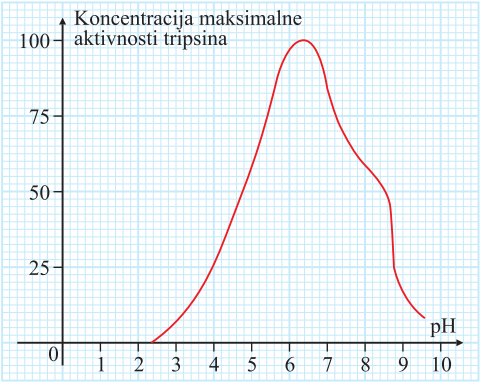
16. Podaci sakupljeni tijekom istraživanja prikazani su na slici. Slika ove funkcije je:

a) $2.5 \le y \le 9.5$

b) $2.5 \le x \le 9.5$

c) $0 \le y \le 100$

d) $1 \le x \le 10$.



17. Koja relacija predstavlja funkciju?

a) $xy=7$ b) $x=7$ c) $x^2-y^2=7$ d) $x^2+y^2=7$

2.7.2. Slaganje (kompozicija) funkcija

Funkcije mogu biti jednostavne ($f(x)=3x$, $g(x)=3^x$, $h(x)=\cos x$) ili složene ($g_1(x)=3^{3x}$, $h_1(x)=\cos(3x)$). Primjerice, funkcija $g_1(x)=3^{3x}$ sastoji se od dviju funkcija, f i g, funkcija $h_1(x)=\cos(3x)$ sastoji se od dviju funkcija, f i h. Tako je $g_1(x)=g(f(x))$, a $h_1(x)=h(f(x))$. Kažemo da je funkcija g_1 kompozicija funkcija f i g, a h_1 kompozicija funkcija f i h.

Ako su zadane funkcije $f: A \to B$ i $g: B \to C$, **kompozicija funkcija** f i g je funkcija $g \circ f: A \to C$ za koju vrijedi $\boldsymbol{(g \circ f)(x)=g(f(x))}$.

Primjer 6: Odredimo kompozicije funkcija $f \circ g$ i $g \circ f$, ako su

$$f(x)=\frac{1-x}{x},\quad g(x)=x+1.$$

Rješenje: Kako bismo izračunali kompoziciju funkcija f i g uvrstimo u funkciju f, umjesto x, $x+1$.

$$(f \circ g)(x)=f(g(x))=f(x+1)=$$

$$=\frac{1-(x+1)}{x+1}=\frac{1-x-1}{x+1}=-\frac{x}{x+1}$$

$$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g\left(\frac{1-x}{x}\right)=\frac{1-x}{x}+1=\frac{1-x+x}{x}=\frac{1}{x}$$

Kompozicija funkcija nije komutativna, $f \circ g \neq g \circ f$.

Primjer 7: Ako je $f(x)=\sin x$, $g(x)=10^x$, koliko je

$$(g\circ f)\left(\frac{3\pi}{2}\right)+(f\circ g)\left(\log\frac{\pi}{2}\right)-1?$$

Rješenje: Odredimo zadane kompozicije.

$$(g\circ f)\left(\frac{3\pi}{2}\right)=g\left(f\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)=g\left(\sin\frac{3\pi}{2}\right)=g(-1)=10^{-1}=\frac{1}{10}$$

$$(f\circ g)\left(\log\frac{\pi}{2}\right)=f\left(g\left(\log\frac{\pi}{2}\right)\right)=$$

$$=f\left(10^{\log\frac{\pi}{2}}\right)=f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin\frac{\pi}{2}=1$$

$$(g\circ f)\left(\frac{3\pi}{2}\right)+(f\circ g)\left(\log\frac{\pi}{2}\right)-1=\frac{1}{10}+1-1=\frac{1}{10}.$$

Primjer 8: Riješimo jednadžbu $(g\circ f)(x)=3$, ako su $g(x)=3x+2$, $f(x)=\sqrt{5-x}$.

Rješenje: Odredimo zadanu kompoziciju.

$$(g\circ f)(x)=g\left(f(x)\right)=g\left(\sqrt{5-x}\right)=3\sqrt{5-x}+2$$

Izjednačimo kompoziciju s 3 i riješimo jednadžbu.

$$3\sqrt{5-x}+2=3 \;\Rightarrow\; 3\sqrt{5-x}=1/:3$$

$$\sqrt{5-x}=\frac{1}{3}\Big/^2 \;\Rightarrow\; |5-x|=\frac{1}{9}$$

$$5-x=\frac{1}{9} \;\Rightarrow\; x_1=\frac{44}{9}$$

$$5-x=-\frac{1}{9} \;\Rightarrow\; x_2=\frac{46}{9}$$

S obzirom da je domena funkcije f skup svih realnih brojeva manjih ili jednakih 5, broj $\frac{46}{9}$ ne može biti rješenje naše jednadžbe.

Primjer 9: Ako je $(g\circ f)(x)=2|x|$, te $f(x)=\log(x+3)$, odredimo $g(x)$.

Rješenje: $(g\circ f)(x)=2|x| \;\Rightarrow\; g\left(f(x)\right)=2|x| \;\Rightarrow\; g\left(\log(x+3)\right)=2|x|$

Uvodimo supstituciju:

$\log(x+3)=t \;\Rightarrow\; x+3=10^t \;\Rightarrow\; x=10^t-3$

i dobivamo traženu funkciju $g(t)=2|10^t-3|$, odnosno zamjenom za x, $g(x)=2|10^x-3|$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

18. Za funkcije $f(x)=\frac{x}{2+x}$ i $g(x)=\sqrt{x}-2$, $(f\circ g)(x)$ jednako je:

a) $1-2x^{-0.5}$ b) $1+2x^{-0.5}$ c) $1-2x^{0.5}$ d) $1+2x^{0.5}$.

19. Ako je $f(x)=\left[2(x-2)\right]^2$ i $g(x)=\log_3(2x)$, tada je $(f\circ g)\left(\frac{9}{2}\right)$ jednako:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

20. Za funkcije $f(x)=\frac{1+x}{2+x}$ i $g(x)=(x-1)^{-1}$, $(g\circ f)(2)$ jednako je:

a) –2 b) – 4 c) –6 d) –8.

21. Za funkcije $f(x)=x^2-3x+1$ i $g(x)=\frac{1}{x}$, $(g\circ f)(3)$ jednako je:

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7.

22. Za funkcije $f(x)=x-1$ i $g(x)=\log_2 x$, $(f\circ g)(4)$ jednako je:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

23. Ako je $f(x)=x^2$ i $g(x)=2x+1$, koji je izraz ekvivalentan $(f\circ g)(x)$?

a) $2x^2+1$ b) $2(x+1)^2$ c) $4x^2+1$ d) $4x^2+4x+1$

24. Ako je $f(x)=x+1$ i $g(x)=x^2-1$, izraz $(g\circ f)(x)$ je jednak 0 kada je x jednak:

a) 1 i –1 b) 0 c) –2 d) 0 i –2.

25. Ako je $f(x)=-2x+7$ i $g(x)=x^2-2$, tada je $f(g(3))$ jednako:

a) –7 b) –3 c) –1 d) 7.

26. Ako je $f(x)=2x^2+4$ i $g(x)=x-3$, koji broj zadovoljava jednadžbu $f(x)=(f\circ g)(x)$?

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{4}$ c) 5 d) 4

27. Ako je $f(x)=x^2+2x-3$ i $g(x)=e^{2x+3}$, tada je $f(g(x))$ dano s:

a) $e^{4x+6}+2e^{2x+3}-3$ b) $2x^2+4x-6$

c) e^{2x^2+4x+9} d) e^{2x^2+4x-3}.

2.7.3. Inverzna funkcija

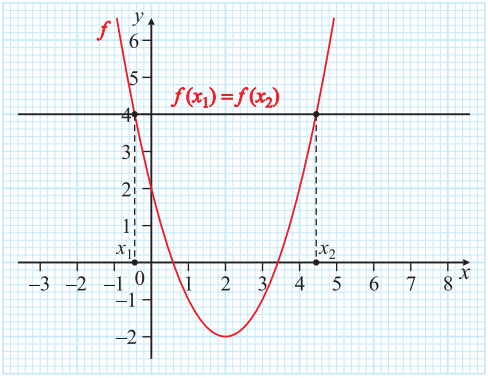
Kažemo da je funkcija $f : A \to B$ **injekcija,** ako za svaki $x_1, x_2 \in D$ vrijedi $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$ (injekcija različitim brojevima pridružuje različite vrijednosti). Test za ispitivanje injektivnosti funkcije naziva se **horizontalni test:** – svaka paralela s x-osi siječe graf injektivne funkcije u najviše jednoj točki.

Kažemo da je funkcija $f : A \to B$ **surjekcija** ako za svaki $y \in \boldsymbol{R}$ postoji $x \in D$ takav da je $f(x) = y$.

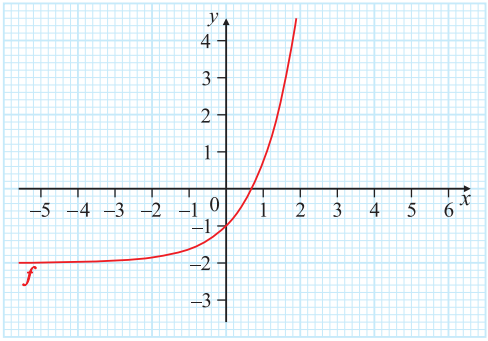
Kažemo da je funkcija $f : A \to B$ **bijekcija** ako je injekcija i surjekcija.

Primjer 10: Promotrimo grafove sljedećih funkcija. Koja od funkcija je injekcija? Koja od funkcija je surjekcija? Koja od funkcija je bijekcija?

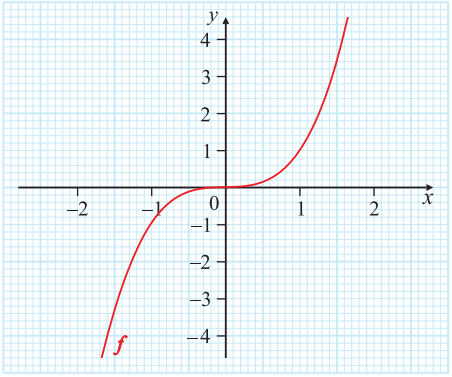
a) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$



b) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$



c) $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$



Rješenje: a) Funkcija nije injekcija jer dva različita elementa domene preslikava u isti element kodomene, $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$. Funkcija nije surjekcija jer se kodomena i slika funkcije razlikuju, $R(f) = \boldsymbol{R}$, $\text{Im}(f) = \langle -2, +\infty \rangle$, odnosno za, primjerice, $y = -4$ ne postoji x tako da je $f(x) = -4$. Funkcija nije bijekcija.

b) Funkcija je injekcija jer se različiti elementi domene preslikavaju u različite elemente kodomene, ali nije surjekcija jer se kodomena i slika funkcije razlikuju, $R(f) = \boldsymbol{R}$, $\text{Im}(f) = \langle -2, +\infty \rangle$, odnosno za, primjerice, $y = -3$ ne postoji x tako da je $f(x) = -3$. Funkcija nije bijekcija.

c) Funkcija je injekcija i surjekcija, znači i bijekcija.

Ako u primjerima a) i b) kodomenu funkcije ($\boldsymbol{R}$) smanjimo na sliku funkcije ($\langle -2, +\infty \rangle$), tada je funkcija f surjektivna na tom skupu ($f : \boldsymbol{R} \to \langle -2, +\infty \rangle$).

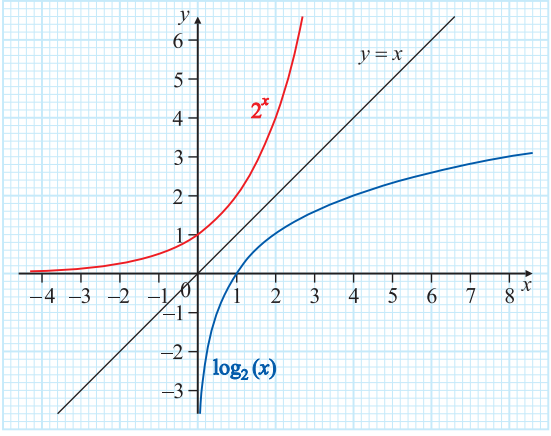
Neka je $f : A \to B$ bijektivna funkcija, tada za svaki y iz kodomene postoji točno jedan x iz domene za koji je $f(x) = y$. Funkciju koja preslikava y u x zovemo **inverzna funkcija** i označavamo sa $f^{-1} : B \to A$. Ako je $f(x) = y$, onda je $f^{-1}(y) = x$, tj.

$$x \underset{f^{-1}(y) = x}{\overset{f(x) = y}{\rightleftarrows}} y$$

Grafovi međusobno inverznih funkcija simetrični su s obzirom na pravac $y = x$.

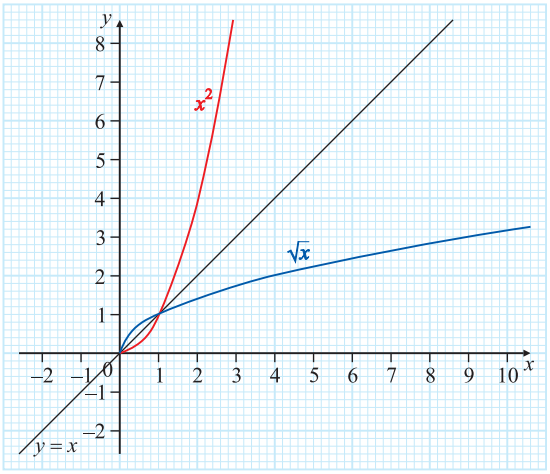
Primjeri inverznih funkcija

a) $f(x) = 2^x$, $f^{-1}(x) = \log_2 x$



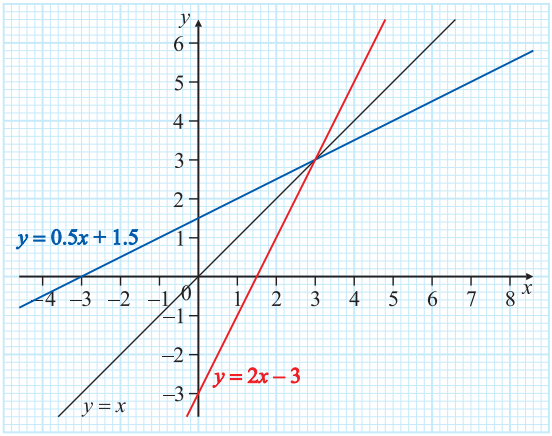
$f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}^+$, $f^{-1} : \boldsymbol{R}^+ \to \boldsymbol{R}$

b) $f(x)=x^2,\ f^{-1}(x)=\sqrt{x},\ x\geq 0$



$f:\boldsymbol{R}_0^+\to\boldsymbol{R}_0^+,\ f^{-1}:\boldsymbol{R}_0^+\to\boldsymbol{R}_0^+$

c) $f(x)=2x-3,\ f^{-1}(x)=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$



$f:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R},\ f^{-1}:\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$

Primjer 11: Odredimo inverzne funkcije zadanih funkcija.

a) $f(x)=\frac{2x+1}{2x-3}$ b) $f(x)=2\log_3(x-1)+4$

Rješenje: a) Funkcija f broj x preslikava u broj $\frac{2x+1}{2x-3}$, te možemo zapisati $y=\frac{2x+1}{2x-3}$. Inverzna funkcija f^{-1} broj y preslikava natrag u broj x, pa iz formule $y=\frac{2x+1}{2x-3}$ treba izraziti x.

$$y = \frac{2x+1}{2x-3}$$
$$y(2x-3) = 2x+1$$
$$2xy - 3y = 2x+1$$
$$2xy - 2x = 3y+1$$
$$x(2y-2) = 3y+1$$
$$x = \frac{3y+1}{2y-2}$$

Znači $f^{-1}(y) = \frac{3y+1}{2y-2}$.

Uobičajeno je funkcije zapisivati s varijablom x, pa ćemo inverznu funkciju zapisati ovako: $f^{-1}(x) = \frac{3x+1}{2x-2}$.

b) Označimo $y = 2\log_3(x-1)+4$ i odredimo x.

$$y-4 = 2\log_3(x-1)$$
$$\frac{y-4}{2} = \log_3(x-1)$$
$$3^{\frac{y-4}{2}} = x-1$$
$$x = 3^{\frac{y-4}{2}} + 1$$

Dakle, $f^{-1}(y) = 3^{\frac{y-4}{2}} + 1$, odnosno $f^{-1}(x) = 3^{\frac{x-4}{2}} + 1$.

Primjer 12: Ako je $f(x) = 2^{\frac{x-1}{2}} + 1$, koliko je $f^{-1}(3)$?

Rješenje: Broj $f^{-1}(3)$ je broj x iz domene funkcije f koji ona preslikava u broj $y = 3$. Zato je $f^{-1}(3)$ rješenje jednadžbe $f(x) = 3$.

$$2^{\frac{x-1}{2}} + 1 = 3$$
$$2^{\frac{x-1}{2}} = 2^1$$
$$\frac{x-1}{2} = 1$$
$$x-1 = 2$$
$$x = 3$$

$f^{-1}(3)$ mogli smo izračunati tako da prvo odredimo inverznu funkciju $f^{-1}(x)$, a zatim uvrstimo $x = 3$.

Primjer 13: Ako je $f^{-1}(2x+1)=\log_2(x+1)$, koliko je $f(3)$?

Rješenje: Odredimo $f^{-1}(x)$. Uvedimo zamjenu $2x+1=t \Rightarrow x=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}$.

$$f^{-1}(t)=\log_2\left(\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}+1\right)$$

$$f^{-1}(t)=\log_2\left(\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}\right)$$

$$f^{-1}(y)=\log_2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)$$

Znamo da je $f^{-1}(y)=x$, pa će se računanje $f(3)$ svesti na rješavanje jednadžbe.

$$3=\log_2\left(\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}\right)$$

$$2^3=\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}$$

$$8-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y$$

$$\frac{15}{2}=\frac{1}{2}y$$

$$y=15$$

Vrijednost $f(3)=15$.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Odredite skup svih realnih brojeva za koje je definirana funkcija $f(x)=\log(3x-1)$.

2. (IK 2009.) Zadane su funkcije $f(x)=\frac{2}{x+5}$ i $g(x)=3x+1$. Koliko je $(f\circ g)(3)$?

a) $\frac{2}{15}$ b) $\frac{1}{15}$ c) $\frac{1}{4}$ d) $\frac{7}{4}$

3. (IK 2009.) Odredite domenu funkcije:

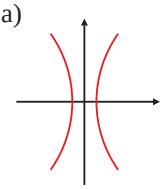
a) $f(x)=\frac{1}{x-7}$

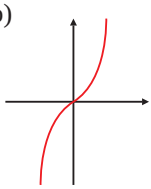
b) $g(x)=\log_5(x-4)$

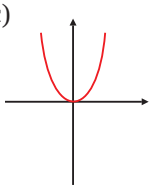
c) $h(x)=\frac{\log_5(x-4)}{x-7}$.

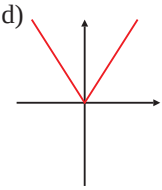
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

28. Koja je od funkcija sa slike bijekcija?

a) 

b) 

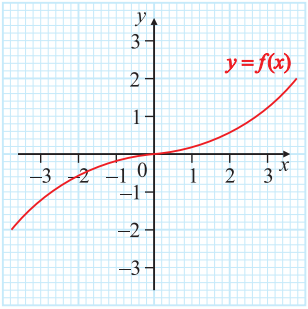
c) 

d) 

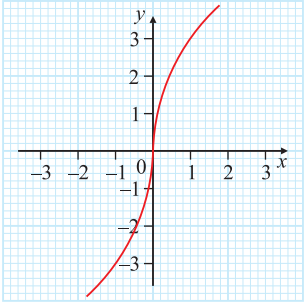
29. Koja je funkcija inverzna funkciji $y = 2x - 3$?

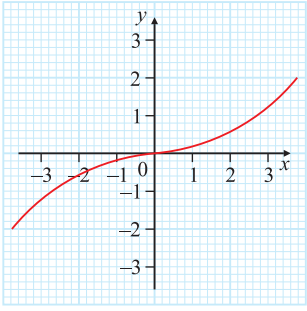
a) $y = \frac{x+3}{2}$ b) $y = \frac{x}{2} + 3$ c) $y = -2x + 3$ d) $y = \frac{1}{2x-3}$

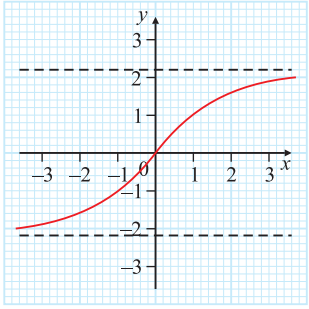
30. Graf funkcije $y = f(x)$ prikazan je na slici.

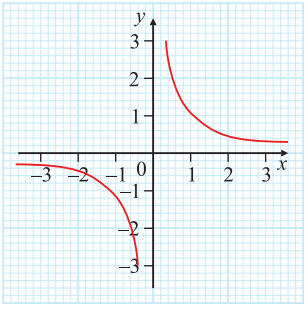


Koji je od sljedećih grafova slika inverzne funkcije?

a) 

b) 

c) 

d) 

31. Inverzna funkcija funkcije $f(x) = -\frac{2x-3}{4-3x}$ je:

a) $f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{2+3x}$ b) $f^{-1}(x) = \frac{3-4x}{2-3x}$

c) $f^{-1}(x) = \frac{3+4x}{2+3x}$ d) $f^{-1}(x) = \frac{3+4x}{2-3x}$.

32. Ako je inverzna funkcija $f^{-1}(x) = \frac{3^x+21}{3}$, tada je $f(10)$ jednako:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

33. Za funkciju $f(x) = \sqrt{1-x^3}$, inverzna funkcija $f^{-1}(3)$ je:

a) –1 b) 1 c) –2 d) 2.

34. Ako je $f(2x + 4) = 18 \cdot 3^x - 1$, tada je $f^{-1}(5)$ jednako:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

35. Ako je $f^{-1}(x) = \frac{3-2x}{x-2}$, tada je $f(\sqrt{3})$ jednako:

a) $-\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ c) $2\sqrt{3}$ d) $3\sqrt{3}$.

36. Ako je $f^{-1}(x) = \log_2(-x + 2) - 1$, tada je $f(2)$ jednako:

a) –2 b) –4 c) –6 d) –8.

37. Za funkciju $f(x) = (2x + 3)^{-1}$, inverzna funkcija $f^{-1}(x)$ je:

a) $(2x)^{-1} - 6$ b) $(2x)^{-1} + 6$ c) $(2x)^{-1} - 3 \cdot 2^{-1}$ d) $(2x)^{-1} + 3 \cdot 2^{-1}$.

38. Ako je $f^{-1}(x+1) = \frac{3x+6}{1-x}$, tada je $f(1)$ jednako:

a) 1 b) –1 c) –0.5 d) –0.25.

39. Odredite $(f \circ f^{-1})(5)$.

a) 0 b) 5

c) –5 d) Ne može se odrediti.

40. Koja je od sljedećih tvrdnji uvijek točna?

a) $f(g(x)) = g(f(x))$ b) $f(f(x)) = (f(x))^2$

c) $f(g(x)) = (f \circ g)(x)$ d) $f(g(x)) = (f)(x) \cdot g(x)$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite domene zadanih funkcija.

a) $f(x)=\log_2\left(16x-x^3\right)$

b) $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\log(x-1)}}$

c) $f(x)=\dfrac{2x-3}{x^2+2x-15}$

d) $f(x)=\left(x^3+2x^2-x-2\right)^{-1}$

e) $f(x)=\sqrt{2-|x|}$

f) $f(x)=\log\left|x^2-3\right|$

2. Odredite sliku funkcija.

a) $f(x)=2^x$

b) $f(x)=-3\cos\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$

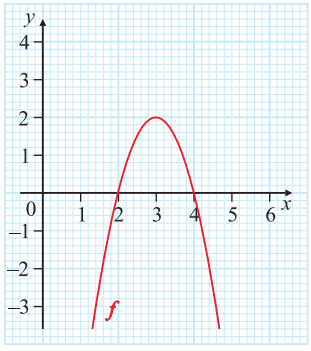
c) $f:\left[\dfrac{\pi}{8},\dfrac{\pi}{3}\right]\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2\sin(2x)$

d) $f(x)=10+5\sin\left(\dfrac{\pi}{24}x\right)$

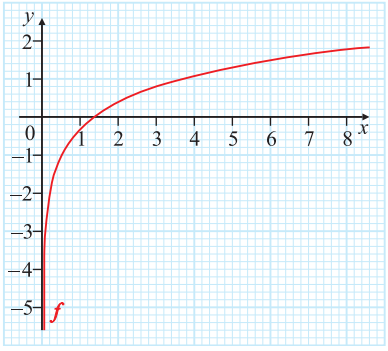
e) $f:[0,+\infty\rangle\to\boldsymbol{R},\ f(x)=2e^{-x}$

3. Odredite slike funkcija.

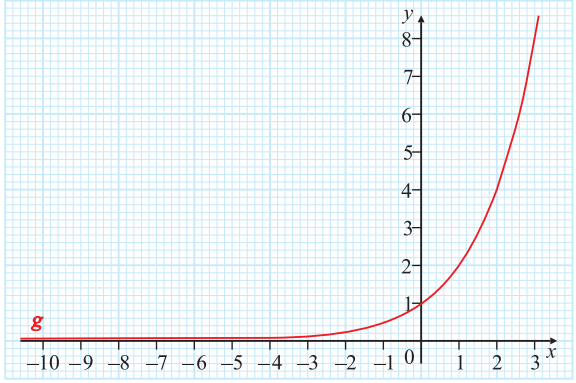
a)



b)



c)



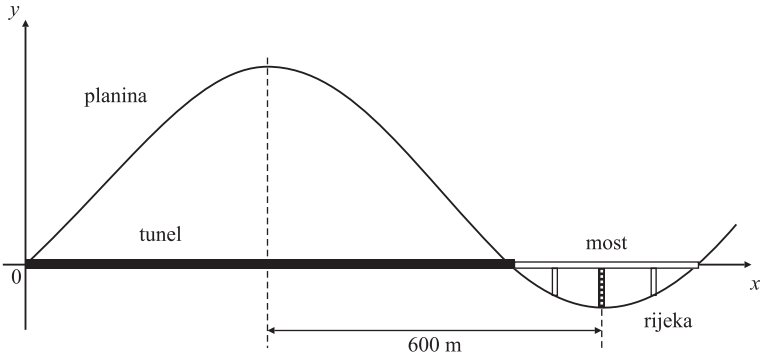
4. Broj ljudi (y) koji su u zajednici uključeni u recikliranje modelira se prema funkciji $y = 90\sqrt{3x} + 400$, gdje je x broj mjeseci od kad je postrojenje za reciklažu otvoreno.

a) Izračunajte tablicu vrijednosti, skicirajte graf funkcije i nađite broj ljudi uključenih u recikliranje točno 3 mjeseca nakon otvorenja postrojenja.
b) Nakon koliko mjeseci će 940 ljudi biti uključeno u recikliranje?
c) Odredite domenu zadane funkcije.
d) Odredite sliku zadane funkcije.

5. Visina koju postiže projektil nakon lansiranja modelira se prema jednadžbi $y = -0.5x^2 + 9.5x + 2.5$, gdje je x vrijeme u sekundama, a y visina u metrima.

a) U kojem je vremenskom razdoblju, do najbliže desetinke sekunde, projektil najmanje 38 metara iznad zemlje?
b) Što je domena ove funkcije (gledajući realnu situaciju)?
c) Što je slika ove funkcije (gledajući realnu situaciju)?
d) Kojoj skupini funkcija pripada ovaj model?
e) Nakon koliko vremena projektil počinje padati?
f) Koju najveću visinu postiže projektil?

6. Uprava hidrocentrale predlaže izgradnju cjevovoda koji će prolaziti kroz novi tunel i preko mosta. Slika prikazuje presjek predložene dionice kroz tunel i most preko rijeke u kojem će biti cijevi.



Granice presjeka mogu se modelirati funkcijom $y = 100\cos\left[\frac{\pi(x-400)}{600}\right] + 50,\ 0 \le x \le 1\,600$, gdje je y visina u metrima, od razine mosta, a x udaljenost u metrima od točke O gdje počinje tunel.

a) Kolika je visina vrha planine (u metrima) u odnosu na razinu mosta?
b) Koliko je metara ispod mosta korito rijeke?
c) Kolika je duljina tunela?
d) Kolika je duljina mosta?
e) Kolika bi bila duljina tunela da je sagrađen 20 metara više u odnosu na razinu mosta?
f) Ako cijenu ovog projekta u (stotinama tisuća kuna) računamo tako da zbrojimo kvadrate duljina mosta i tunela, koja bi cijena bila povoljnija: početna ili iz zadatka e)?

7. U siječnju 1980. godine broj stanovnika Zagreba rastao je u skladu s matematičkim modelom $y = 720\,500 \cdot (1.022)^x$, gdje je x broj godina od siječnja 1980. godine.

a) Objasnite značenje brojeva 720 500 i 1.022 u ovom matematičkom modelu.
b) Ako se nastavio ovakav trend rasta, koliko je stanovnika imao Zagreb 2010. godine?
c) Koje godine će u Zagrebu biti 1 548 800 stanovnika?
d) Što bi bila slika funkcije, gledajući realnu situaciju?
e) Što bi bila domena ove funkcije?

8. Ako je $f(x) = \ln x$ i $g(x) = x + 2$, odredite $(f \circ g)(x)$ i $(g \circ f)(x)$, te sve četiri funkcije nacrtajte u istom koordinatnom sustavu. Koja zajednička svojstva primjećujete?

9. Ako je $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$, riješite jednadžbu $f(f(x)) = 3x - 2$.

10. Neka su dane funkcije:

$$f(x) = -\sin\frac{x}{4} \cdot \cos\frac{x}{4},\ g(x) = \sin^2\left(\frac{\pi x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\pi x}{2}\right).$$

a) Izračunajte $(g \circ f)\left(-\dfrac{31}{3}\pi\right)$.
b) Je li funkcija f parna?
c) Je li funkcija g parna?
d) Odredite period funkcije f.
e) Odredite period funkcije g.

11. Ako je $(g \circ f)(x) = x^2$ i $f(x) = 2x - 1$, odredite $g(x)$. Nacrtajte graf funkcije g.

12. Zadane su funkcije $g(x) = \log(2x - 3)$, $f(x) = \sqrt{6 - 3x}$.

a) Odredite domenu funkcije f.
b) Odredite domenu funkcije g.
c) Riješite jednadžbu $(f \circ g)(x) = 3$.

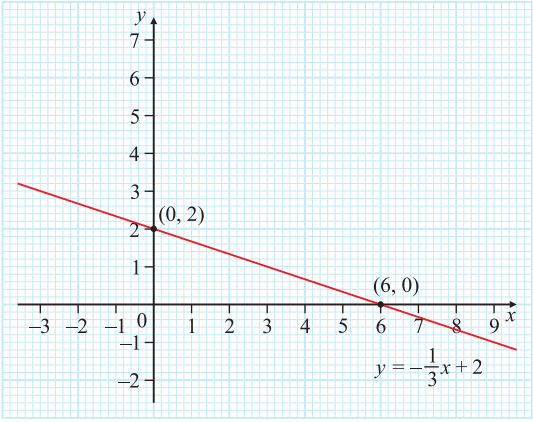
13. Određena vrsta lijeka pojačava rad srca pacijenta. Otkucaji srca u minuti su opisani pomoću funkcije $h(x) = 70 + 0.2x$, gdje je x količina lijeka u krvotoku (izražena u miligramima). Količina lijeka u pacijentovom krvotoku je funkcija vremena t (u satima) prikazana formulom $g(t) = 300 \cdot (0.8)^t$. Odredite vrijednost $h(g(4))$ broja otkucaja srca pacijenta u minuti, zaokružujući na najbliži cijeli broj.

14. Košarkaš baci loptu prema košu. Visina lopte iznad tla modelira se prema jednadžbi $y = -\dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{8}{3}x + \dfrac{3}{2}$, gdje y predstavlja visinu (u metrima), a x predstavlja vrijeme (u sekundama). Lopta je bačena s visine od 1.5 metra.

a) Nakon koliko sekundi će lopta ponovno biti na visini od 1.5 m?
b) Koja je najveća visina koju lopta može doseći?
c) Nakon koliko sekundi će lopta biti u visini koša (visina koša je 3.05 m)?
d) Na kojoj visini će biti lopta u drugoj sekundi ako prije toga nije pogodila koš?

15. Neka je $f(x) = 3 - x$ i $g(x) = x^2 - 1$.
a) Odredite funkciju $h(x) = (g \circ f)(x)$.
b) Nacrtajte graf funkcije h.
c) Odredite domenu i sliku funkcije h.
d) Odredite funkciju $k(x) = (f \circ g)(x)$.
e) Nacrtajte graf funkcije k u istom koordinatnom sustavu u kojem ste nacrtali graf funkcije h.
f) Odredite domenu i sliku funkcije k.
g) Na kojem intervalu su obje funkcije padajuće?
h) Koliko rješenja ima jednadžba $(f \circ g)(x) = (g \circ f)(x)$?

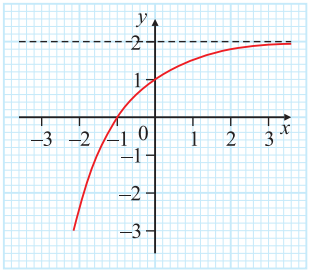
16. Zadan je graf funkcije $f(x) = -\frac{1}{3}x + 2$. U istom koordinatnom sustavu nacrtajte graf inverzne funkcije. Odredite koordinate istaknutih točaka na grafu inverzne funkcije.



17. Dana je funkcija $f(x) = e^{2x} - 1$.
a) Odredite inverznu funkciju funkcije f.
b) Nacrtajte graf funkcije $f\left(f^{-1}(x)\right)$.
c) Odredite $f\left(-f^{-1}(2x)\right)$.

18. Za funkciju $f(x) = 2\ln(x + 1)$
a) odredite inverznu funkciju
b) odredite domenu inverzne funkcije.

19. Dio grafa funkcije $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ f(x) = 2 - e^{-x}$ prikazan je u koordinatnom sustavu.



a) Odredite inverznu funkciju funkcije f.
b) Nacrtajte graf inverzne funkcije u istom koordinatnom sustavu.

20. Dana je funkcija $f(x) = \cos x$.

a) Izračunajte nultočke funkcije $f_1(x) = f(2x) + 1$.

b) Za koje vrijednosti $x \in \boldsymbol{R}$ funkcija $f_2(x) = \dfrac{1}{4\left(f(x)\right)^2 - 1}$ nije definirana?

c) Riješite jednadžbu $2\left(f(x)\right)^2 + f\left(\dfrac{\pi}{2} - 2x\right) = 2f(2x)$.

21. Zadane su funkcije $f(x) = 2^{-x}$ i $g(x) = x - 4$.

a) Odredite domenu i sliku obiju funkcija.
b) Odredite $(g \circ f)(x)$.
c) Odredite domenu i sliku funkcije $(g \circ f)(x)$.
d) Nacrtajte graf funkcije $(g \circ f)(x)$ te odredite intervale rasta, odnosno pada.
e) Nacrtajte graf funkcije $\left|(g \circ f)(x)\right|$ te odredite intervale rasta, odnosno pada.

22. Funkcija f je zadana sa $f(x-2) = \ln\dfrac{x-1}{e^2}$.

a) Odredite funkciju f.
b) Odredite domenu i sliku funkcije f.
c) Odredite inverznu funkciju.
d) Odredite domenu i sliku inverzne funkcije.
e) U istom koordinatnom sustavu nacrtajte grafove funkcije f i njene inverzne funkcije.
f) Odredite intervale rasta i pada funkcija f i f^{-1}.

23. Ako je $f(x) = x^5 - 32$, a $g(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{4}x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{4}x\right)$, koliko je $(g \circ f^{-1})(0)$?

24. Ako je $f(x) = \dfrac{x}{2}$, a $g(x) = -\cos x$, koliko je $g\left(f\left(-\dfrac{73\pi}{3}\right)\right)$?

25. Formula $T(\text{K}) = t(°\text{C}) + 273$ preračunava temperaturu izraženu u °C u K, a formula $t(°\text{C}) = \frac{5}{9}(°\text{F} - 32)$ preračunava temperaturu u stupnjevima Farenheita u temperaturu u °C.

a) Napišite kompoziciju funkcija koja će preračunavati °F u K.
b) Preračunajte temperaturu vrenja i smrzavanja vode u K.

26. Formulom $y = \frac{5}{9}(x - 32)$ dana je veza između temperatura izraženih u stupnjevima Farenheita i Celzijevim stupnjevima.

a) Odredite inverznu funkciju funkcije y.
b) Ako funkcija y preračunava °F u °C, hoće li inverzna funkcija preračunavati °C u °F?
c) Nacrtajte grafove obiju funkcija u istom koordinatnom sustavu.
d) Za koju temperaturu su i °F i °C jednaki?

27. Test iz matematike ima dodatno pitanje. Ako točno odgovorite na to pitanje, dobit ćete 5 dodatnih bodova i ukupan broj bodova vašeg testa bit će povećan za 7%. Neka je x ukupan broj bodova prije odgovora na dodatno pitanje.

a) Napišite funkciju $f(x)$ koja će predstavljati samo dodatnih 5 bodova vašim bodovima.
b) Napišite funkciju $g(x)$ koja predstavlja postotak povećanja bodova.
c) Objasnite značenje $f(g(x))$.
d) Odredite $f(g(75))$.
e) Objasnite značenje $g(f(x))$.
f) Odredite $g(f(75))$.
g) Je li u ovom slučaju $f(g(x)) = g(f(x))$?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. $x > \frac{1}{3}$ **2.** a **3.** a) $x \neq 7$ b) $x > 4$ c) $x \in \langle 4, 7\rangle \cup \langle 7, +\infty\rangle$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d	**2.** c	**3.** c	**4.** c	**5.** a	**6.** c	**7.** c	**8.** b
9. d	**10.** a	**11.** a	**12.** a	**13.** d	**14.** b	**15.** d	**16.** c
17. a	**18.** a	**19.** a	**20.** b	**21.** a	**22.** a	**23.** d	**24.** d
25. a	**26.** a	**27.** a	**28.** b	**29.** a	**30.** a	**31.** b	**32.** b
33. c	**34.** b	**35.** b	**36.** c	**37.** c	**38.** d	**39.** b	**40.** c

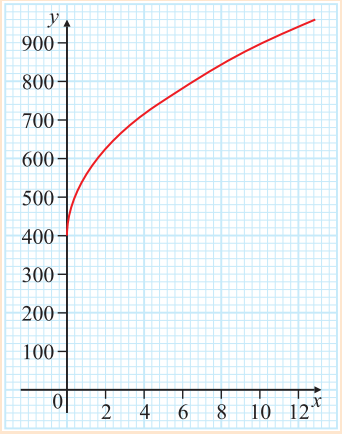
ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. a) $D = \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 0, 4 \rangle$ b) $D = \langle 2, +\infty \rangle$ c) $D = R \setminus \{-5, 3\}$
d) $D = R \setminus \{-2, -1, 1\}$ e) $D = [-2, 2]$ f) $D = R \setminus \{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\}$

2. a) $\text{Im } f = \langle 0, +\infty \rangle$ b) $\text{Im } f = [-3, 3]$ c) $\text{Im } f = [\sqrt{2}, \sqrt{3}]$
d) $\text{Im } f = [5, 15]$ e) $\text{Im } f = \langle 0, 2]$

3. a) $\text{Im } f = \langle -\infty, 2]$ b) $\text{Im } f = R$ c) $\text{Im } f = \langle 0, +\infty \rangle$

4. a)



	x	y
1	0	400
2	1	555.9
3	2	620.5
4	3	670
5	4	711.8
6	5	748.6
7	6	781.8
8	7	812.4
9	8	840.9
10	9	867.7
11	10	893
12	11	917
13	12	940

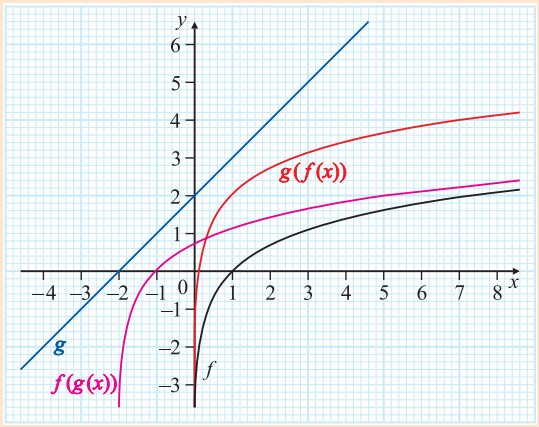
b) Nakon tri mjeseca u recikliranje je uključeno 670 ljudi, a nakon 12 mjeseci bit će uključeno 940 ljudi.
c) $D = R^+$.
d) $\text{Im } f = [400, +\infty \rangle$

5. a) Između 5 sekundi i 11 stotinki te 13 sekundi i 89 stotinki (uključujući ta vremena).
b) Domena bi bilo vrijeme od polijetanja do prizemljivanja, $x \in [0, 19.26]$.
c) Slika funkcije je visina projektila od polijetanja do prizemljivanja (maksimum funkcije), $y \in [0, 47.625]$
d) Ovo je kvadratna funkcija.
e) Nakon 9.5 sekundi.
f) Najveća visina je 47.625 metara.

6. a) 150
b) 50
c) 800
d) 400
e) 716
f) Povoljniji je iz zadatka e). Cijena početnog je 80 000 000 000 kuna, a iz zadatka e) 74 691 200 000 kuna.

7. a) Broj stanovnika Zagreba 1980. godine je 720 500, a broj 1.022 predstavlja stopu rasta od 2.2%.
b) 1 384 078 stanovnika
c) 2015. godine
d) Ako promatramo od 1980. godine, slika bi bila skup svih prirodnih brojeva većih ili jednakih od 720 500.
e) Ako promatramo od 1980. godine, domena i bila sve godine poslije 1980. godine.

8. $(f \circ g)(x) = \ln(x+2)$, $(g \circ f)(x) = \ln x + 2$

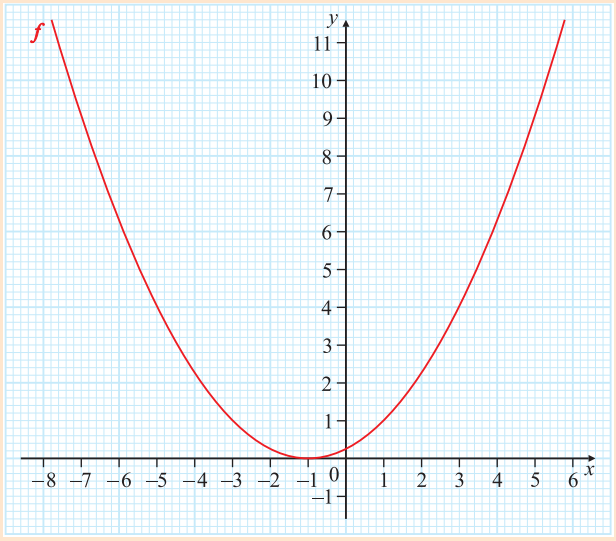


Funkcija $(f \circ g)(x)$ nastaje pomakom funkcije f za dva ulijevo, a funkcija $(g \circ f)(x)$ pomakom funkcije f za dva prema gore.

9. $x = 1$

10. a) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) neparna je c) da d) 4π e) 2

11. $g(x) = \left(\frac{x+1}{2}\right)^2$



12. a) $D(f) = \langle -\infty, 2]$

b) $D(g) = \left\langle \frac{3}{2}, \infty \right\rangle$

c) $(f \circ g)(x) = \sqrt{6 - 3\log(2x-3)}$, $x = \frac{31}{20}$

13. $h(g(4)) = 95$

14. a) Nakon 3 sekunde.
b) 3.5 m
c) Nakon 0.79 sekundi, odnosno nakon 2.21 sekunde.
d) Na visini od 3.28 m.

15. a) $(g \circ f)(x) = (x-3)^2 - 1$ b) i e)

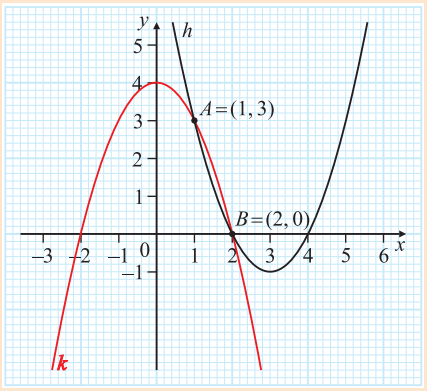
c) $D(h) = R,\ \mathrm{Im}(h) = \left[-1, +\infty\right\rangle$

d) $(f \circ g)(x) = 4 - x^2$

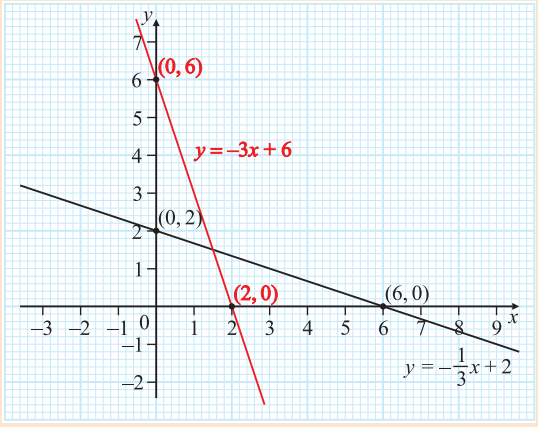
f) $D(k) = R,\ \mathrm{Im}(k) = \left\langle -\infty, 4\right]$

g) $\langle 0, 3\rangle$

h) dva, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$



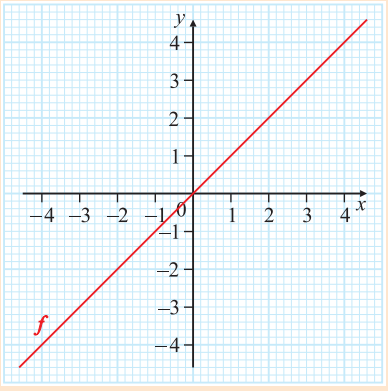
16.



17. a) $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}\ln(x+1)$

b) $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$

c) $f\left(-f^{-1}(2x)\right) = -\frac{2x}{2x+1}$

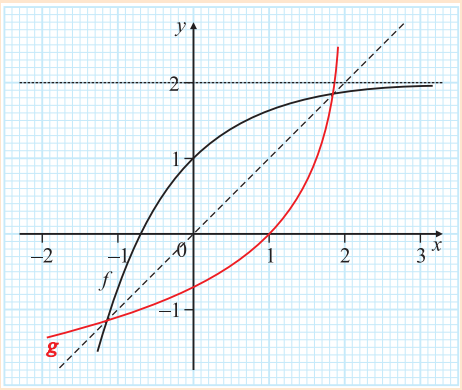


18. a) $f^{-1}(x) = e^{\frac{x}{2}} - 1$

b) $D\left(f^{-1}\right) = R$

19. a) $f^{-1}(x) = -\ln(2-x)$

b)



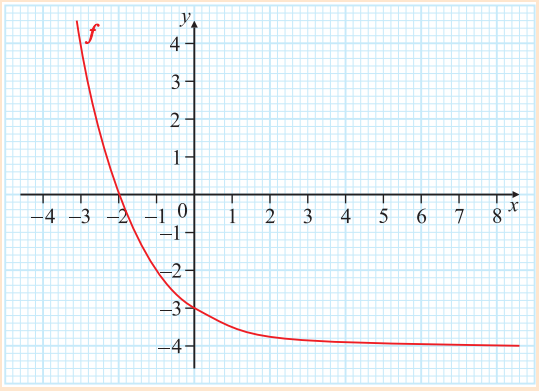
20. a) $\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ b) $\left\{\pm\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ \pm\frac{2\pi}{3} + 2k\pi\right\},\ k \in Z$ c) $\left\{k\pi,\ -\frac{\pi}{4} + k\pi\right\},\ k \in Z$

21. a) $D(f) = R,\ D(g) = R,\ \mathrm{Im}(f) = R^+,\ \mathrm{Im}(g) = R$

b) $(g \circ f)(x) = 2^{-x} - 4$

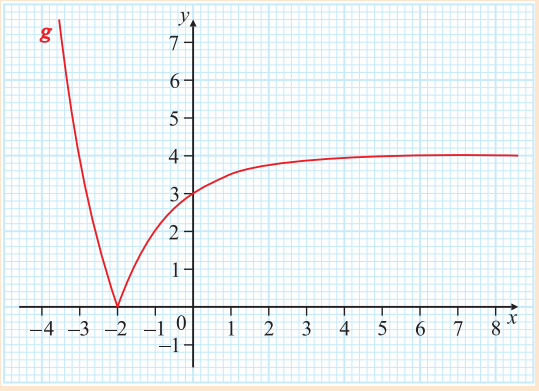
c) $D(g \circ f) = R,\ \mathrm{Im}(g \circ f) = \langle 4, +\infty \rangle$

d)



$(g \circ f)(x)$ pada na cijeloj domeni.

e)



$|(g \circ f)(x)|$ pada na $\langle -\infty, -2 \rangle$, a raste na $\langle -2, +\infty \rangle$

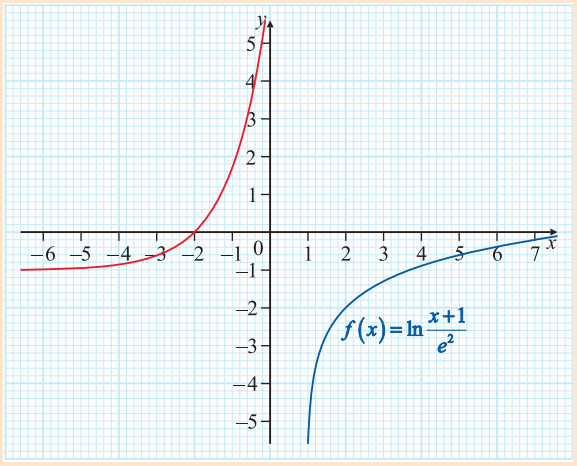
22. a) $f(x) = \ln \frac{x+1}{e^2}$

b) $D(f) = \langle -1, +\infty \rangle$, $\mathrm{Im}(f) = R$

c) $f^{-1}(x) = e^{x+2} - 1$

d) $D(f^{-1}) = R$, $\mathrm{Im}(f^{-1}) = \langle -1, +\infty \rangle$

e)



f) Funkcije f i f^{-1} rastu na svojim domenama.

23. 1

24. $-\frac{\sqrt{3}}{2}$

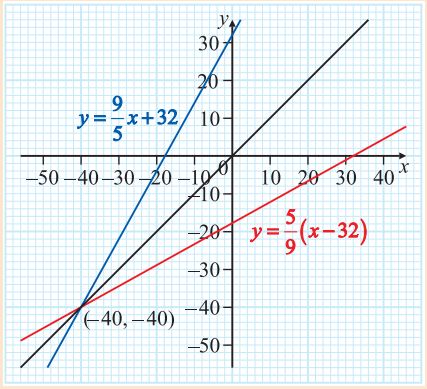
25. a) $T(\mathrm{K}) = \frac{5}{9}(°\mathrm{F} - 32) + 273$

b) Temperatura vrenja vode je 373 K, temperatura smrzavanja vode 273 K.

26. a) $y^{-1} = \frac{9}{5}x + 32$

b) Da.

c)



d) $(-40, -40)$

27. a) $f(x) = x + 5$

b) $g(x) = 1.07x$

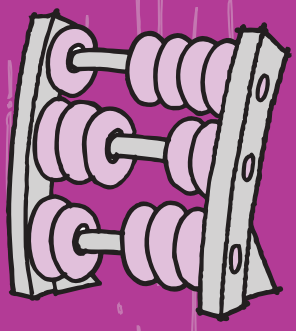
c) $f(g(x))$ znači da će za 7% biti uvećan vaš broj bodova i još će 5 dodatnih bodova biti dodano.

d) $f(g(75)) = 85.25$

e) $g(f(x))$ znači da će 5 bodova biti dodatno vašem broju bodova i onda će ukupan broj bodova biti povećan za 7%.

f) $g(f(75)) = 85.6$

g) Ne.



3. NIZOVI

3.1. Pojam niza

Niz u skupu S je svaka funkcija $a : \boldsymbol{N} \to S$ koja prirodnom elementu n pridružuje element $a(n) = a_n$ skupa S. Broj a_n nazivamo općim ili n-tim članom niza, a sam niz označavamo (a_n).

Primjeri

Nizovi zadani općim članom

– niz parnih prirodnih brojeva	$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N},\ a(n) = a_n = 2n$	2, 4, 6, 8,...
– niz višekratnika broja 5	$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N},\ a(n) = a_n = 5n$	5, 10, 15, 20,…
– niz brojeva koji pri dijeljenju sa 4 daju ostatak 3	$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N},\ a(n) = a_n = 4n - 1$	3, 7, 11, 15,…
– niz negativnih brojeva	$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z},\ a(n) = a_n = -n$	–1, –2, –3, – 4,…
– niz potencija baze $\frac{1}{2}$	$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Q},\ a(n) = a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},...$

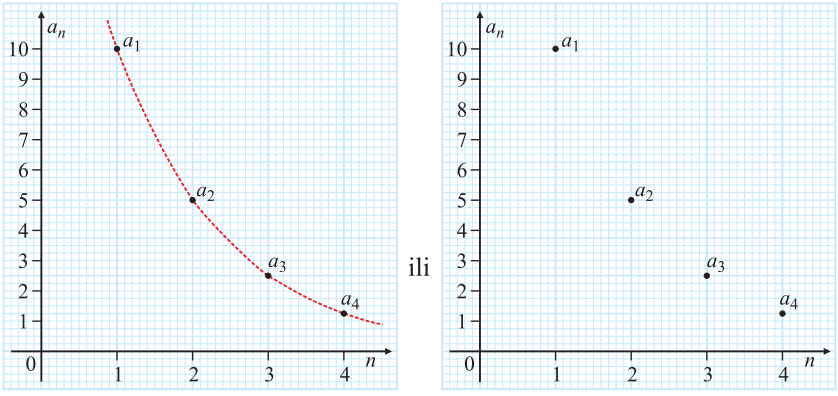
Niz može biti zadan i rekurzivnim formulama u kojima se članovi niza zadaju pomoću prethodnih članova.

Nizovi zadani rekurzivnim formulama

$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N},\ a(n) = a_n = a_{n-1} + a_{n-2},\ a_1 = 1,\ a_2 = 3$	1, 3, 4, 7, 11, 18,…
$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z},\ a(n) = a_n = a_{n-1} - a_{n-2},\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$	1, 2, 1, –1, –2, –1, 1,...
$a : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{Z},\ a(n) = a_n = a_{n-1} - a_{n-2}^2,\ a_1 = 1,\ a_2 = 2$	1, 2, 1, –3, – 4, –13,…

Niz još može biti zadan tablicom vrijednosti članova niza, grafički ili opisno.

Grafički zadan niz



Niz zadan tablicom

n	1	2	3	4	5	6
a_n	32	35	39	44	50	57

Niz zadan opisno
– niz prostih brojeva 2, 3, 5, 7, 11,…

Niz je monoton ako je rastući ili padajući.
Za niz (a_n) kažemo da je **rastući** ako za svaki n vrijedi $a_n \leq a_{n+1}$.
Za niz (a_n) kažemo da je **padajući** ako za svaki n vrijedi $a_n \geq a_{n+1}$.
Niz (a_n) je omeđen ako su svi članovi niza između dviju međa, odnosno ako postoje brojevi m i M takvi da za svaki n vrijedi $m < a_n < M$.

Primjer 1: Niz je definiran rekurzivnom formulom $a_n = a_{n-2} + a_{n-1}$, za $a_1 = 1$, $a_2 = 4$. Odredimo šesti član.

Rješenje: $a_1 = 1$, $a_2 = 4$
$a_3 = a_1 + a_2 = 1 + 4 = 5$
$a_4 = a_2 + a_3 = 4 + 5 = 9$
$a_5 = a_3 + a_4 = 5 + 9 = 14$
$a_6 = a_4 + a_5 = 9 + 14 = 23$

Primjer 2: Koji je sljedeći član niza 1, 3, 7, 15,…?

Rješenje: Odredimo rekurzivnu formulu po kojoj se računaju članovi niza.

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= 1 \\ a_2 &= a_1 + 2 = 3 \\ a_3 &= a_2 + 2^2 = 7 \\ a_4 &= a_3 + 2^3 = 15 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad a_n = a_{n-1} + 2^{n-1}, \text{za } a_1 = 1$$

Sljedeći član niza je $a_5 = a_4 + 2^4 = 15 + 16 = 31$.

Primjer 3: Što koncertna sezona dulje traje, manje ljudi dolazi na koncerte. Dana jednadžba predviđa tjednu posjećenost različitih koncerata:
$T_{n+1} = 0.8\ T_n + 1\ 000$, $T_1 = 12\ 000$,
gdje je T_n posjećenost u n-tom tjednu.
a) Koristeći jednadžbu, izračunajmo moguću posjećenost u trećem tjednu.
b) U kojem tjednu će posjećenost pasti ispod 6 000 posjetitelja?

Rješenje: a) $T_1 = 12\ 000$
$T_2 = 0.8\ T_1 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 12\ 000 + 1\ 000 = 10\ 600$
$T_3 = 0.8\ T_2 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 10\ 600 + 1\ 000 = 9\ 480$
b) $T_4 = 0.8\ T_3 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 9\ 480 + 1\ 000 = 8\ 584$
$T_5 = 0.8\ T_4 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 8\ 584 + 1\ 000 = 7\ 867$
$T_6 = 0.8\ T_5 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 7\ 867 + 1\ 000 = 7\ 293$
$T_7 = 0.8\ T_6 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 7\ 293 + 1\ 000 = 6\ 834$
$T_8 = 0.8\ T_7 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 6\ 834 + 1\ 000 = 6\ 467$
$T_9 = 0.8\ T_8 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 6\ 467 + 1\ 000 = 6\ 173$
$T_{10} = 0.8\ T_9 + 1\ 000 = 0.8 \cdot 6\ 173 + 1\ 000 = 5\ 938$
U desetom tjednu broj posjetitelja će biti manji od 6 000.

3.2. Aritmetički niz

Niz je aritmetički ako je razlika svakog člana i prethodnog člana stalna, tj. $a_n - a_{n-1} = d$, $n > 1$. Prvi član niza je a_1, drugi $a_2 = a_1 + d$, treći $a_3 = a_2 + d$ ili $a_3 = a_1 + 2d$, … općenito

$$a_n = a_{n-1} + d = a_1 + (n-1)\,d.$$

Zbroj prvih n članova niza je:

$$S_n = \frac{n}{2}\left(a_1 + a_n\right) = \frac{n}{2}\left(2a_1 + \left(n-1\right)d\right).$$

Za svaka tri uzastopna člana aritmetičkog niza vrijedi:

$$a_n - a_{n-1} = a_{n+1} - a_n \quad \Rightarrow \quad a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}.$$

Aritmetička sredina n brojeva je: $A = \dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$.

Primjer 1: Prvi član aritmetičkog niza je 3, a razlika d je 5. Odredimo osmi član i sumu prvih osam članova.

Rješenje: $a_1 = 3,\ d = 5 \quad \Rightarrow \quad a_8 = a_1 + 7d \quad \Rightarrow \quad a_8 = 3 + 7 \cdot 5 = 38$

$$S_8 = \frac{8}{2}(a_1 + a_8) = 4(3 + 38) = 4 \cdot 41 = 164$$

Primjer 2: Broj članova kluba čini aritmetički niz. U prvoj godini klub je imao 15 članova, a u trećoj 29. Koliko članova će klub imati u četvrtoj godini?

Rješenje: $a_1 = 15, \quad a_3 = a_1 + 2d \quad \Rightarrow \quad 29 = 15 + 2d$

$\Rightarrow \quad 2d = 14 \quad \Rightarrow \quad d = 7$

U četvrtoj godini klub će imati $a_4 = a_1 + 3d = 15 + 21 = 36$ članova.

Primjer 3: Koliko članova aritmetičkog niza $-3, 2, 7, \ldots$ trebamo zbrojiti da bismo dobili sumu niza 116?

Rješenje: Prvi član je $a_1 = -3$, a razlika $d = 7 - 2 = 5$. Suma prvih n članova je 116.

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)\,d\right)$$

$$116 = \frac{n}{2}\left(-6 + (n-1)\,5\right) / \cdot 2$$

$$232 = n\,(-6 + 5n - 5)$$

$$232 = 5n^2 - 11n$$

$$5n^2 - 11n - 232 = 0$$

$n_1 = 8, \quad \cancel{n_2 = -\frac{29}{5}}$ (n ne može biti negativan broj niti razlomak)

Potrebno je zbrojiti osam članova niza.

Primjer 4: U koncertnoj dvorani je 28 sjedala u prvom redu, 29 sjedala u drugom redu, 30 sjedala u trećem redu i po tom se pravilu povećava broj sjedala.
a) Koliko je sjedala u desetom redu?
b) U posljednjem redu je 70 sjedala. Koliko je redova u dvorani?
c) Koliko sveukupno ima sjedala u prvih 20 redova?

Rješenje: Brojevi sjedala u pojedinom redu predstavljaju aritmetički niz. Prvi član je $a_1 = 28$, a razlika $d = 1$. Opći član niza je $a_n = a_1 + (n-1)\,d$.

a) $a_{10} = a_1 + 9d = 28 + 9 = 37$

b) $a_n = 70,\ n = ?$

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d \quad \Rightarrow \quad 70 = 28 + (n-1)1$$
$$\Rightarrow \quad 42 = n - 1 \quad \Rightarrow \quad n = 43$$

c) $S_n = \frac{n}{2}\left(2a_1 + (n-1)\,d\right) \quad \Rightarrow \quad S_{20} = \frac{20}{2}\,(2 \cdot 28 + 19 \cdot 1) =$
$$= 10 \cdot 75 = 750$$

Primjer 5: Zbroj prvih n članova aritmetičkog niza jednak je $S_n = 2n^2 + 3n$. Odredimo dvanaesti član.

Rješenje: Iz formule za sumu članova aritmetičkog niza slijedi:

$S_1 = 2 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 = 2 + 3 = 5 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 5$

$S_2 = 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot 2 = 8 + 6 = 14 \quad \Rightarrow \quad S_2 = a_1 + a_2$

$\Rightarrow \quad 14 = a_1 + a_2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 14 - 5 = 9$

Razlika članova niza je $d = a_2 - a_1 = 9 - 5 = 4$.

Dvanaesti član niza je $a_{12} = a_1 + (12-1)\,d = 5 + 11 \cdot 4 = 49$.

Primjer 6: Zbroj sedam uzastopnih prirodnih brojeva je 70. Odredimo koji su to brojevi.

Rješenje: Niz prirodnih brojeva je aritmetički niz. Prvi član je a_1, a sedmi član $a_7 = a_1 + 6$.

Suma prvih sedam uzastopnih prirodnih brojeva je 70, iz čega slijedi:

$$S_7 = \frac{7}{2}(a_1 + a_7) = \frac{7}{2}(a_1 + a_1 + 6) = \frac{7}{2} \cdot 2\,(a_1 + 3) = 7a_1 + 21$$

$$7a_1 + 21 = 70 \quad \Rightarrow \quad 7a_1 = 47 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 7.$$

Članovi niza su: 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Umetnuti (interpolirati) aritmetički niz od r članova između brojeva a i b znači odrediti r brojeva koji zajedno s a i b čine aritmetički niz. Broj a je prvi član, a b posljednji član niza. Razlika d između članova niza je:

$$a_1 = a,\ \ a_n = b,\ \ n = r + 2, \quad a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$\Rightarrow \quad b = a + (r+1)d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{b-a}{r+1}.$$

Primjer 7: Između brojeva 33 i 145 umetnuto (interpolirano) je šest brojeva, tako da svih osam brojeva čini aritmetički niz. Odredimo te brojeve i sumu svih osam brojeva.

Rješenje: Prvi i posljednji članovi niza su: $a_1 = 33$, $a_8 = 145$, a razlika između umetnutih članova je:

$$d = \frac{b-a}{r+1} = \frac{145-33}{6+1} = \frac{112}{7} = 16.$$

Članovi niza su:

$a_1 = 33,\ a_2 = 33 + 16 = 49$

$a_3 = 49 + 16 = 65,\ a_4 = 65 + 16 = 81$

$a_5 = 81 + 16 = 97,\ a_6 = 97 + 16 = 113$

$a_7 = 113 + 16 = 129,\ a_8 = 145.$

Suma svih osam članova je:

$$S_7 = \frac{8}{2}(a_1 + a_8) = 4(33 + 145) = 4 \cdot 178 = 712.$$

3.3. Geometrijski niz

Niz je geometrijski ako je kvocijent svakog člana i prethodnog člana stalan, tj. $q = \frac{a_n}{a_{n-1}},\ n > 1$. Prvi član niza je a_1, drugi $a_2 = a_1 \cdot q$, treći $a_3 = a_2 \cdot q$ ili $a_3 = a_1 \cdot q^2$, …općenito $a_n = a_{n-1} \cdot q$ ili $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$.

Zbroj prvih n članova niza je:

$$S_n = a_1 \frac{q^{n-1}}{q-1},\ q \neq 1.$$

Za svaka tri uzastopna člana geometrijskog niza vrijedi:

$$\frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n} \quad \Rightarrow \quad a_n = \sqrt{a_{n-1} \cdot a_{n+1}}$$

Geometrijska sredina n brojeva je:

$$G = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}.$$

Primjer 1: Odredimo zbroj prvih devet članova geometrijskog niza 8, 4, 2, …

Rješenje: Prvi član niza je $a_1 = 8$, kvocijent $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$.

Zbroj prvih devet članova geometrijskog niza je:

$$S_9 = a_1 \frac{q^9 - 1}{q-1} = 8 \cdot \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^9 - 1}{\frac{1}{2} - 1} = 8 \cdot \frac{\frac{1}{512} - 1}{-\frac{1}{2}} =$$

$$= 8 \cdot \frac{-\frac{511}{512}}{-\frac{1}{2}} = 8 \cdot \frac{511}{256} = \frac{511}{32}.$$

Primjer 2: Broj bakterija udvostručuje se svaka dva sata. Ako je na početku bilo 500 bakterija, koliko će ih biti nakon 24 sata?

Rješenje: Na početku imamo $a_1 = 500$,
nakon dva sata $a_2 = 500 \cdot 2 = 1\,000$,
nakon četiri sata $a_3 = 1\,000 \cdot 2 = 2\,000$ i tako dalje.
Općenito, $a_n = a_1 \cdot 2^{n-1}$ (imamo geometrijski niz).
Potrebno je odrediti koliki je n nakon 24 sata.

$$n = \frac{24}{2} + 1 = 13$$

Broj bakterija nakon 24 sata je:
$a_{13} = a_1 \cdot 2^{12} = 500 \cdot 4\,096 = 2\,048\,000.$

Primjer 3: Ratko je triatlonac i zbog natjecanja se odlučio na snižavanje svoje tjelesne mase smanjivanjem energetskog unosa hrane slijedeći geometrijski niz s kvocijentom 0.95. Prvi dan uzeo je 12 000 kJ.

a) Odredite koliko je kJ unio treći dan.
b) Napišite formulu R_n po kojoj Ratko računa unos kJ n-ti dan.
c) Izračunajte razliku unosa kJ devetog i desetog dana (zaokružite na cijeli broj).
d) Odredite koliko je kJ Ratko unio od osmog do četrnaestog dana, uključujući i ta dva dana (zaokružite na cijeli broj).

Rješenje: Imamo geometrijski niz: $a_1 = 12\,000,\ q = 0.95.$

a) $a_2 = a_1 \cdot q = 12\,000 \cdot 0.95 = 11\,400$
$a_3 = a_2 q = 11\,400 \cdot 0.95 = 10\,830$

b) $R_n = 12\,000 \cdot 0.95^{n-1}$

c) $R_9 = 12\,000 \cdot 0.95^8 = 7\,961$, $R_{10} = 12\,000 \cdot 0.95^9 = 7\,563$
$R_9 - R_{10} \approx 398$

d) $$S_7 = a_1 \frac{q^7 - 1}{q - 1} = 12\,000 \cdot \frac{0.95^7 - 1}{0.95 - 1} = 72\,399$$

$$S_{14} = a_1 \frac{q^{14} - 1}{q - 1} = 12\,000 \cdot \frac{0.95^{14} - 1}{0.95 - 1} = 122\,958$$

$$S_{14} - S_7 \approx 50\,559 \text{ kJ}$$

Primjer 4: Odredimo geometrijski niz u kojem vrijedi $a_4 - a_2 = 120$ i $a_1 \cdot a_3 = 64$.

Rješenje: Članovi niza su: $a_1,\ a_2 = a_1 q,\ a_3 = a_1 q^2,\ a_4 = a_1 q^3$.
Uvrštavanjem u zadane izraze imamo:

$$\begin{cases} a_1 q^3 - a_1 q = 120 & \Rightarrow \quad a_1 q\left(q^2 - 1\right) = 120 \\ a_1 \cdot a_1 q^2 = 64 & \Rightarrow \quad a_1^2 q^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad a_1 q = \pm 8. \end{cases}$$

Dijeljenjem jednadžbi dobivamo:

$$\frac{a_1q(q^2-1)}{a_1q}=\frac{120}{\pm 8} \quad \Rightarrow \quad q^2-1=\pm 15 \quad \Rightarrow \quad q^2=\pm 15+1$$
$$\Rightarrow \quad q^2=16 \quad \Rightarrow \quad q=4$$
ili $q^2=-14$ (nije moguće).

Odredimo prvi član.
$a_1q=\pm 8 \quad \Rightarrow \quad 4a_1=\pm 8 \quad \Rightarrow \quad a_1=\pm 2$
Imamo dva rješenja:
I. niz: $a_1=2,\ q=4$ i II. niz: $a_1=-2,\ q=-4$.

Umetnuti (interpolirati) geometrijski niz od r članova između brojeva a i b znači odrediti r brojeva koji zajedno sa a i b čine geometrijski niz. Broj a je prvi član, a b posljednji član niza. Kvocijent q između članova niza je:

$$a_1=a,\quad a_n=b,\quad n=r+2,\quad a_n=a_1q^{n-1} \quad \Rightarrow \quad b=aq^{r+1} \quad \Rightarrow \quad q=\sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}.$$

Primjer 5: Između brojeva 7 i 1 792 umetnuto (interpolirano) je sedam brojeva, tako da svih devet brojeva čini geometrijski niz. Odredimo te brojeve i sumu svih devet brojeva.

Rješenje: $a_1=7,\ a_9=1\,792$

Kvocijent $q=\sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}=\sqrt[8]{\frac{1\,792}{7}}=\sqrt[8]{256}=2.$

Niz je $a_1=7,\ a_2=a_1q=7\cdot 2=14,\ a_3=14\cdot 2=28,$
$a_4=28\cdot 2=56,\ a_5=56\cdot 2=112,\ a_6=112\cdot 2=224,$
$a_7=448,\ a_8=896,\ a_9=1\,792.$

Suma je $S_9=a_1\frac{q^9-1}{q-1}=7\cdot\frac{2^9-1}{2-1}=7\cdot\frac{512}{1}=3\,584.$

3.4. Beskonačni geometrijski red

Zbroj beskonačno mnogo članova geometrijskog niza je beskonačni geometrijski red. Ako imamo beskonačni geometrijski red

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_1q^{n-1}=a_1+a_1q+a_1q^2+\ldots,$$

takav da je $|q|<1$, onda je on konvergentan i njegova suma je: $S=\frac{a_1}{1-q}$.

Primjer 1: Izračunajmo vrijednost izraza $\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5...}}}}}}$.

Rješenje: Izraz se može zapisati drugačije.

$$\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5\sqrt{5...}}}}}} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 5^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{16}} \cdot 5^{\frac{1}{32}} \cdot ... = 5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+...}$$

U eksponentu smo dobili beskonačan geometrijski red. Prvi član je $a_1 = \frac{1}{2}$, kvocijent $q = \frac{1}{2}$, a suma reda

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

Vrijednost izraza je $5^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+....} = 5^S = 5^1 = 5.$

Primjer 2: Odredimo zbroj članova beskonačnog geometrijskog niza $96, -48, 24, -12, 6, \ldots$

Rješenje: Imamo dva geometrijska niza: prvi $96, 24, 6, \ldots$ i drugi $-48, -12, \ldots$

Odredimo sumu prvog beskonačnog geometrijskog reda.

Prvi član je $a_1 = 96$, kvocijent $q = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$, a suma:

$$S_1 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{96}{1-\frac{1}{4}} = \frac{96}{\frac{3}{4}} = 128.$$

Prvi član drugog reda je $a_1 = -48$, kvocijent $q = \frac{-48}{-12} = \frac{1}{4}$, a suma:

$$S_2 = \frac{a_1}{1-q} = \frac{-48}{1-\frac{1}{4}} = \frac{-48}{\frac{3}{4}} = -64.$$

Rješenje je $S = S_1 + S_2 = 128 + (-64) = 64.$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2007.) Turistički autobus za razgledavanje grada uveo je novi način plaćanja karata. Prvi putnik koji uđe u autobus plaća 83 kune, a svaki slijedeći 3 kune manje.

a) Koliko je svoju kartu platio osmi putnik?
b) Odredite formulu $C(n)$ za cijenu (u kunama) koju je platio n-ti putnik?
c) Koji je po redu ušao putnik koji je platio 32 kune?
d) Koliki je najveći mogući broj putnika koji pri ulasku u autobus moraju platiti kartu?

2. (NI 2008.) Autobusi A i B na početku radnoga vremena zajedno kreću s polazne stanice. Autobus A svake 72 minute ponovno kreće s polazne stanice, a autobus B svake 42 minute. Nakon koliko će minuta autobusi ponovno krenuti s polazne stanice zajedno?

3. (IK 2009.) Posljednji, 25. red stadiona može primiti 2 048 gledatelja. Svaki prethodni red prima 20 gledatelja manje.

a) Koliko gledatelja može primiti prvi red stadiona?
b) Koliko je gledatelja na stadionu ako je on popunjen do posljednjeg mjesta?
c) Svečana loža stadiona može primiti 225 gledatelja, a smještena je unutar područja od 5. do 10. reda. Svaki njezin red, počevši od najnižega, ima pet sjedala više od prethodnoga. Koliko mjesta za gledatelje ima u prvome redu lože?

4. (NI 2009.) U javnoj garaži parkiranje se naplaćuje prema sljedećoj tarifi: prvih pola sata 5 kuna, drugih pola sata 4 kune i svaki sljedeći započeti sat po 7 kuna. Vozilo je bilo parkirano od 10:35 do 15:50 h. Koliko je kuna platio parkiranje njegov vlasnik?

a) 23 kn b) 30 kn c) 37 kn d) 44 kn

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Odredite petnaesti član niza $a_n = (-1)^{n-1} \cdot n^2$.

a) 196 b) –225 c) 225 d) –196

2. Jednadžba $t_{n+1} = a \cdot t + 6$, gdje je $t_1 = 5$, određuje niz 5, 21, 69, 213, … Vrijednost broja a je:

a) – 1 b) 3 c) 4 d) 15.

3. Prva četiri člana niza su 12, 18, 30 i 54. Rekurzivna formula koja zadaje ovaj niz je:

a) $a_{n+1} = 1.5a_n$, $a_1 = 12$
b) $a_{n+1} = 0.5a_n + 12$, $a_1 = 12$
c) $a_{n+1} = 2a_n - 6$, $a_1 = 12$
d) $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, $a_1 = 12$, $a_2 = 18$.

4. Ana je počela skupljati marke. Odlučila je kupovati određen broj maraka svaki tjedan. Broj maraka koje kupi u n-tom tjednu definiran je rekurzivnom relacijom $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, gdje $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Odredite koliko će Ana imati maraka nakon šest tjedana.

a) 8 b) 12 c) 13 d) 16

5. Pacijent uzima 15 mg lijeka svako jutro. U sljedeća 24 sata, 85% lijeka se u njegovom tijelu apsorbira, a 15% izluči. Neka je L_n broj mg lijeka u tijelu odmah nakon uzimanja lijeka, ujutro n-tog dana. Rekurzivna

relacija L_{n+1} za određivanje broja mg lijeka u tijelu nakon uzimanja lijeka ujutro $(n+1)$-og dana, dana je s:

a) $L_{n+1} = 85L_n + 15, L_1 = 15$
b) $L_{n+1} = 0.85L_n + 15, L_1 = 15$
c) $L_{n+1} = 0.15L_n + 15, L_1 = 15$
d) $L_{n+1} = 0.15L_n + 0.85, L_1 = 15.$

6. U punom bazenu ima 50 000 litara vode. Uslijed isparavanja i prolijevanja bazen gubi oko 2% vode tjedno. Kako bi se taj gubitak nadoknadio, krajem svakog tjedna u bazen se dolijeva 500 litara vode. Pretpostavimo da je na početku prvog tjedna bazen bio pun. Početkom petog tjedna količina vode u bazenu bit će najbliže:

a) 47 600 litara b) 48 060 litara c) 48 160 litara d) 48 530 litara.

7. Za ispit treba fotokopirati 8 600 listova papira. Koliko je još listova papira preostalo za kopiranje nakon jednog sata fotokopiranja ako se fotokopira 25 listova papira u minuti?

a) 2 500 b) 6 100 c) 7 100 d) 8 575

8. Koji od sljedećih nizova predstavlja aritmetički niz?

a) 1, 3, 9, 27, 81,… b) 1, 3, 7, 15, 31,…
c) –10, –5, 5, 10, 15,… d) – 4, –1, 2, 5, 8,…

9. Kutovi četverokuta $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ čine aritmetički niz s razlikom $d = 20°$. Vrijednost $\cos\alpha + \cos\delta$ iznosi:

a) 1 b) 0 c) $\frac{1}{2}$ d) $\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)$.

10. Na kraju prvog dana vulkanske erupcije uništeno je 15 km^2 šume. Na kraju drugog dana uništeno je još 13.5 km^2 šume, a na kraju trećeg dana još 12.15 km^2 šume. Cijelo područje šume uništavano je vulkanskom erupcijom istim tempom 14 dana. Koliko je ukupno uništeno šume u kvadratnim kilometrima na kraju četrnaestog dana (zaokruženo na najbliži cijeli broj)?

a) 116 b) 117 c) 150 d) 179

11. Duljina kristala na početku kemijskog eksperimenta iznosila je 12 cm. Svaki dan kristal se produljivao 3%. Duljina kristala nakon 14 dana rasta je najbliža:

a) 12.4 cm b) 14.7 cm c) 16.7 cm d) 17.6 cm.

12. Prvi član geometrijskog niza je 9. Treći član je 121. Drugi član ovog niza može biti:

a) – 65 b) –33 c) 56 d) 65.

13. Za geometrijski red 24, 6, 1.5, … kvocijent je:

a) –18 b) 0.25 c) 0.5 d) 4.

14. U romanu znanstvene fantastike, glavni lik pronalazi misteriozni kamen koji se svaki dan smanjuje. Tablica prikazuje dio kamena koji preostaje nakon svakoga dana u podne.

Dan	Preostali dio kamena izražen u razlomcima
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{4}$
4	$\frac{1}{8}$

Koji će dio kamena, izražen u razlomcima, preostati sedmi dan?

a) $\frac{1}{128}$ b) $\frac{1}{64}$ c) $\frac{1}{14}$ d) $\frac{1}{12}$

15. Napišite formulu koja će određivati niz 4, 8, 12, 16, 20,…

a) $a_n = 4n + 1$ b) $a_n = n + 4$ c) $a_n = 4n$ d) $a_n = 2n + 2$

16. Broj ptica močvarica koje žive u močvarama smanjuje se 4% svake godine od 2006. godine. Početkom 2006. godine bilo ih je 680.

1. Ako se broj ptica močvarica smanjuje uz isti postotak, koliko će ih biti početkom 2011. godine?
   a) 532 b) 544 c) 554 d) 571

2. Ako je M_n broj ptica močvarica početkom n-te godine, tada je $M_1 = 680$. Pravilo kojim bismo mogli izračunati broj ptica močvarica u močvarnom području glasi:
   a) $M_{n+1} = M_n - 0.04n$ b) $M_{n+1} = 1.04M_n$
   c) $M_{n+1} = 0.04M_n$ d) $M_{n+1} = 0.96M_n$.

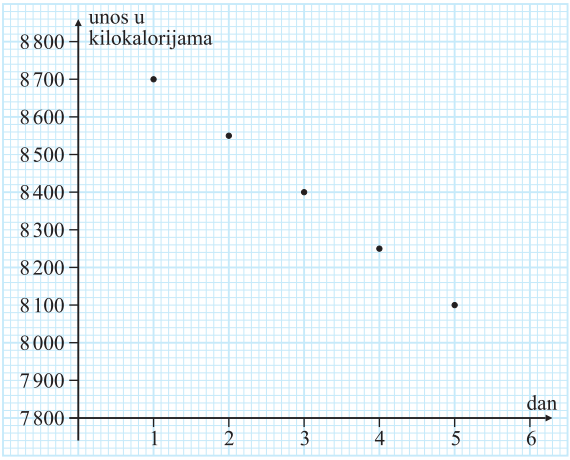
ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Marina ima dvoje roditelja, dvije bake i dva djeda i tako dalje u prošlost. Napišite opću i rekurzivnu formulu za broj Marininih predaka, ako idemo unazad n generacija.

2. Alpinistica Tanja sprema se na zahtjevan uspon. Smanjivat će dnevni unos hrane u razdoblju od 14 dana. Graf ispod pokazuje kako Tanja smanjuje unos kcal za prvih 5 dana.

a) Koliko je kcal Tanja uzela prvi dan?
b) Odredite koliko je kcal Tanja uzela šesti dan.
c) Tanjin unos kcal n-ti dan je dan formulom $K_n = a - 150 \cdot n$. Izračunajte vrijednost a.

d) Koji dan će Tanja unijeti 6 750 kcal?



3. Mirna je odlučila da će svaki dan voziti bicikl. Vrijeme u minutama K_n koje će provesti u vožnji biciklom n-ti dan, dano je rekurzivnom formulom $T_{n+1} = 0.75 \cdot T + 8$, gdje je $T_2 = 20$.

a) Koliko će minuta voziti bicikl četvrti dan?

b) Pokažite da ova rekurzivna formula ne određuje niti aritmetički, niti geometrijski niz.

c) Koliko će vremena u vožnji biciklom Mirna provesti prvi dan?

4. Boris je odlučio plivati i trčati svaki dan. Prvi dan plivao je 100 m i trčao 500 m. Svaki sljedeći dan pliva 50 metra više nego prošli dan, a trči 2% više nego prethodni dan. Koji će dan dulje plivati nego trčati?

5. Duljine stranica pravokutnog trokuta čine aritmetički niz s razlikom 2. Odredite opseg i površinu trokuta te polumjer upisane kružnice.

6. Duljine stranica trokuta čine aritmetički niz s razlikom 2. Najveći kut u trokutu je 120°. Odredite opseg i površinu trokuta.

7. Kutovi četverokuta čine aritmetički niz s razlikom 30°. Odredite kutove mnogokuta.

8. Odredite zbroj svih prirodnih troznamenkastih brojeva.

9. Odredite zbroj svih prirodnih brojeva između 50 i 350 kojima je zadnja znamenka 3.

10. Odredite zbroj troznamenkastih brojeva djeljivih sa 13.

11. Tri broja čine aritmetički niz. Njihov zbroj je 3, a zbroj njihovih recipročnih vrijednosti $\frac{1}{3}$. Odredite taj niz.

12. Sedmi član aritmetičkog niza je 41, a trinaesti 77. Odredite sedamnaesti član niza.

13. Zbroj unutarnjih kutova u trokutu je 180°, u četverokutu 360°, u peterokutu 540°. Pod pretpostavkom da se istom pravilnošću zbroj unutarnjih kutova nastavlja i dalje, pronađite zbroj unutarnjih kutova dodekagona (mnogokuta s 12 stranica).

14. Limenke na polici trgovine poslagane su tako da je 20 limenki na dnu, 18 limenki u sljedećem redu, i tako dalje, dok su u gornjem redu 4 limenke. Koliko je limenki ukupno na polici?

15. U pekari se u prvom tjednu nakon otvaranja proizvodilo 60 kg kruha dnevno. Zbog dobre prodaje odlučeno je da se količina pripremljenog kruha povećava tako da se svakog sljedećeg tjedna dnevna proizvodnja poveća za 6 kg u odnosu na dnevnu proizvodnju prethodnog tjedna. Koliko će se dnevno proizvoditi kruha nakon godinu dana (52 tjedna)?

16. Zbroj prvih triju članova rastućeg geometrijskog niza je 63, a produkt 1 728. Odredite taj niz.

17. Prvi član geometrijskog niza je $a_1 = -\frac{1}{2}$, a zbroj prvih triju članova $S_3 = -\frac{3}{2}$. Odredite peti član.

18. Peti član geometrijskog niza je osmerokratnik drugog člana, a produkt drugog i četvrtog člana je 144. Izračunajte prvi član a_1 i kvocijent q.

19. Matija radi na velikoj farmi koja ima 1 250 krava. Planira prodati 150 krava svake godine. Pretpostavimo da nema novih krava i da ni jedna nije uginula.

a) Koliko krava će imati nakon dvije godine?

b) Popunite broj koji nedostaje u jednadžbi koja daje broj krava K_5 na farmi nakon 5 godina $K_5 = 1\,250 + 5 \cdot \square$

c) Za koliko „cijelih“ godina Matija ima krava za prodaju?

20. Mnogo realističnija formula koja modelira broj krava K_n na Matijinoj farmi nakon n godina, a uračunava broj novih i broj uginulih krava, te prodaju 150 krava godišnje je $K_n = 1.08K_{n-1} - 150$, $K_0 = 1\,250$.

a) Koristeći formulu izračunajte koliko će krava biti na farmi nakon jedne, odnosno 6 godina.

b) Prema formuli broj krava povećava se po određenom postotku prije prodaje 150 krava godišnje. Koliki je taj postotak? Za koliko „cijelih“ godina Matija ima krava za prodaju?

c) Pretpostavimo da Matija želi zadržati 1 250 krava svake godine. Formula K_n koja predstavlja model broja krava na Matijinoj farmi poslije n godina dana je $K_n = 1.08K_{n-1} - k$, $K_0 = 1\,250$, gdje je k broj krava koje će Matija svake godine prodati. Kolika je vrijednost k?

21. Matija na svojoj farmi također ima i jelene. Planira povećati broj jelena svake godine. Broj jelena svake godine povećavat će se geometrijski s kvocijentom 1.5. Matija je započeo sa 32 jelena.

a) Koliko će jelena biti na farmi nakon tri godine?
b) Nakon koliko godina će broj jelena biti veći od 820?
c) Koliko će biti više jelena na farmi nakon pet godina nego nakon prve godine?
d) Napišite izraz koji će opisivati broj jelena na farmi nakon n godina.
e) Neka je J_n broj jelena na farmi nakon n godina. Napišite rekurzivnu formulu za J_n koristeći J_{n-1} koja će predviđati broj jelena na farmi nakon n godina.

22. Poznato je da na stablima voćaka u nekom voćnjaku ima 48 000 kg voća. Svaki dan sa stabala se pobere 3 000 kg voća.

a) Koliko kilograma voća ostane na stablima voćaka na kraju drugog dana?
b) Broj kilograma voća, V_n, koje ostane na stablima na kraju n-tog dana možemo zapisati kao $V_n = 48\,000 + d \cdot n$. Vrijednost $d =$ ☐.
c) Koliko je dana potrebno da se pobere svo voće iz voćnjaka?

23. U voćnjaku je posađena nova vrsta voća. U prvom mjesecu poslije sadnje voćari su radili 625 sati. U drugom i trećem mjesecu poslije sadnje voćari su radili 500, odnosno 400 sati. Pretpostavimo da će broj sati rada voćara i dalje opadati. Broj sati svaki mjesec opada geometrijski.

a) Odredite kvocijent tog geometrijskog niza.
b) Izračunajte koliko će sati voćari raditi u petom mjesecu poslije sadnje.
c) Napišite pravilo koje daje broj sati, h_n koje će voćari raditi u n-tom mjesecu poslije sadnje.
d) Koliko će više voćari morati raditi u šestom nego u sedmom mjesecu? Zaokružite odgovor na najbliži sat.
e) U kojem mjesecu će voćari raditi manje od 100 sati?
f) U prva tri mjeseca nakon sadnje voćari su radili 1 525 sati. Koliko će sati ukupno raditi u sljedećih 9 mjeseci? Zaokružite odgovor na najbliži sat.

24. Voda koju voćari koriste za zalijevanje u voćnjaku uskladištena je u cisterni. Svako poslijepodne potroši se 10% ukupne količine vode u cisterni. Svaku večer 2 000 litara vode doda se u cisternu. Ovaj se postupak ponavlja svaki dan. Količina vode, V_n, u cisterni ujutro n-tog dana je dana rekurzivnom formulom $V_{n+1} = rV_n + d$, gdje je $V_1 = 45\,000$ litara.

a) Odredite vrijednosti r i d.
b) Izračunajte koliko će vode biti u cisterni ujutro četvrtog dana.
c) Kojeg dana ujutro će količina vode u cisterni prvi put biti ispod 30 000 litara?

25. Zamislite da ste na izletu uz jezero i slapove. Na vrhu slapa ispao vam je novčić. Novčić će u prvoj sekundi pasti 4 metra, u drugoj još 14 m, u sljedećoj još 24 m i nastavlja dalje kao aritmetički niz.
a) Kolika je ukupna udaljenost koju će novčić prijeći pri padu za 6 sekundi?
b) Visina velikog slapa na Plitvicama je 78 metara. Je li moguće da se ova „priča" događa u Hrvatskoj?

26. Nakon što je Mario operirao koljeno, prijatelj mu je preporučio da nakon 6 tjedana oporavka počne ponovo s trčanjem, ali tako da prvi tjedan trči samo 12 minuta dnevno, a nakon toga, svaki sljedeći tjedna da poveća vrijeme za 6 minuta (znači da u drugom tjednu svaki dan trči 18 minuta). Koliko tjedana će proći prije nego Mario počne trčati 60 minuta dnevno kao i prije operacije?

27. Odredite vrijednost $\sum_{k=1}^{\infty} 4\cdot(0.5)^k$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

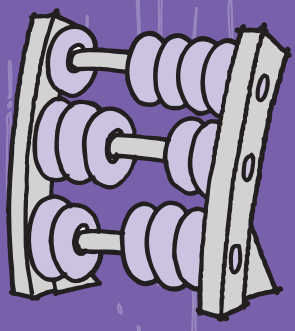
1. a) 62 kn b) $C(n) = 86 - 3n$ c) 18. d) 28 **2.** Nakon 504 minute.
3. a) 1 568 b) 45 200 c) 25 **4.** d

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** b **3.** c **4.** c **5.** c **6.** b **7.** c **8.** d **9.** b **10.** a **11.** c **12.** b
13. b **14.** b **15.** c **16.** 1.c, 2.d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. opća $a_n = 2^n$, rekurzivna $a_1 = 2,\ a_n = 2a_{n-1}$
2. a) 8 700 b) 7 950 c) 8 850 d) 14. dan
3. a) 25.25 b) $\frac{23}{20} \approx 1.15 \neq \frac{25.25}{23} \approx 1.1,\ 23 - 20 = 3 \neq 25.25 - 23 = 2.25$ c) 16
4. Dvanaesti dan. **5.** $O = 24,\ P = 24,\ r = 2$ **6.** $O = 15,\ P = \frac{15\sqrt{3}}{4}$
7. $\alpha = 45°,\ \beta = 75°,\ \gamma = 105°,\ \delta = 135°$ **8.** $S_{900} = 494\,550$ **9.** $S_{30} = 5\,880$
10. $S_{69} = 37\,674$ **11.** –1, 1, 3 i 3, 1, –1 **12.** $a_{17} = 101$
13. $a_{10} = 180° + 9 \cdot 180° = 1\,800°$ **14.** 108 limenki
15. $a_1 = 60,\ d = 6,\ a_{52} = 366$ kg **16.** $a_1 = 3,\ q = 4$ **17.** $a_5 = -8$
18. $a_1 = \pm 3,\ q = 2$ **19.** a) 950 b) – 150 c) 8 godina
20. a) $K(1) = 1\,200,\ K(6) = 883$ b) 8%, Ima krava za 14 godina. c) $k = 100$
21. a) 108 b) 8 godina c) 195 d) $J_n = 32 \cdot 1.5^n$ e) $J_n = 1.5 \cdot J_{n-1},\ J_0 = 32$
22. a) 42 000 b) $d = -3\,000$ c) 16 dana
23. a) 0.8 b) 256 c) $h_n = 625 \cdot (0.8)^{n-1}$ d) 41 e) U 10. mjesecu. f) 1 385
24. a) $r = 0.9,\ d = 2\,000$ b) 38 225 c) Desetog dana.
25. a) $a_6 = 64$ m, $S_6 = 204$ m b) Priča se ne događa na Plitvicama.
26. $a_n = 60 = 12 + (n-1)6 \Rightarrow n = 9$
27. $\sum_{k=1}^{\infty} 4\cdot(0.5)^k = 4\cdot\sum_{k=1}^{\infty}(0.5)^k = 4\cdot\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 4$



4. GEOMETRIJA

4.1. Elementarna geometrija likova u ravnini

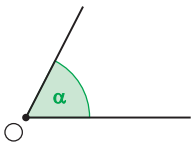
Točka, **pravac** i **ravnina** osnovni su pojmovi u geometriji.

Pravac je određen s dvije točke za koje kažemo da su **kolinearne**. Točka na pravcu dijeli pravac na dvije zrake ili dva **polupravca**. Dio pravca omeđenog s dvije točke zovemo **dužina**. Dužine jednakih duljina nazivamo **sukladne** dužine. Točku dužine koja je jednako udaljena od oba kraja dužine zovemo **polovište** dužine. Presjek dvaju različitih pravaca je točka. Udaljenost točke od pravca je duljina okomice spuštene iz točke na pravac. Točku u kojoj ta okomica siječe pravac nazivamo **nožište.**

Tri nekolinearne točke određuju **ravninu**. Takve točke nazivamo **komplanarne točke**. Ako se dva pravca u istoj ravnini ne sijeku, tada su to **paralelni** ili **usporedni pravci**. Pravac u ravnini dijeli ravninu na dvije **poluravnine.** Presjek dviju ravnina je pravac. Dvije paralelne ravnine se ne sijeku.

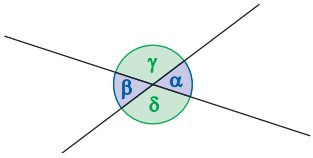
Kut je dio ravnine omeđen s dvama polupravcima (krakovi kuta) sa zajedničkom točkom (vrh kuta).

Kutove mjerimo u stupnjevima i radijanima. Mjera pravog kuta je $90° \left(\frac{\pi}{2} \text{ rad} \right)$, ispruženog $180°$ (π rad), a punog $360°$ (2π rad). Mjera šiljastog kuta je veća od $0°$, a manja od $90°$. Tupi kut ima mjeru veću od $90°$, a manju od $180°$.



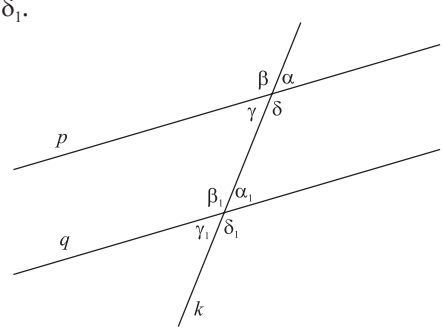
Dva su kuta **sukladna** ako imaju istu mjeru kuta. Ako zraka dijeli kut na dva sukladna kuta, tu zraku zovemo **simetrala kuta**. Zbroj **komplementarnih** kutova je $\alpha + \beta = 90°$, a zbroj **suplementarnih** kutova $\alpha + \beta = 180°$.

Dva ukrštena pravca dijele ravninu na četiri kuta. Susjedne kutove (npr., α i γ ili β i δ), čiji je zbroj $180°$, nazivamo susjedni kutovi ili **sukuti**. To su suplementarni kutovi.



Suprotne kutove α i β koji nemaju zajedničke krakove, a imaju zajednički vrh nazivamo **vršni kutovi** i oni su sukladni.

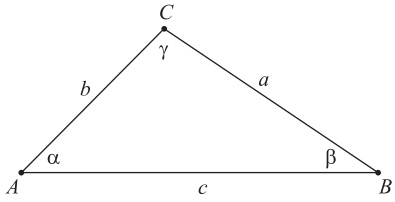
Ako su pravci p i q paralelni, onda pravac k koji ih presijeca određuje osam kutova. Kutovi α i α_1 su sukladni kutovi. Isto vrijedi i za ostale kutove: $\beta = \beta_1$, $\gamma = \gamma_1$, $\delta = \delta_1$.



Pravac koji siječe dva ili više pravaca u istoj ravnini nazivamo **transverzala.**

4.1.1. Trokut

Trokut je dio ravnine omeđen trima dužinama $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ koje nazivamo **stranice** trokuta. Točke A, B i C su **vrhovi** trokuta. Zbroj unutarnjih kutova trokuta je $\alpha + \beta + \gamma = 180°$.



Visina je okomica spuštena iz vrha na suprotnu stranicu. Točka u kojoj se sijeku visine je **ortocentar**.

Težišnica je dužina koja spaja vrh i polovište suprotne stranice. Težišnice se sijeku u **težištu.**

Sjecište simetrala unutarnjih kutova trokuta je središte trokutu upisane kružnice, a sjecište simetrala stranica trokuta središte trokutu opisane kružnice.

Primjer 1: Ako se kutovi trokuta odnose kao $8 : 13 : 15$, koliki je najveći kut trokuta?

Rješenje: $\alpha : \beta : \gamma = 8 : 13 : 15 \Rightarrow \alpha = 8k,\ \beta = 13k,\ \gamma = 15k$
Zbroj kutova u trokutu je 180°, te slijedi:
$\alpha + \beta + \gamma = 180° = 8k + 13k + 15k = 36k = 180° \Rightarrow k = 5°.$
Najveći kut trokuta je $\gamma = 15k = 15 \cdot 5° = 75°$.

Trigonometrija pravokutnog trokuta

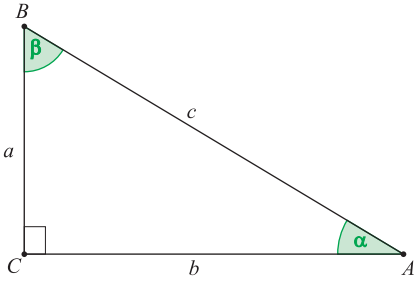
U pravokutnom trokutu vrijedi **Pitagorin poučak**: $a^2 + b^2 = c^2$.

$$\sin\alpha = \frac{a}{c} \quad \text{sinus kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c} \quad \text{kosinus kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b} \quad \text{tangens kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a} \quad \text{kotangens kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{nasuprotna kateta}}$$



$$\alpha + \beta = 90°$$
$$\sin\alpha = \cos\beta$$
$$\cos\alpha = \sin\beta$$
$$\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{ctg}\beta$$
$$\operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{tg}\beta$$

Primjer 2: Slika je obješena na zid. Čovjek visok 2 m stoji 2 m udaljen od zida. Kut između visine oka i donjeg ruba slike je 45°, a kut između visine oka i gornjeg ruba slike je 60°. Koliko je visoka slika?

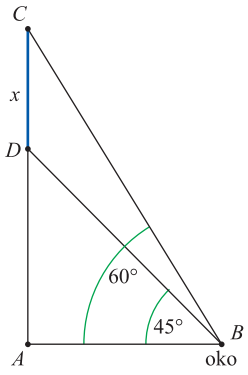
Rješenje: $|AB| = 2$ m

Visina slike $x = |AC| - |AD|$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{|AC|}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad |AC| = 2 \cdot tg\, 60° = 2\sqrt{3}$$

$$\operatorname{tg} 45° = \frac{|AD|}{|AB|} \quad \Rightarrow \quad |AD| = 2 \cdot tg\, 45° = 2 \cdot 1 = 2$$

$$x = |AC| - |AD| = 2\sqrt{3} - 2 \approx 1.46$$



Površinu raznostraničnog trokuta možemo izračunati po sljedećim formulama:

$$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$$

gdje su a, b i c stranice trokuta, a v_a, v_b i v_c visine na pripadne stranice trokuta;

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

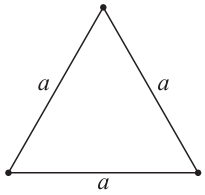
gdje je $s = \frac{O}{2} = \frac{a+b+c}{2}$

$$P = rs = \frac{abc}{4R}$$

gdje r polumjer upisane, a R polumjer trokutu opisane kružnice;

$$P = \frac{ab \sin\gamma}{2} = \frac{bc \sin\alpha}{2} = \frac{ac \sin\beta}{2}$$

$$P = \frac{a^2 \sin\beta \sin\gamma}{2 \sin\alpha} = \frac{b^2 \sin\alpha \sin\gamma}{2 \sin\beta} = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{2 \sin\gamma} = 2R^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma.$$



Površina jednakostraničnog trokuta je $P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, a visina $v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.

Polumjer upisane kružnice: $r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ ili $r = \frac{1}{3}v$.

Polumjer opisane kružnice: $R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ ili $R = \frac{2}{3}v$.

Primjer 3: Duljine stranica trokuta su 12, 13 i 21. Ako se sve stranice povećaju za jednaki iznos, onda one čine pravokutan trokut. Odredimo za koliko moramo povećati stranice.

Rješenje: Stranice novog trokuta su $12 + x$, $13 + x$ i $21 + x$ i za njih, prema Pitagorinom poučku, vrijedi:

$$(12+x)^2 + (13+x)^2 = (21+x)^2$$

$$144 + 24x + x^2 + 169 + 26x + x^2 = 441 + 42x + x^2$$

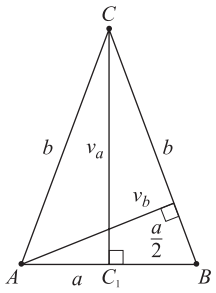
$$\underline{x^2 + 8x - 128 = 0}$$

$x_1 = 8$, $x_2 = -16$ (nije rješenje jer mora biti $x > 0$).

Sve stranice moramo povećati za 8.

Primjer 4: U jednakokračnom trokutu duljina osnovice je 30 cm, a visine na osnovicu 20 cm. Odredimo duljinu visine na krak.

Rješenje: Iz pravokutnog trokuta ΔCC_1B odredimo krak.



$$b = \sqrt{v_a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{20^2 + 15^2} = \sqrt{625} = 25 \text{ cm}$$

Površina trokuta je

$$\frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} \Rightarrow a \cdot v_a = b \cdot v_b \Rightarrow v_b = \frac{a \cdot v_a}{b}$$

$$v_b = \frac{a \cdot v_a}{b} = \frac{30 \cdot 20}{25} = 24 \text{ cm}.$$

Napomena: Stranice trokuta obrnuto su proporcionalne pripadnim visinama, što izravno proizlazi iz omjera $\frac{a}{b} = \frac{v_b}{v_a}$.

Primjer 5: Iz vrha pravog kuta trokuta ΔABC povučena je težišnica čija je duljina 25 cm, a duljina projekcija kraće katete na hipotenuzu iznosi 18 cm. Odredimo polumjer kružnice upisane tom trokutu.

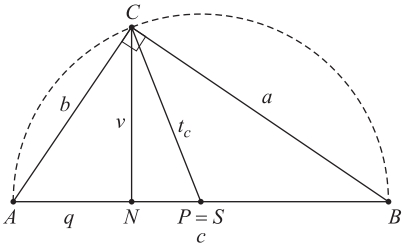
Rješenje: Središte kružnice opisane pravokutnom trokutu nalazi se u polovištu hipotenuze.

$$t_c = |CP| = |SB| = 25 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad c = 2|\text{SB}| = 50 \text{ cm}$$

$$q = |AN| = 18 \text{ cm} \quad \Rightarrow \quad |NS| = |AS| - |AN| = 7 \text{ cm}$$

Iz pravokutnog trokuta *CNS* odredimo visinu.

$$v = \sqrt{t_c^{\,2} - |NS|^2} = \sqrt{25^2 - 7^7} = \sqrt{576} = 24 \text{ cm}$$



Iz pravokutnog trokuta ANC odredimo stranicu b.

$b = \sqrt{q^2 + v^2} = \sqrt{18^2 + 24^2} = \sqrt{900} = 30$ cm

Konačno, stranica a je:

$a = \sqrt{c^2 - b^2} = \sqrt{50^2 - 30^2} = \sqrt{1600} = 40$ cm.

Polumjer upisane kružnice r dobit ćemo iz površine trokuta.

$$P = \frac{ab}{2} = \frac{40 \cdot 30}{2} = 600 \text{ cm}^2$$

$$P = rs, \quad s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{40+30+50}{2} = 60 \text{ cm}$$

$$r = \frac{P}{s} = \frac{600}{60} = 10 \text{ cm}$$

Dva su trokuta **sukladna** ($\Delta ABC \cong \Delta A_1B_1C_1$) ako se mogu položiti jedan na drugi tako da se potpuno preklapaju.

Poučci o sukladnosti trokuta

Dva su trokuta sukladna ako se podudaraju:

1. u svim trima stranicama
2. u jednoj stranici i oba kuta na njoj
3. u dvjema stranicama i kutu među njima
4. u dvjema stranicama i kutu nasuprot većoj od njih.

Dva su trokuta **slična** ($\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C_1$) ako su odgovarajući kutovi jednog trokuta sukladni kutovima drugog trokuta te ako za stranice vrijedi da su u istom omjeru, tj. $a : b : c = a_1 : b_1 : c_1$ ili $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = k$, $k \in \boldsymbol{R}$.

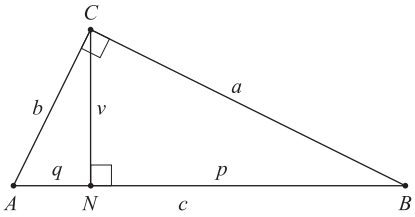
Realan broj k nazivamo koeficijent sličnosti trokuta.

Poučci o sličnosti trokuta

Dva su trokuta slična:

1. ako su sve tri stranice jednog trokuta proporcionalne stranicama drugog trokuta
2. ako su dva kuta jednog trokuta sukladna dvama kutovima drugog trokuta
3. ako imaju jedan sukladan kut i ako su stranice uz taj kut proporcionalne
4. ako su dvije stranice jednog trokuta proporcionalne s dvjema stranicama drugog trokuta i ako su kutovi nasuprot većih od tih stranica sukladni.

U sličnim trokutima proporcionalne su (s koeficijentom sličnosti k) odgovarajuće stranice trokuta, visine, težišnice i opseg trokuta, a omjer površina sličnih trokuta jednak je kvadratu koeficijenta sličnosti k^2.
U pravokutnom trokutu visina na hipotenuzu dijeli trokut ΔABC na slične trokute: $\Delta ABC \sim \Delta CBN \sim \Delta ACN$ iz čega slijedi:



$$p : a = a : c \quad \Rightarrow \quad a^2 = pc$$
$$q : b = b : c \quad \Rightarrow \quad b^2 = qc$$
$$v : q = p : v \quad \Rightarrow \quad v^2 = pq.$$

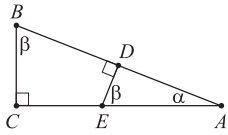
Primjer 6: Opseg trokuta $\Delta A_1B_1C_1$ je 45 cm, a opseg njemu sličnog trokuta $\Delta A_2B_2C_2$ iznosi 30 cm. Koliki je omjer površina tih trokuta?

Rješenje: Koeficijent sličnosti opsega je k, a površina k^2.

$$k = \frac{O_1}{O_2} = \frac{45}{30} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad P_1 : P_2 = 9 : 4$$

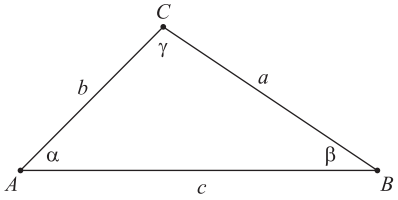
Primjer 7: Duljine stranica u pravokutnom trokutu su 5 cm, 12 cm i 13 cm. U polovištu najdulje stranice trokuta povučena je okomica na tu stranicu. Kolika je duljina onog dijela okomice koji je unutar trokuta?

Rješenje: Sa slike vidimo da vrijedi $\Delta ABC \sim \Delta AED$.



$$|ED| : |BC| = |AD| : |AC|$$
$$|ED| : 5 = \frac{13}{2} : 12 \quad \Rightarrow \quad |ED| = \frac{65}{24}$$

Raznostranični trokut



Poučak o sinusima

$$a : b : c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$$
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

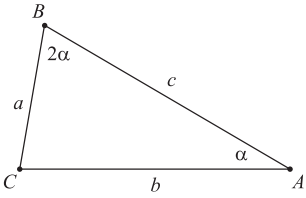
Poučak o kosinusima

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} \qquad \cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} \qquad \cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Primjer 8: Dvije stranice raznostraničnog trokuta su $a = 4$ cm i $b = 6$ cm, a njima nasuprotni kutovi odnose se kao $1 : 2$. Odredimo duljinu treće stranice.

Rješenje: Prema sinusovom poučku imamo:



$$\frac{4}{\sin\alpha}=\frac{6}{\sin 2\alpha} \Rightarrow 4\cdot\sin 2\alpha = 6\cdot\sin\alpha$$

$$4\cdot 2\sin\alpha\cos\alpha = 6\cdot\sin\alpha \,/:2$$

$$4\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin\alpha = 0$$

$$\sin\alpha\,(4\cos\alpha - 3) = 0$$

$$\sin\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 + k\pi \text{ (nije moguće u trokutu)}$$

$$4\cos\alpha - 3 = 0 \Rightarrow \cos\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \alpha = 41°\,24'\,35''.$$

Iz kosinusovog poučka slijedi:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$4^2 = 6^2 + c^2 - 2\cdot 6\cdot c\cdot\cos\alpha$$

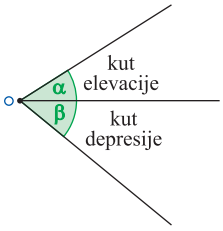
$$16 = 36 + c^2 - 12c\cdot\frac{3}{4}$$

$$c^2 - 9c + 20 = 0$$

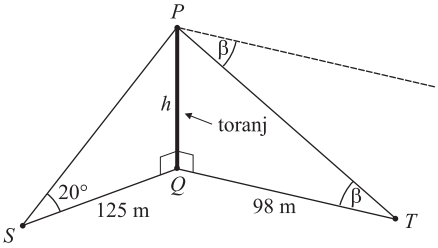
$c_1 = 4$ (nije rješenje jer već imamo takvu stranicu)

$c_2 = 5$.

Kut elevacije i kut depresije



Primjer 8: Na određenom području smješten je komunikacijski toranj PQ.



Točke S, Q i T smještene su na tlu. Iz S kut elevacije prema P je 20°.

a) Odredimo visinu tornja h.

b) Odredimo kut depresije od P prema T.

Rješenje: a) $\operatorname{tg} 20° = \frac{h}{125} \Rightarrow h = 125\cdot\operatorname{tg} 20° = 45.5\,\text{m}$

b) Kut depresije od P prema T jednak je kutu $\beta = QTP$.

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{h}{98} = \frac{45.5}{98} = 0.4642857 \Rightarrow \beta = 24°54'17''$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

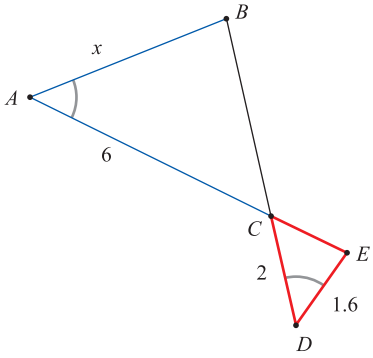
1. (NI 2006.) Sjecište simetrala kutova trokuta je:

a) jedan vrh trokuta
b) polovište jedne stranice
c) središte trokutu upisane kružnice
d) središte trokutu opisane kružnice.

2. (NI 2006.) Površine dvaju sličnih trokuta su 104 cm^2 i 26 cm^2. Opseg manjeg trokuta je 38 cm. Koliki je opseg većeg trokuta?

a) 9.5 cm
b) 19 cm
c) 76 cm
d) 152 cm

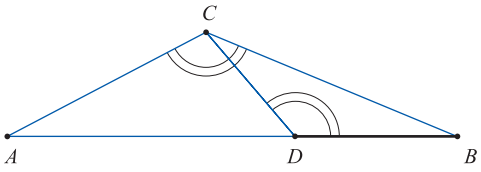
3. (NI 2006.) Ako je $|DE| = 1.6$, $|AC| = 6$ i $|CD| = 2$, tada je $x = |AB|$ jednak:



a) 7.5
b) 5.2
c) 5
d) 4.8.

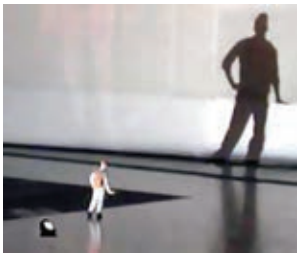
4. (NI 2006.) Brod je privezan za obalu zategnutim konopom duljine 2.5 m. Jedan kraj konopa učvršćen je na obali na visini 1.4 m iznad razine mora, a drugi kraj na pramcu broda 2.9 m iznad razine mora. Ako konop potegnemo te se on skrati za 80 cm, za koliko se brod približi obali?

5. (IK 2006.) Ako je na slici $|AB| = 15\,\text{cm}$ i $|CB| = 9\,\text{cm}$, tada je $|BD|$ jednako:



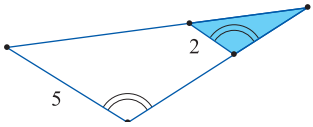
a) $\frac{15}{9}$ cm
b) $\frac{27}{5}$ cm
c) 6 cm
d) 9 cm.

6. (IK 2006.) Dijete visine 120 cm stoji na udaljenosti od 2 m ispred reflektora.



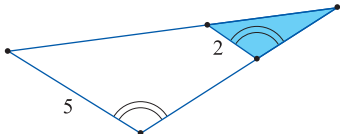
a) Kolika je visina njegove sjene na zidu koji je od reflektora udaljen 7.5 m?
b) Na kojoj udaljenosti od djeteta treba stati osoba visine 180 cm, da bi njihove sjene bile jednake duljine?

7. (IK 2006.) Koliki je postotak površine trokuta osjenčan?



a) 16%
b) 20%
c) 24%
d) 40%

8. (IK 2006.) Koliki postotak površine trokuta nije osjenčan?



a) 75%
b) 80%
c) 84%
d) Niti jedno.

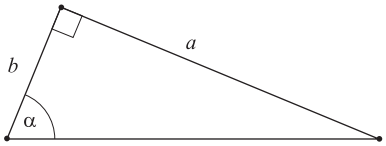
9. (IK 2006.) Težište trokuta je sjecište:

a) simetrala kutova
b) simetrala stranica
c) dužina koje spajaju polovišta stranica
d) dužina koje spajaju polovište stranice s nasuprotnim vrhom.

10. (NI 2007.) Davor je mjerio po dva kuta u svakom od četiriju različitih trokutova i zapisao njihove mjere. Koji je od tih trokuta jednakokračan?

a) 50°, 60° b) 40°, 80° c) 30°, 90° d) 20°, 80°

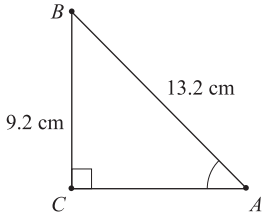
11. (NI 2007.) Ako je u pravokutnom trokutu sa slike $a = 15$ cm, $b = 6$ cm, tada je $\operatorname{tg}\alpha$ jednak:



a) 0.4
b) 2.5
c) $\frac{15}{\sqrt{261}}$
d) $\frac{6}{\sqrt{261}}$.

12. (NI2007.) Zbroj duljina kateta pravokutnog trokuta je 170 cm, a površina mu je 2 208 cm^2. Odredite duljine stranica trokuta.

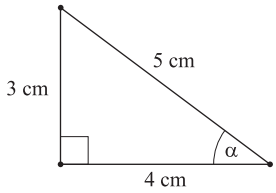
13. (IK 2007.) Kolika je mjera kuta u vrhu A?



14. (IK 2007.) Duljine stranica pravokutnog trokuta su 3 cm, 4 cm i 5 cm. Površina tog trokuta iznosi:

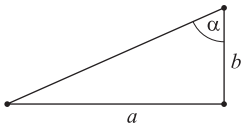
a) 6 cm^2 b) 10 cm^2 c) 12 cm^2 d) 30 cm^2.

15. (IK 2007.) U pravokutnom trokutu sa slike, $\sin\alpha$ jednak je:



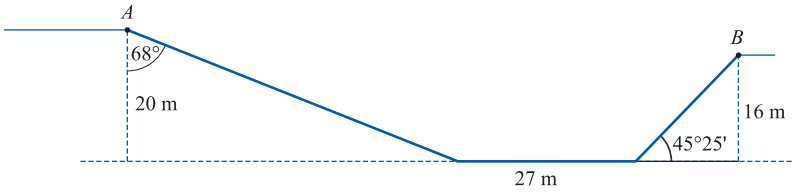
a) $\frac{3}{4}$ b) $\frac{3}{5}$ c) $\frac{4}{3}$ d) $\frac{4}{5}$.

16. (IK 2007.) U pravokutnom trokutu sa slike $b = 10$ cm, a za kut α vrijedi $\sin\alpha = \frac{24}{25}$, $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{24}{7}$. Kateta a jednaka je:



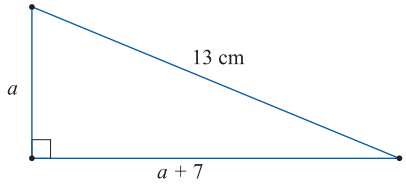
a) $\frac{240}{25}$ b) $\frac{7}{250}$ c) $\frac{240}{7}$ d) $\frac{7}{240}$.

17. (IK 2007.) Odmorišta A i B nalaze se na dvama susjednim brežuljcima. Put između njih prikazan je na slici.



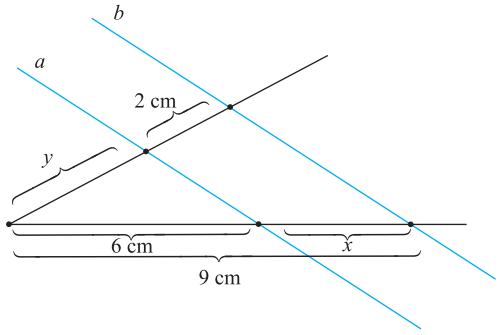
Koliki put treba prijeći da bi se iz mjesta A stiglo do mjesta B? (Zaokružite konačan rezultat na cijeli broj metara).

18. (NI 2008.) Opseg trokuta je 30 cm. Kolika je površina trokuta?



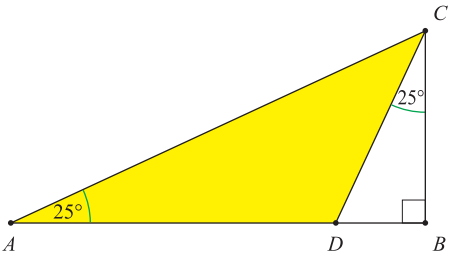
a) 75 cm^2
b) 60 cm^2
c) 30 cm^2
d) 17 cm^2

19. (NI 2008.) Pravci a i b su usporedni.

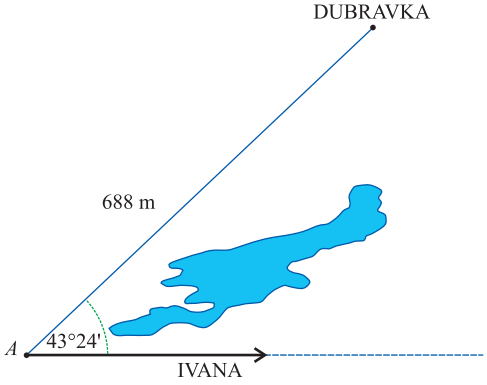


a) Odredite x.
b) Odredite y.

20. (NI 2008.) U trokutu sa slike $|BC| = 4\,\text{cm}$. Odredite površinu osjenčanog trokuta ΔADC.



21. (IK 2008.) Dubravka i Ivana komuniciraju elektronskim uređajem dometa 500 m. Dubravka stoji na mjestu, a Ivana hoda kako je prikazano na slici. Koliko metara Ivana može hodati od trenutka uspostavljanja do trenutka prekida komunikacije?



22. (NI 2009.) U pravokutnome trokutu ΔABC pravi je kut u vrhu C. Mjera kuta u vrhu A je 36°.

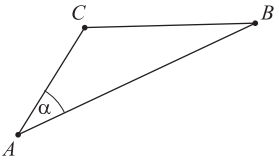
a) Kolika je mjera kuta u vrhu B ?

b) Koja je kateta trokuta dulja: $b = \overline{AC}$ ili $a = \overline{BC}$?

23. (NI 2009.) Mjere kutova trokuta su u omjeru $1:10:4$. Najdulja stranica ima duljinu 10 cm. Kolika je duljina najkraće stranice zaokružena na jednu decimalu?

a) 1.2 cm
b) 1.6 cm
c) 2.0 cm
d) 2.4 cm

24. (NI 2009.) U trokutu ΔABC je mjera kuta $\alpha = 20°$, $|AB| = 36$ cm i $|AC| = 18$ cm.



a) Izračunajte duljinu stranice $\overline{BC}$.

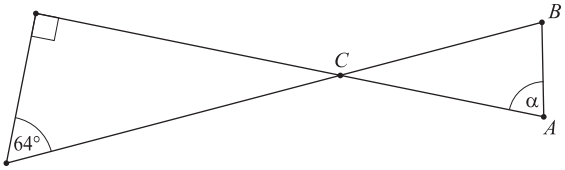
b) Izračunajte mjeru kuta β pri vrhu B.

25. (IK 2009.) U trokutu ΔABC zadane su duljine stranica $|AB| = 13$ cm, $|BC| = 9$ cm i mjera kuta $\angle ABC = 24°$.

a) Odredite površinu trokuta ΔABC.

b) Odredite duljinu stranice $\overline{AC}$ i rezultat zaokružite na dvije decimale.

26. (IK 2009.) Pravokutan i jednakokračan trokut imaju zajednički vrh C.



a) Odredite mjeru drugog šiljastog kuta u pravokutnom trokutu na slici.

b) Odredite mjeru kuta α uz osnovicu jednakokračnog trokuta ΔABC sa slike.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Površina pravokutnog trokuta iznosi 24 cm^2. Udaljenost točaka $A(2, 3)$ i $C(2, 9)$ je najkraća kateta tog trokuta. Koliki je opseg trokuta?

a) 16 b) 20 c) 24 d) 28

2. Izračunajte opseg jednakokračnog trokuta ako mu je osnovica duga 40 cm, a krak 8 cm duži od visine na osnovicu.

a) 56 cm b) 64 cm c) 98 cm d) 112 cm

3. Omjer katete a i hipotenuze c pravokutnog trokuta jednak je 3: 5, a površina 24 cm^2. Odredite mu opseg.

a) 12 cm b) 16 cm c) 20 cm d) 24 cm

4. Ako je u trokutu ΔABC $a = 13$ cm, $b = 15$ cm i $c = 14$ cm, tada duljina visine v_a na stranicu a iznosi:

a) $\frac{167}{13}$ cm b) $\frac{168}{13}$ cm c) $\frac{169}{13}$ cm d) $\frac{170}{13}$ cm.

5. Pravokutni trokut ima opseg 72 cm, a zbroj duljina kateta je 42 cm. Površina tog trokuta jednaka je:

a) 27 cm^2 b) 54 cm^2 c) 108 cm^2 d) 216 cm^2.

6. Omjer polumjera upisane i polumjera opisane kružnice pravokutnom trokutu s katetom 12 cm i hipotenuzom 13 cm jednak je:

a) 1 : 13 b) 2 : 13 c) 3 : 13 d) 4 : 13.

7. Duljine stranica trokuta odnose se kao $9:10:17$. Koliki je polumjer upisane kružnice tom trokutu ako je razlika najdulje i najkraće stranice 16 cm?

a) 2 cm b) 4 cm c) $4\sqrt{2}$cm d) 36 cm

8. Duljine stranica trokuta odnose se kao $9:10:17$. Koliki je polumjer opisane kružnice tom trokutu ako je umnožak najdulje i najkraće stranice 612 cm?

a) 4 cm b) $\frac{17}{4}$ cm c) $\frac{85}{4}$ cm d) $\frac{17\sqrt{2}}{4}$ cm

9. Površina trokuta sa stranicama 3, 4 i 7 cm iznosi:

a) 7 cm^2 b) 10 cm^2
c) 13 cm^2 d) ne postoji takav trokut.

10. Ako su $A(0, 2)$, $B(4, 0)$ i $C(2, 8)$ vrhovi trokuta ΔABC, tada je udaljenost vrha A do težišta tog trokuta:

a) $\frac{2}{3}\sqrt{7}$ b) $\frac{2}{3}\sqrt{10}$ c) $\frac{2}{3}\sqrt{13}$ d) $\frac{2}{3}\sqrt{17}$.

11. Duljine stranica trokuta odnose se kao $9.25:3.25:10$, a opseg mu je 90 cm. Duljina polumjera upisane kružnice iznosi:

a) $\frac{14}{3}$ cm b) 5 cm c) $\frac{16}{3}$ cm d) $\frac{17}{3}$ cm.

12. Opseg jednakokračnog trokuta je 78 cm, a razlika kraka i osnovice 6 cm. Izračunajte površinu trokuta.

a) $\sqrt{663}$ cm^2 b) $11\sqrt{663}$ cm^2 c) $22\sqrt{663}$ cm^2 d) 663 cm^2

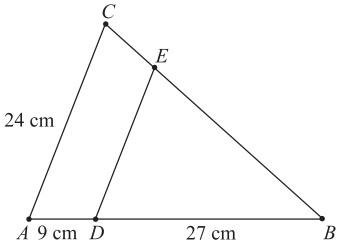
13. Stranica $\overline{AB}$ trokuta ΔABC duga je 9 cm. Stranice $\overline{AC}$ i $\overline{BC}$ tog trokuta čine na pravcu p paralelnom sa stranicom $\overline{AB}$ odsječak duljine 3 cm. Ako je udaljenost vrha C trokuta ΔABC od pravca p jednaka 3, kolika je udaljenost pravca p od stranice $\overline{AB}$?

a) 3 cm b) 6 cm c) 9 cm d) 4.5 cm

14. Opsezi dvaju sličnih trokuta $\Delta A_1B_1C_1$ i $\Delta A_2B_2C_2$ jednaki su 36 cm i 24 cm. Kolika je duljina stranice $\overline{A_2B_2}$ trokuta $\Delta A_2B_2C_2$, ako je stranica $\overline{A_1B_1}$ trokuta $\Delta A_1B_1C_1$ duga 6 cm?

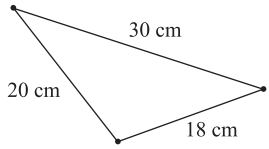
a) 2 cm b) 4 cm c) 12 cm d) 16 cm

15. Duljina dužine $\overline{DE}$ sa slike je:



a) 6 cm
b) 8 cm
c) 16 cm
d) 18 cm.

16. Površina trokuta sa slike najbliža je:

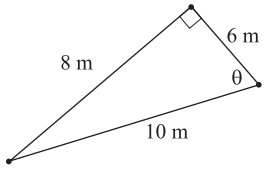


a) 34 cm^2
b) 68 cm^2
c) 175 cm^2
d) 180 cm^2.

17. Kut depresije pod kojim se vidi auto s vrha tornja je 23°. Toranj je visok 34.6 m, a podnožje tornja i auto na istoj su visini. Udaljenost auta i tornja je:

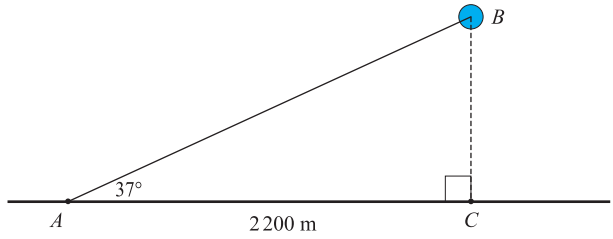
a) 14.7 m b) 15.7 m c) 34.7 m d) 81.5 m.

18. Za trokut sa slike vrijednost cos θ jednak je:



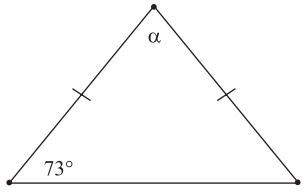
a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{3}{4}$
c) $\frac{4}{5}$ d) $\frac{5}{4}$.

19. Za promatrača koji stoji u točki *A*, kut elevacije prema balonu *B* je 37°. Točka *C* nalazi se točno ispod balona na tlu. Udaljenost točke *C* i promatrača je 2 200 m. Na kojoj je visini balon iznad tla, zaokruženo na najbliži metar?



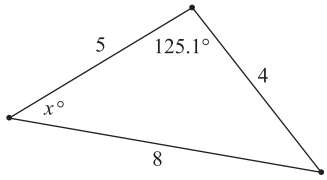
a) 1 324 m
b) 1 658 m
c) 1 757 m
d) 2 919 m

20. U jednakokračnom trokutu sa slike vrijednost kuta α je:



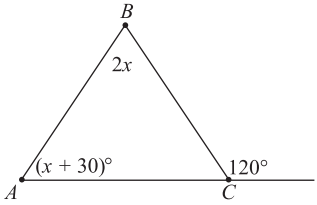
a) 17°
b) 34°
c) 73°
d) 107°.

21. Vrijednost $\sin x^\circ$ trokuta sa slike dana je izrazom:



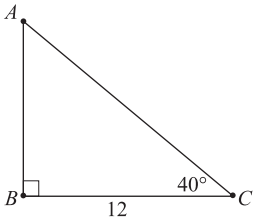
a) $\frac{\sin 125.1^\circ}{2}$ b) $\frac{5^2+4^2-8^2}{2\cdot 5\cdot 4}$
c) $2\cdot\sin 125.1^\circ$ d) $\frac{5\cdot\sin 125.1^\circ}{8}$.

22. Kolika je vrijednost kuta x (sa slike)?



a) 20°
b) 30°
c) 60°
d) 90°

23. Koju od zadanih funkcija možemo koristiti kako bismo izračunali duljinu stranice $\overline{AB}$?



a) tg 50°
b) sin 50°
c) cos 40°
d) sin 40°

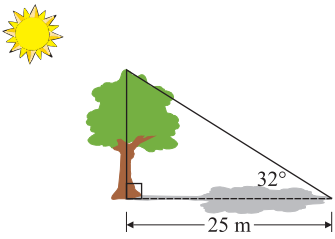
24. Ako je kut α u trokutu tupi kut, koji je od sljedećih izraza za kutove β i γ točan?

a) $\beta + \gamma = 90°$ b) $\beta + \gamma > 90°$ c) $\beta + \gamma < 90°$ d) $\beta + \gamma = 180°$

25. Koji skup brojeva predstavlja duljine stranica jednakokračnog trokuta?

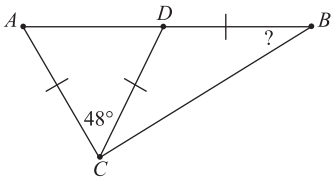
a) {4, 5, 7} b) {8, 8, 16} c) {6, 6, 13} d) {5, 5, 9}

26. Sjena stabla za sunčanog dana dugačka je 25 m, kao što je prikazano na slici. Kolika je visina stabla?



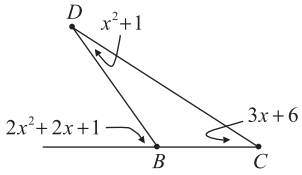
a) 13.2 m
b) 15.6 m
c) 21.2 m
d) 40 m

27. U trokutu sa slike vrijedi $\overline{AC} \cong \overline{DC} \cong \overline{DB}$. Kolika je veličina kuta u vrhu B?



a) 24°
b) 33°
c) 48°
d) 66°

28. U trokutu sa slike kutovi su dani izrazima. Koliki je unutarnji kut $\angle DBC$?



a) 24°
b) 125°
c) 155°
d) 158°

29. Stranice trokuta su 5 cm, 6 cm i 10 cm. Kolika je duljina najveće stranice sličnog trokuta ako je najkraća duga 15 cm?

a) 10 cm b) 15 cm c) 18 cm d) 30 cm

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite opseg i površinu jednakostraničnog trokuta stranice duljine 7 cm.

2. Odredite površinu jednakostraničnog trokuta kojemu je polumjer upisane kružnice 2 cm.

3. Duljine stranica trokuta su 3 cm, 4 cm i 5 cm. Odredite površinu kruga opisanog tom trokutu.

4. Duljine stranica trokuta su $a = 8$ cm i $b = 6$ cm, a visina na stranicu a je $v_a = 4$ cm. Za koliko je dulja visina v_b spuštena na stranicu b od visine v_a?

5. U jednakokračnom trokutu osnovica je za 2 cm, a krak za 1 cm dulji od visine na osnovicu. Odredite površinu tog trokuta.

6. Duljine stranica trokuta su 13 cm, 14 cm i 15 cm. Kolika je najkraća visina tog trokuta?

7. Duljina stranice trokuta je $b = 24$ cm, visina na stranicu a je $v_a = 12\sqrt{3}$ cm, a polumjer trokutu opisane kružnice $R = 7\sqrt{3}$ cm. Kolika je duljina stranice c?

8. Površine sličnih trokuta su u omjeru $36 : 49$. Ako je opseg manjeg trokuta 27 cm, koliki je opseg većeg trokuta?

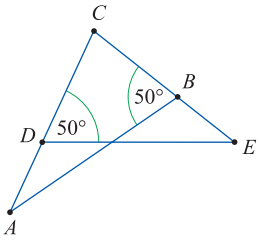
9. Stranice sličnih trokuta odnose se u omjeru $2 : 5$. Površina manjeg je 40 dm^2, kolika je površina većeg trokuta?

10. Duljine stranica trokuta i njemu sličnog trokuta su $a = 32$ cm, $b = 28$ cm, $b' = 70$ cm, $c' = 110$ cm. Koliki su opsezi tih trokuta?

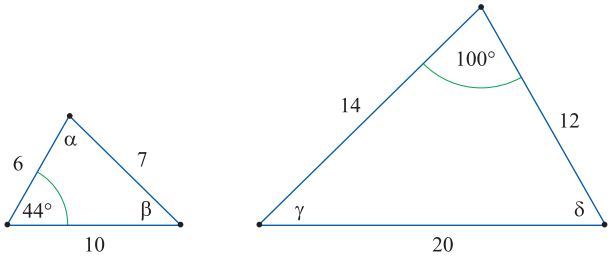
11. Duljine stranica jednog trokuta su 24 cm, 42 cm i 30 cm, a opseg njemu sličnog trokuta 32 cm. Kolike su duljine stranica sličnog trokuta?

12. Duljine stranica jednog trokuta su 3 cm, 5 cm i 7 cm. Odredite duljine stranica sličnog trokuta čija je površina četiri puta veća od površine trokuta čije su stranice zadane.

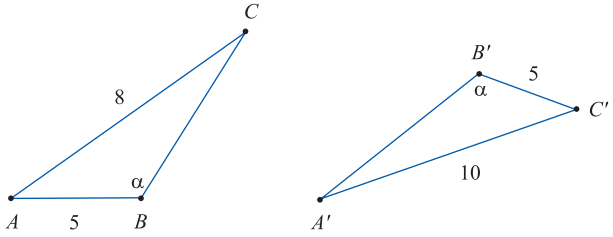
13. Jesu li trokuti ΔABC i ΔCDE slični?



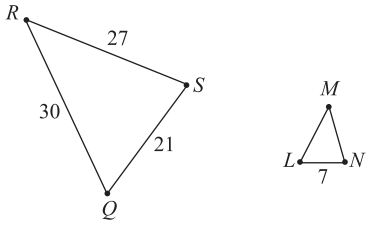
14. Jesu li donji trokuti slični? Odredite sve unutarnje kutove obaju trokutova.



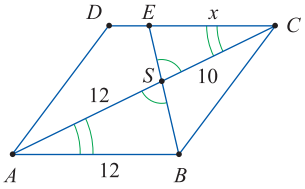
15. Jesu li donji trokuti slični?



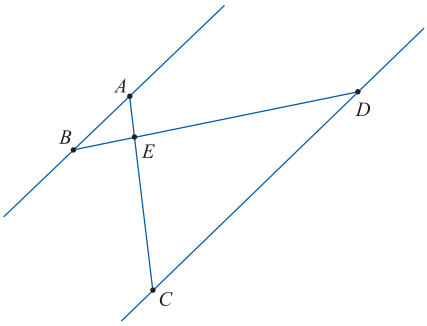
16. Trokuti ΔQRS i ΔLMN su slični. Koristeći podatke sa slike, odredite duljinu stranice $\overline{ML}$.



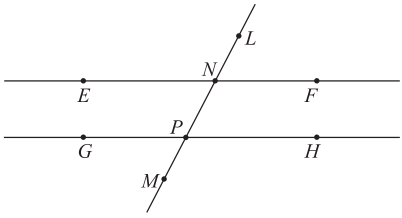
17. Odredite duljinu $x = |EC|$.



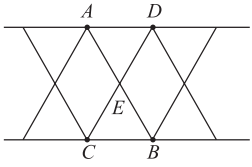
18. Jesu li trokuti ΔABE i ΔCDE slični?



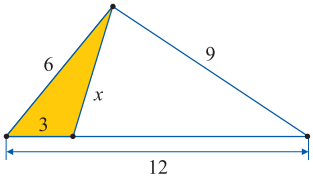
19. Na slici paralelni pravci kroz točke EF i GH presječeni su pravcem kroz točke LM u točkama N i P. Ako je $\angle LNF = 62°$, odredite $\angle NPG$.



20. Uzorak potpornja na mostu prikazan je na slici. Neka se $\overline{AB}$ i $\overline{CD}$ sijeku u točki E. Ako je $\angle AED = 3x + 30°$ i $\angle CEB = 7x - 10°$, odredite vrijednost x.



21. Jesu li najveći trokut i osjenčani trokut slični? Odredite x.



22. U pravokutni trokut s katetama duljina 4 cm i 6 cm upisan je kvadrat tako da mu je jedan vrh u vrhu pravog kuta, a nasuprotni na hipotenuzi. Kolika je duljina stranice kvadrata?

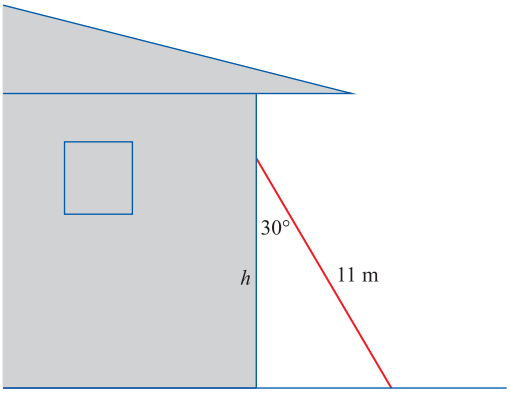
23. Dane su dvije duljine stranica trokuta $\overline{AB} = 4$ cm i $\overline{AC} = 6$ cm koje zatvaraju kut $\alpha = 60°$. Odredite duljinu težišnice tog trokuta spuštene iz vrha C.

24. Duljina jedne stranice trokuta je 2 cm, a kutovi uz tu stranicu su 30° i 45°. Odredite površinu trokuta.

25. Duljine stranica trokuta su $a = 4$ cm i $b = 6$ cm, a kut $\gamma = 60°$. Kolika je duljina visine na stranicu c?

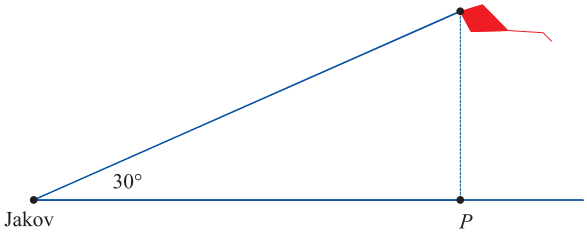
26. Duljine dviju stranica trokuta su $a = 25$ cm i $b = 30$ cm, a za njima nasuprotne kutove vrijedi $2\alpha = \beta$. Odredite duljinu stranice c.

27. Ljestve dugačke 11 metara prislonjene su uz kuću pod kutom od 30°.

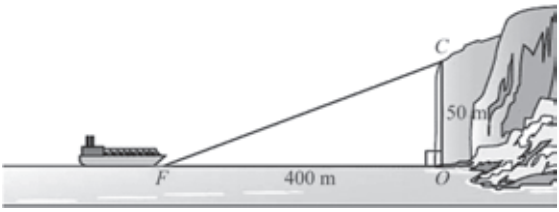


a) Koliko je podnožje ljestava udaljeno od kuće?
b) Na kojoj su visini ljestve prislonjene na kuću?

28. Jakov pušta zmaja na uzici dugačkoj 37 metara. Kut između uzice i vodoravnog „pravca“ je 30°. Točka P je točno ispod zmaja. Na kojoj je visini zmaj?

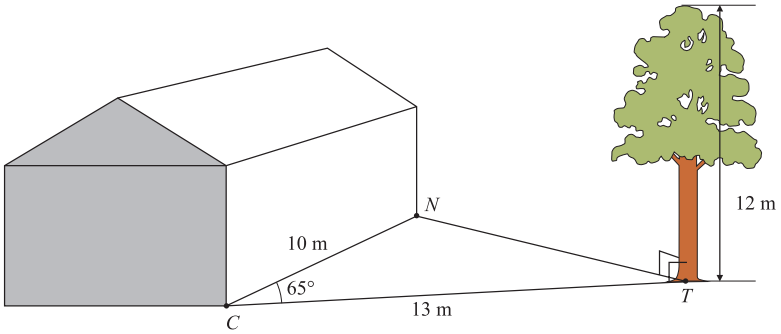


29. Trajekt F je 400 m udaljen od točke O podno grebena. Visina grebena $|OC| = 50$ m



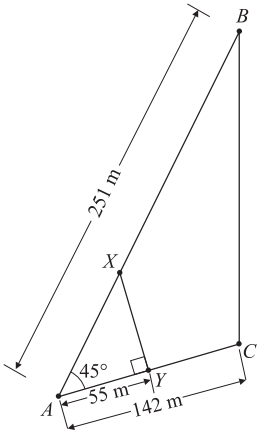
a) Izračunajte kut elevacije od točke F do točke C. Napišite odgovor u stupnjevima i zaokružite na jedno decimalno mjesto.
b) Kolika je udaljenost $|FC|$? (Zaokružite odgovor na jedno decimalno mjesto.)

30. Stablo visoko 12 metara raste pokraj štaglja. Udaljenost $|CT|$ od točke C štaglja do točke T u podnožju stabla je 13 m.



a) Izračunajte kut elevacije od vrha stabla do točke C. Zapišite rješenje pomoću stupnjeva i minuta.
b) Odredite udaljenost točaka N i T.
c) Izračunajte mjeru kuta $\angle CNT$ zaokružujući na najbliži stupanj.
d) Je li moguće da drvo, ako padne, udari u štagalj?

31. Velimir ima mali komad zemlje u obliku trokuta, kao na slici.



Međa $\overline{AB}$ duga je 251 metar, a međa $\overline{AC}$ 142 metra.
Kut $\angle BAC = 45°$. Ravni put, $\overline{XY}$, okomit je na među $\overline{AC}$.
Točka Y je 55 metra udaljena od točke A duž međe $\overline{AC}$.

a) Odredite kut $\angle AXY$.
b) Odredite duljinu $\overline{AX}$. Napišite odgovor u metrima, zaokružen na jedno decimalno mjesto.
c) Odredite najkraću udaljenost od X do C. Napišite odgovor u metrima, zaokružen na jedno decimalno mjesto.
d) Odredite površinu trokuta ΔABC. Odgovor zaokružite na najbliži kvadratni metar.

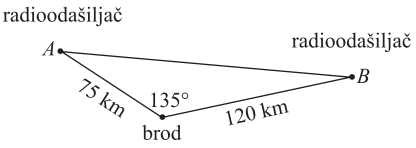
e) Odredite duljinu međe $\overline{BC}$.
f) Odredite mjeru kuta $\angle ABC$. Zapišite odgovor u stupnjevima i zaokružite na jedno decimalno mjesto.
g) Velimir planira napraviti ogradu uz put $\overline{XY}$, okomito na među $\overline{AC}$. Ograđeni dio, trokut ΔAXY, ima površinu 3 200 m^2. Odredite duljinu ograde $\overline{XY}$.

32. Ako su duljine stranica trokuta 9 cm, 12 cm i 15 cm, kolika je površina trokuta čiji su vrhovi polovišta duljina stranica trokuta?

33. Vatrogasci su iskopali tri rova u obliku trokuta kako bi spriječili širenje požara u šumu. Duljine rovova su 250 m, 312 m i 490 m.
a) Odredite mjeru najmanjeg kuta trokuta kojeg oblikuju rovovi. (Zaokružite na najbliži stupanj.)
b) Odredite površinu zemlje koju omeđuju rovovi. (Zaokružite na najbliži kvadratni metar.)

34. Za mjerenje udaljenosti kroz planine za predloženo mjesto tunela, geodet je izabrao točke A i B, na svakom kraju tunela i točku C u blizini planine. Odredili su da je udaljenost točaka A i C jednaka 3 800 metara, udaljenost točaka B i C je 2 900 metara, a mjera kuta $\angle ACB = 110°$. Izračunajte duljinu tunela zaokružujući na najbliži metar.

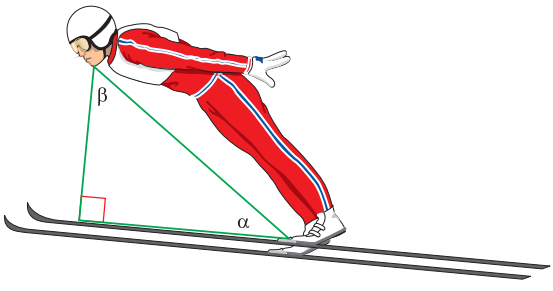
35. Kao što je prikazano na slici, brod na moru je 75 km udaljen od radioodašiljača A i 120 km od odašiljača B. Kut između signala koje odašiljači šalju prema brodu je 135°.



a) Odredite udaljenost odašiljača, zaokružujući na najbliži km.
b) Koristeći rezultat zadatka a), odredite mjeru kuta kod odašiljača B, zaokružujući na stupnjeve.

36. Tri kružnice polumjera 1, 2 i 3 cm izvana se međusobno dodiruju. Kakav je trokut kojeg čine središta danih kružnica?

37. Skakačevo tijelo čini sa svojim skijama pravokutan trokut, kao što je prikazano na slici. Ako je $\alpha = 32°$, odredite kut β.



RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. c **2.** c **3.** d **4.** Brod se približi obali za 1.2 m. **5.** b
6. a) 4.5 m b) 1 m **7.** a **8.** c **9.** d **10.** d **11.** b
12. 138 i 32 **13.** 44° 11' 4" **14.** a **15.** b **16.** c **17.** 103 m
18. c **19.** a) $x = 3$ cm b) $y = 4$ cm **20.** 13.43 **21.** ≈ 325.82 m
22. a) 54° b) $\overline{AC}$ **23.** d **24.** a) 20 b) 18°
25. a) $P = 23.8\ \text{cm}^2$ b) $\left|\overline{AC}\right| = 6.02$ cm **26.** a) 26° b) $\alpha = 77°$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** c **3.** d **4.** b **5.** d **6.** d **7.** b **8.** c **9.** d
10. c **11.** c **12.** b **13.** b **14.** b **15.** d **16.** c **17.** d **18.** a
19. b **20.** b **21.** a **22.** b **23.** a **24.** c **25.** d **26.** b **27.** b
28. c **29.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

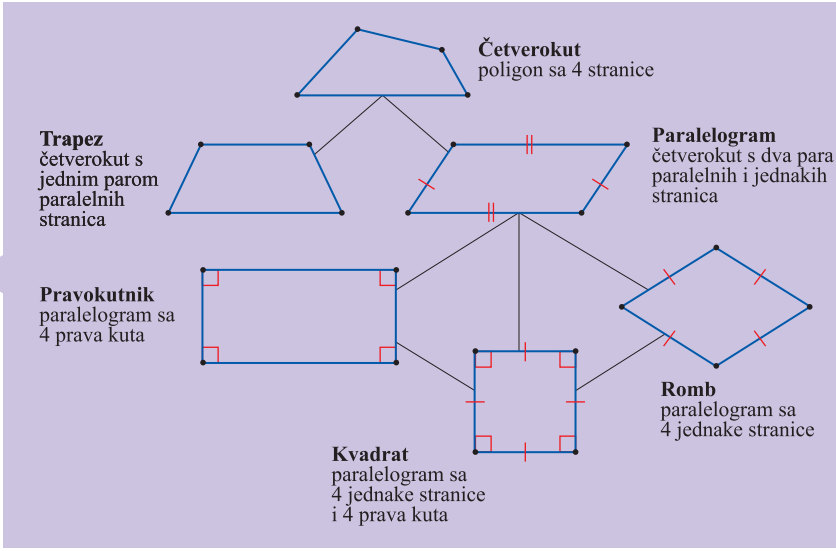
1. $O = 21\text{cm}$, $P = 12.25\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **2.** $P = 12\sqrt{3}\ \text{cm}^2$ **3.** $P = \frac{25}{4}\pi\ \text{cm}^2$ **4.** $v_b - v_a = \frac{4}{3}\text{cm}$
5. $P = 12\ \text{cm}^2$ **6.** $v = 11.2$ cm **7.** $c = 21$ cm **8.** $O = 31.5$ cm
9. $P = 250\ \text{dm}^2$ **10.** $c = 44$ cm, $a' = 80$ cm, $O = 104$ cm, $O' = 260$ cm
11. $a_1 = 8$ cm, $b_1 = 14$ cm, $c_1 = 10$ cm **12.** $a_1 = 6$ cm, $b_1 = 10$ cm, $c_1 = 14$ cm
13. da **14.** da, $\alpha = 100°$, $\beta = \gamma = 36°$, $\delta = 44°$ **15.** ne **16.** $|ML| = 10$
17. $x = 10$ **18.** da **19.** 118° **20.** $x = 10°$ **21.** da, $x = 4.5$
22. 2.4 **23.** $t_c = 2\sqrt{7}$ cm **24.** $P = \left(\sqrt{3} - 1\right)\text{cm}^2 \approx 0.732\,\text{cm}^2$
25. $v = 3.93$ cm **26.** $c_1 = 11$ cm i $c_2 = 25$ cm **27.** a) 5.5 m b) $5.5\sqrt{3}$ m
28. 18.5 m **29.** a) 7.1° b) 403.1 m

30. a) 42° 42'
b) 12.6
c) 69° 14' 28"
d) Najmanja udaljenost drveta i štaglja je 11.8 m, a drvo je visoko 12 m, znači drvo može udariti u štagalj.

31. a) 45°
b) 77.8 m
c) 102.9 m
d) 1 2601 m^2
e) 181
f) 33.7°
g) 80 m

32. 13.5 cm^2 **33.** a) 26° b) 33 443 m^2 **34.** 5 513 m
35. a) 181 km b) 17°
36. Pravokutan. **37.** $\beta = 58°$

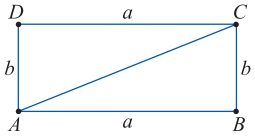
4.1.2. Četverokut i mnogokut



Kvadrat je geometrijski lik koji ima sve stranice jednake i sve kutove prave. Dijagonale se raspolovljuju i sijeku pod pravim kutom.

Opseg i površina kvadrata: $O = 4a,\ P = a^2$, a dijagonala $d = a\sqrt{2}$.

Pravokutnik ima dva para paralelnih i jednakih stranica i sve kutove prave.

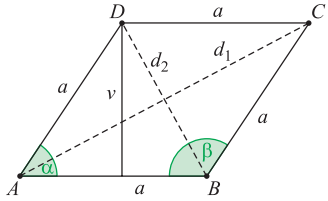


Dijagonale se raspolovljuju i vrijedi: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Opseg i površina pravokutnika:

$O = 2a + 2b,\ P = a \cdot b.$

Romb je četverokut kojemu su sve stranice jednake, a po dvije paralelne. Dijagonale se u rombu raspolovljuju i sijeku pod pravim kutom.

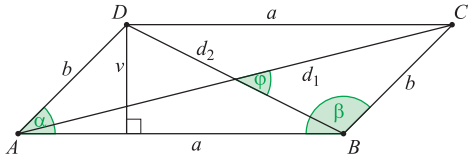


$\alpha + \beta = 180°,\ \sin\alpha = \dfrac{v}{a} \quad \Rightarrow \quad v = a\sin\alpha$

Opseg i površina romba:

$O = 4a,\ P = av,\ P = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2}.$

Paralelogram je četverokut koji ima po dvije jednake i paralelne stranice. Dijagonale se u paralelogramu raspolovljuju i sijeku pod kutom φ. Nasuprotni kutovi su mu jednaki.



$\alpha + \beta = 180°$

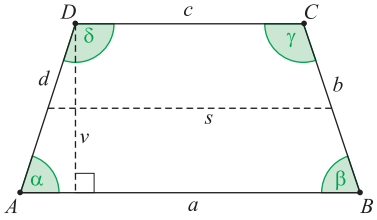
$\sin\alpha = \dfrac{v}{b} \quad \Rightarrow \quad v = b\sin\alpha$

Opseg i površina paralelograma

$O = 2a + 2b,\ P = a \cdot v,\ P = bv_b$

$P = ab\sin\alpha,\ P = \dfrac{d_1 d_2}{2}\sin\varphi$

Trapez ima jedan par paralelnih stranica (osnovice trapeza).



Spojnica polovišta krakova je srednjica trapeza i paralelna je s osnovicama.

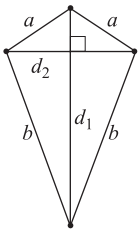
$$s = \frac{a+c}{2}$$

Ako su krakovi trapeza jednaki, govorimo o jednakokračnom trapezu.

Opseg i površina trapeza

$$O = a+b+c+d, \quad P = s \cdot v = \frac{a+c}{2} \cdot v$$

Deltoid ima po dvije susjedne stranice jednake, a dijagonale mu se sijeku pod pravim kutom.

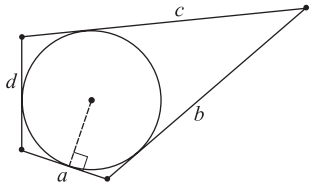


Opseg i površina deltoida

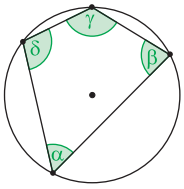
$$O = 2a+2b, \quad P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$$

Zbroj svih unutarnjih kutova četverokuta iznosi $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$ (dva trokuta po 180°), peterokuta 540°, šesterokuta 720°, sedmerokuta 900°, itd.

Tangencijalni četverokut je svaki četverokut kojemu se može upisati kružnica i u kojem vrijedi $a + c = b + d$.

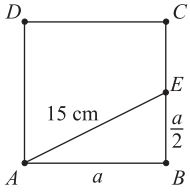


Tetivni četverokut je onaj četverokut kojemu se može opisati kružnica i vrijedi $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.



Primjer 1: Iz jednog vrha kvadrata povučena je dužina duljine 15 cm koja taj vrh spaja s polovištem jedne od nasuprotnih stranica. Izračunajmo površinu kvadrata.

Rješenje: Iz pravokutnog trokuta ΔABE slijedi:



$$a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 15^2$$

$$a^2 + \frac{a^2}{4} = 225 \cdot 4$$

$$5a^2 = 900 : 5$$

$$a^2 = 180 \quad \Rightarrow \quad a = 6\sqrt{5} \text{ cm}$$

$$P = a^2 = 180 \text{ cm}^2.$$

Primjer 2: Za koliko će se postotaka povećati površina pravokutnika, ako mu se stranica $a = 5$ cm poveća za 3 cm, a stranica $b = 4$ cm poveća za 4 cm?

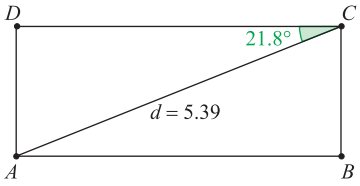
Rješenje: $P_1 = a_1 b_1 = 5 \cdot 4 = 20 \text{ cm}^2, \quad P_2 = a_2 b_2 = 8 \cdot 8 = 64 \text{ cm}^2$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{64}{20} \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 3.2 \Rightarrow P_2 = 3.2 P_1 \Rightarrow P_2 = P_1 + 2.2 P_1$$

Površina se poveća za $2.2 \cdot 100 = 220\%$.

Primjer 3: Odredimo opseg pravokutnika kojemu je duljina dijagonale 5.39 cm, a kut koji ta dijagonala zatvara s duljom stranicom pravokutnika $21° 48'$.

Rješenje: Iz pravokutnog trokuta ΔACD izračunat ćemo duljine stranica a i b.



$$\sin\alpha = \frac{b}{d} \Rightarrow b = d \sin\alpha \Rightarrow b = 5.39 \cdot \sin 21° 48' = 2 \text{ cm}$$

$$\cos\alpha = \frac{a}{d} \Rightarrow a = d \cos\alpha \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

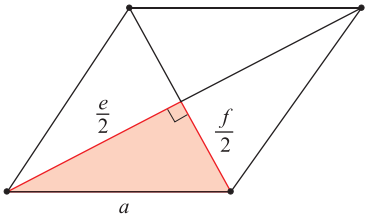
$$O = 2a + 2b = 10 + 4 = 14 \text{ cm}$$

Primjer 4: Omjer dijagonala romba je 3:4, a opseg 20 cm. Odredimo površinu danog romba.

Rješenje: Iz opsega romba izračunamo stranicu a.

$$O = 4a \Rightarrow 20 = 4a \Rightarrow a = 5 \text{ cm}$$

Za dijagonale romba vrijedi $e : f = 3 : 4$,
pa je $\Rightarrow e = 3k, \; f = 4k$.



$$a^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 + \left(\frac{f}{2}\right)^2$$

$$25 = \left(\frac{3k}{2}\right)^2 + \left(\frac{4k}{2}\right)^2$$

$$25 = \frac{9k^2}{4} + \frac{16k^2}{4} \Big/ \cdot 4$$

$$100 = 25k^2 \Big/ : 25$$

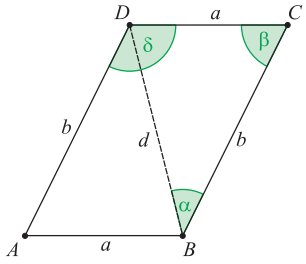
$$k^2 = 4 \Rightarrow k = 2$$

Duljine dijagonala su $e = 6$ cm i $f = 8$ cm.

Površina romba je $P = \frac{ef}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24 \text{ cm}^2$.

Primjer 5: U paralelogramu $ABCD$ omjer duljine stranice $\overline{AB}$ i kraće dijagonale $\overline{BD}$ je $1:\sqrt{3}$. Odredimo tupi kut paralelograma, ako kut između dijagonale $\overline{BD}$ i stranice $\overline{BC}$ iznosi 30°.

Rješenje: $a:d=1:\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad a=k,\ d=\sqrt{3}k$



Prema sinusovom poučku iz trokuta ΔDBC slijedi:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{d}{\sin\beta} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta=\frac{d\cdot\sin 30^\circ}{a}=$$

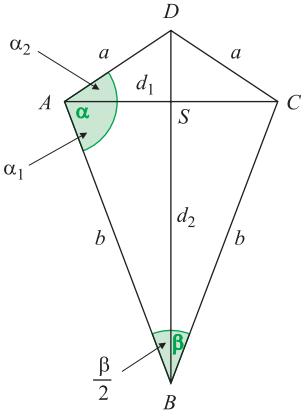
$$=\frac{\sqrt{3}k\cdot\frac{1}{2}}{k}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\beta=60^\circ.$$

Tupi kut paralelograma je: $\delta=180^\circ-60^\circ=120^\circ$.

Primjer 6: U deltoidu zadani su kutovi $\alpha=115^\circ$ i $\beta=50^\circ$, te duljina stranice $|AC|=14$ cm. Odredimo opseg i površinu zadanog deltoida.

Rješenje: Iz pravokutnog trokuta ΔASB slijedi:



$$\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}=\frac{|AS|}{|BS|}. \quad \Rightarrow \quad |BS|=\frac{|AS|}{\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}}=\frac{7}{\operatorname{tg}25^\circ}=15\text{ cm}.$$

$$b=\sqrt{|AS|^2+|BS|^2}=\sqrt{7^2+15^2}=16.55\text{ cm}$$

$$\frac{\beta}{2}+\alpha_1=90^\circ \Rightarrow \alpha_1=65^\circ \Rightarrow \alpha_2=\alpha-\alpha_1=50^\circ$$

Sada iz trokuta ΔASD imamo:

$$\operatorname{tg}\alpha_2=\frac{|DS|}{|AS|}. \quad \Rightarrow \quad |DS|=7\cdot\operatorname{tg}50^\circ=8.34\text{ cm}.$$

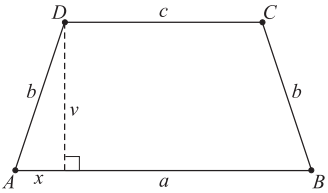
Dijagonale su $d_1=14$ cm i
$d_2=|BS|+|DS|=15+8.34=23.34$ cm.

$$a=\sqrt{|AS|^2+|dS|^2}=\sqrt{7^2+8.34^2}=10.89\text{ cm}$$

Opseg deltoida je $O=2a+2b=54.88$ cm,
a površina $P=\frac{d_1d_2}{2}=163.38\text{ cm}^2$.

Primjer 7: Osnovica jednakokračnog trapeza je $a = 18$ cm, a krak $b = 13$ cm. Odredimo površinu trapeza ako se u njega može upisati kružnica.

Rješenje: Ako se u trapez može upisati kružnica, onda je on tangencijalni četverokut.



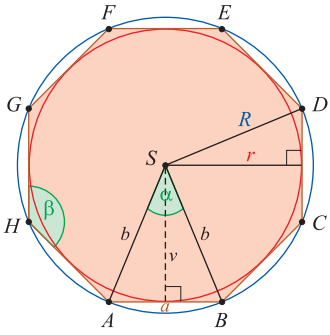
$$a + c = b + d \Rightarrow 18 + c = 13 + 13 \Rightarrow c = 8 \text{ cm}$$

$$x = \frac{a-c}{2} = \frac{18-8}{2} = 5 \text{ cm}$$

$$v = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{169 - 25} = \sqrt{144} = 12 \text{ cm}$$

$$P = \frac{a+c}{2} \cdot v = \frac{26}{2} \cdot 12 = 156 \text{ cm}^2$$

Mnogokut (poligon) je dio ravnine omeđen s pet ili više dužina (stranice mnogokuta). Mnogokut ima jednak broj vrhova, kutova i stranica. Općenito, kažemo da je n-terokut mnogokut s n stranica. Dijagonala mnogokuta je dužina koja spaja svaka dva vrha mnogokuta, osim susjednih.



Broj dijagonala n-terokuta je $d = \frac{n(n-3)}{2}$, a zbroj unutarnjih kutova $S = (n-2)\,180°$.

Mnogokut je **pravilan** ako su mu sve stranice i svi kutovi jednaki.

Svakom se pravilnom mnogokutu može upisati i opisati kružnica. Polumjer upisane kružnice je r, a opisane kružnice R. Ako je kružnica upisana mnogokutu, onda je $r = v$, gdje je v visina karakterističnog trokuta, a ako je opisana, onda je $R = b$.

U pravilnom n-terokutu središnji kut α nad stranicom a n-terokuta jednak je $\alpha = \frac{360°}{n}$. Unutarnji kut n-terokuta je $\beta = 180° - \alpha$.

Opseg i površina n-terokuta su $O = n \cdot a$, $P = n \cdot \frac{a \cdot v}{2}$.

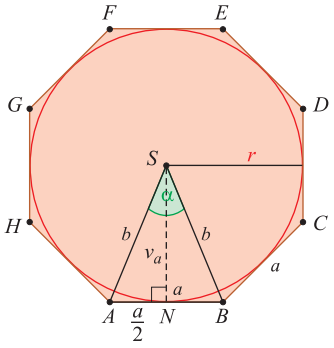
Primjer 8: Koliko dijagonala ima konveksni mnogokut kod kojeg je zbroj unutarnjih kutova 1 080°?

Rješenje: Zbroj unutarnjih kutova je $S = (n-2) \cdot 180° = 1\,080° \Rightarrow n = 8$.

Broj dijagonala je $d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8 \cdot 5}{2} = 20$.

Primjer 9: Odredimo površinu pravilnog osmerokuta opisanog kružnici polumjera $r = 9.1$ cm.

Rješenje: Površina osmerokuta jednaka je osmerostrukoj površini karakterističnog jednakokračnog trokuta, tj. $P = 8 \cdot \frac{a \cdot v_a}{2}$.



Središnji kut je $\alpha = \frac{360°}{8} = 45°$.

Visina trokuta je $v_a = r = 9.1$ cm.

Iz pravokutnog trokuta ΔANS slijedi:

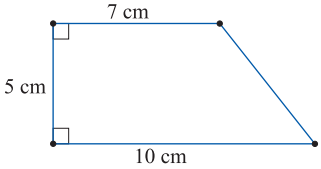
$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{v_a}. \quad \Rightarrow \quad a = 2v_a \cdot \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} =$$

$$= 2 \cdot 9.1 \cdot \operatorname{tg} 22° 30'$$
$$= 7.54 \text{ cm}.$$

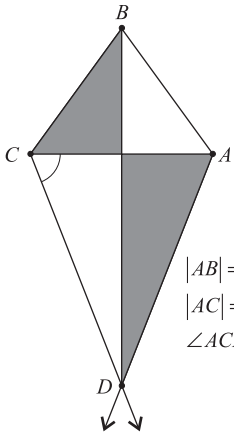
$$P = 4 \cdot 7.54 \cdot 9.1 = 274.456 \text{ cm}^2$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2007.) Odredite površinu i opseg lika sa slike.



2. (NI 2007.) Koliko m^2 tamnoga papira je potrebno za izradu zmaja (vidite skicu)?

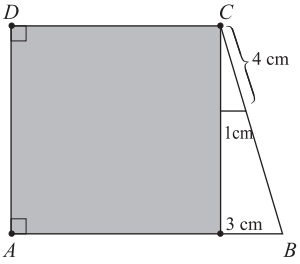


$|AB| = |CB| = 1.1$ m

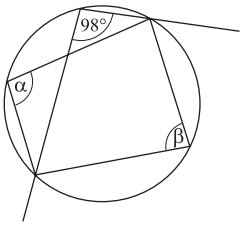
$|AC| = 1.2$ m

$\angle ACD = 70°$

3. (NI 2007.) Odredite površinu lika *ABCD* sa slike ako je osjenčani lik kvadrat.



4. (NI 2007.) Razlika mjera kutova α i β sa slike jednaka je:



a) 98°
b) 90°
c) 16°
d) 8°.

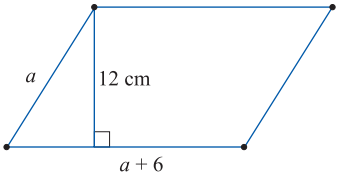
5. (IK 2007.) Opseg pravokutnika je 15 cm, a površina mu je 14 cm^2. Odredite duljine njegovih stranica.

6. (IK 2007.) Ukupan broj dijagonala konveksnog *n*-terokuta dan je formulom $d(n)=\frac{n(n-3)}{2}$.

Za konveksne mnogokute odredite:

a) ukupan broj dijagonala 10-erokuta
b) *n*-terokut u kojem je ukupan broj dijagonala jednak 119, a zatim *n*-terokut u kojem je ukupan broj dijagonala jednak 185
c) za koje je sve vrijednosti prirodnoga broja *n* broj dijagonala konveksnoga *n*-terokuta manji od 50.

7. (NI 2008.) Opseg paralelograma na slici je 80 cm. Površina mu je:

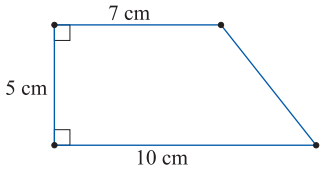


a) 276 cm^2 b) 144 cm^2
c) 138 cm^2 d) 84 cm^2.

8. (IK 2008.) Duljine osnovica jednakokračnoga trapeza su 20 cm i 6 cm, a površina mu je 31.2 cm^2. Duljina kraka trapeza je:

a) 14 cm b) 13 cm c) 7.4 cm d) 3.6 cm.

9. (IK 2008.) Zadan je četverokut.



a) Odredite duljinu nepoznate stranice četverokuta sa slike.
b) Odredite opseg lika sa slike.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Ako se stranica kvadrata smanji za 7 cm, njegova se površina smanji za 119 cm^2. Izračunajte opseg kvadrata.

a) 48 cm b) 50 cm c) 56 cm d) 49 cm

2. Opsezi dvaju kvadrata razlikuju se za 12 cm, a površine za 33 cm^2. Izračunajte stranicu manjeg kvadrata.

a) 4 cm b) 6 cm c) 7 cm d) 10 cm

3. Za koliko postotaka treba povećati stranicu kvadrata duljine 10 cm da bi se njegova površina povećala za 125%?

a) 25% b) 50% c) 75% d) 100%

4. Ako se dijagonala kvadrata smanji za 20%, tada se površina kvadrata smanji za:

a) 30% b) 32% c) 34% d) 36%.

5. Za koliko cm treba povećati stranicu kvadrata duljine 4 cm da bi se njegova površina povećala za 56.25%?

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm

6. Omjer stranica pravokutnika je 4 : 3, a duljina dijagonale 10 cm. Opseg tog pravokutnika je:

a) 12 cm b) 20 cm c) 28 cm d) 36 cm.

7. Izračunajte površinu romba čiji je opseg 2 m, a dijagonale mu se odnose kao 3 : 4.

a) $\frac{25}{6}\ m^2$ b) $\frac{25}{64}\ m^2$ c) $\frac{6}{25}\ m^2$ d) $\frac{9}{64}\ m^2$

8. U romb čije se dijagonale odnose kao 3 : 4 upisan je krug. Odredite odnos površine romba i površine upisanog mu kruga.

a) $26:(3\pi)$ b) $25:(6\pi)$ c) $26:(6\pi)$ d) $25:(3\pi)$

9. Izračunajte površinu kruga upisanog u romb opsega 4 cm čije se dijagonale odnose kao 4 : 3.

a) $\frac{12}{25}\pi$ cm^2 b) $\frac{144}{25}\pi$ cm^2 c) $\frac{144}{625}\pi$ cm^2 d) $\frac{12}{625}\pi$ cm^2

10. Osnovice jednakokračnog trapeza duge su 7 cm i 13 cm, a površina mu je 40 cm^2. Opseg tog trapeza je:

a) 33 cm b) 30 cm c) 28 cm d) 24 cm.

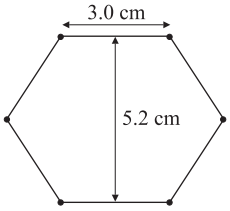
11. Ako se stranice trapeza $a = 10$ cm, $c = 4$ cm i visina $v = 5$ cm povećaju za 2 cm, tada se površina trapeza poveća za:

a) 40% b) 60% c) 80% d) 10%.

12. Ako se stranice trapeza $a = 12$ cm, $c = 6$ cm i visina $v = 4$ cm smanje za 2 cm, tada se površina trapeza smanji za:

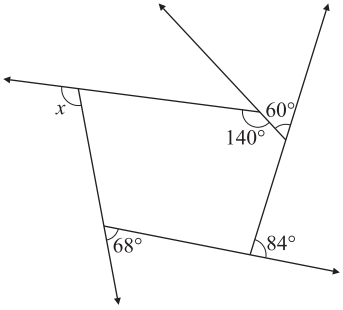
a) 22 cm^2 b) 12 cm^2 c) 18 cm^2 d) 24 cm^2.

13. Površina pravilnog šesterokuta na slici najbliža je:



a) 11.7 cm^2
b) 15.6 cm^2
c) 18 cm^2
d) 23.4 cm^2.

14. Kolika je mjera kuta x sa slike?

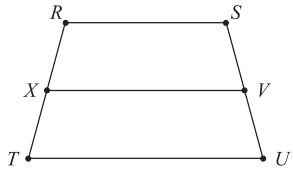


a) 72°
b) 96°
c) 108°
d) 112°

15. U paralelogramu $STUV$ stranice su dane izrazima $|SV| = x + 3$, $|VU| = 2x - 1$ i $|TU| = 4x - 3$.
Kolika je duljina stranice SV?

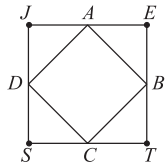
a) 5 b) 2 c) 7 d) 4

16. U trapezu $TUSR$ točka X je polovište $\overline{TR}$, a točka V polovište $\overline{US}$. Ako je $|RS| = 30$ cm i $|XV| = 44$ cm, kolika je duljina stranice $\overline{TU}$?



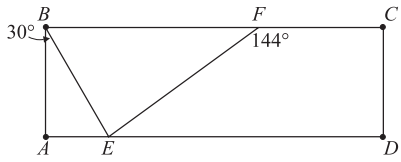
a) 37 cm
b) 58 cm
c) 74 cm
d) 118 cm

17. Točke A, B, C i D su polovišta stranica kvadrata $STEJ$ površine 36 cm^2. Kolika je površina četverokuta $ABCD$?



a) $9\sqrt{2}$ cm
b) $18\sqrt{2}$ cm
c) 9 cm
d) 18 cm

18. U pravokutniku na slici dani su kutovi $\measuredangle ABE = 30°$ i $\measuredangle EFC = 144°$. Koliki je kut $\measuredangle BEF$?

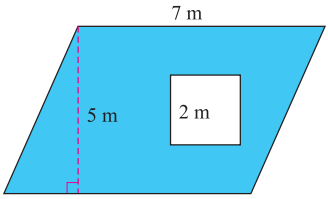


a) 36°
b) 60°
c) 84°
d) 90°

19. U rombu je kut koji dijagonala romba zatvara s osnovicom 35°. Koliki je tupi kut romba?

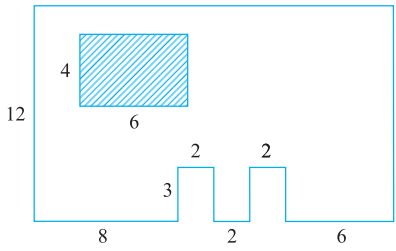
a) 35° b) 70° c) 110° d) 140°

20. Odredite površinu osjenčanog dijela. Neosjenčani dio je kvadrat.



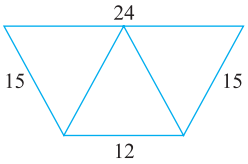
a) 31 m^2
b) 35 m^2
c) 13.5 m^2
d) 33 m^2

21. Odredite površinu neosjenčanog dijela ako su sve mjere u centimetrima.



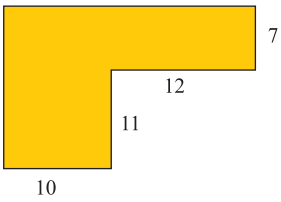
a) 152 cm^2
b) 240 cm^2
c) 204 cm^2
d) 196 cm^2

22. Lik na slici sastoji se od tri jednakokračna trokuta. Kolika je površina lika ako su sve mjere u metrima?



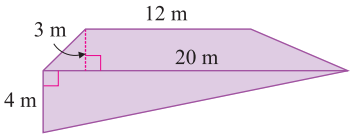
a) $54\sqrt{21}$ m^2
b) $36\sqrt{21}$ m^2
c) 252 m^2
d) 234 m^2

23. Koliko kvadratnih metara parketa treba kako bi se pokrio pod sobe kao na slici ako su sve mjere u metrima?



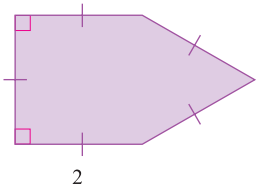
a) 312 m^2
b) 264 m^2
c) 396 m^2
d) 286 m^2

24. Odredite površinu lika sa slike.



a) 70 m^2
b) 100 m^2
c) 136 m^2
d) 88 m^2

25. Kolika je površina lika na slici ako je duljina stranice 2 cm? Zaokružite na jedno decimalno mjesto.



a) 6.9 cm^2
b) 6.0 cm^2
c) 5.7 cm^2
d) 5.2 cm^2

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Dječji vrtić „Kvadratić“ ima igralište pravokutnog oblika, 30 metara dugačko i 20 metara široko. Izračunajte duljinu puteljka koji ide dijagonalom tog pravokutnika zaokružujući na najbliži metar.

2. Odredite površinu paralelograma ako su njegove stranice 10 cm i 12 cm, a šiljasti kut paralelograma 60°.

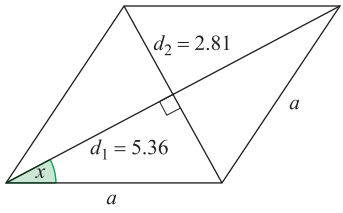
3. Nad dužinom duljine 12 cm opisana je polukružnica i pravokutnik, tako da su stranice pravokutnika tangente polukružnice. Kolika je površina između pravokutnika i polukruga?

4. Izračunajte duljine dijagonala romba ako je opseg romba 20 cm, a površina 24 cm^2.

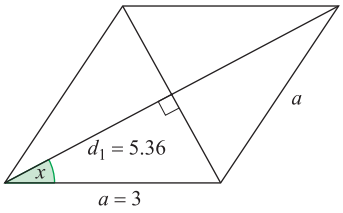
5. Dijagonale romba su 6 cm i 8 cm. Kolika je visina tog romba?

6. Odredite kut x u rombu na slici.

a)



b)

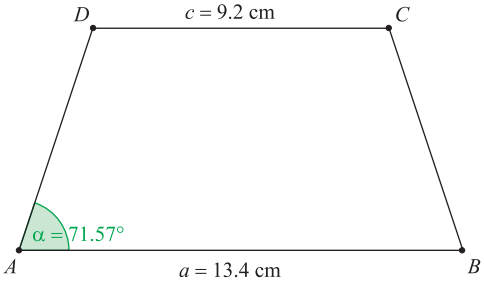


7. Površina trapeza je 390 cm^2, duljina osnovice 32 cm, a visina 15 cm. Odredite duljinu kraće osnovice trapeza.

8. Odredite duljine osnovica trapeza ako je razlika njihovih duljina 7 cm, duljina visine 6 cm, a površina trapeza 75 cm^2.

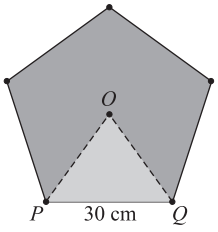
9. Kolika je površina pravokutnog trapeza čiji je opseg 94 cm, a duljine krakova su 17 cm i 8 cm?

10. Odredite opseg i površinu jednakokračnog trapeza sa slike.



11. Površina pravilnog šesterokuta je $54\sqrt{3}$ cm^2. Odredite omjer polumjera tom šesterokutu opisane i upisane kružnice.

12. Trajekt ima logo kao na slici. Logo je pravilni peterokut sa središtem u točki O i stranicom duljine 30 cm.



a) Kolika je mjera kuta $\angle QOP$?

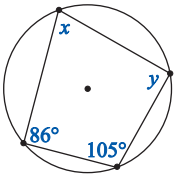
b) Odredite $|OP|$.

c) Kolika je površina peterokuta?
Odgovor zaokružite na najbliži cm^2.

13. Odredite površinu pravilnog sedmerokuta opisanog kružnici polumjera 6.2 cm.

14. Odredite površinu pravilnog deveterokuta upisanog u kružnicu polumjera 5.8 cm.

15. Odredite kutove x i y na slici.



16. Kružnici polumjera 8 cm opisan je i upisan pravilan šesterokut. Odredite razliku površina tih dvaju šesterokuta.

17. Odredite za koji najmanji n je unutarnji kut pravilnog n-terokuta veći od 163°.

18. Koliko stranica ima mnogokut koji ima pet puta više dijagonala nego stranica?

19. Unutarnji kut pravilnog mnogokuta je 165°. Odredite mu broj stranica.

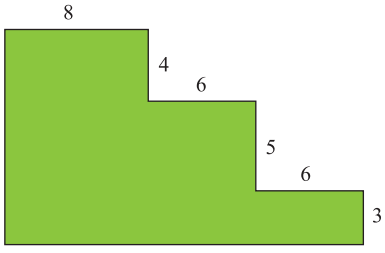
20. U pravilnom mnogokutu unutarnji kut je 100 puta veći od pripadnog središnjeg kuta stranice. Koliko stranica ima taj mnogokut?

21. Unutarnji kutovi četverokuta odnose se kao $1:5:7:2$. Koliki je najveći kut tog četverokuta?

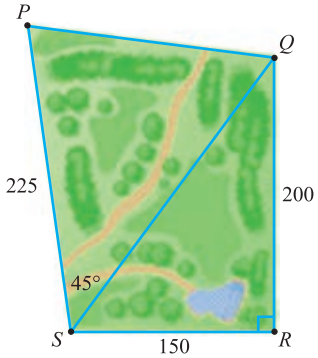
22. Deltoid upisan u kružnicu ima stranice duljine 1 cm i 2 cm. Koliki je omjer veće dijagonale prema manjoj?

23. U kružnicu je upisan deltoid. Ako je jedan od kutova među jednakim stranicama deltoida 60°, odredite omjer manje dijagonale prema većoj.

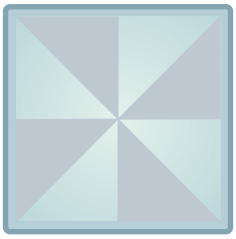
24. Odredite površinu lika na slici ako su sve mjere u metrima.



25. Ivan je kupio imanje četverokutnog oblika kao na slici i želi ga ograditi. Koliko će biti duga ograda ako su dane mjere u metrima?



26. Keramička pločica kvadratnog oblika sastoji se od osam jednakokračnih pravokutnih trokuta. Površina pločice je 576 cm².



a) Odredite duljinu dijagonale pločice.
b) Odredite površinu jednog trokuta na njoj.
c) Odredite duljinu hipotenuze trokuta.
d) Odredite ukupnu površinu tamnih trokuta.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. Opseg je $22+\sqrt{34}=27.83\,\text{cm}$, $P=\frac{85}{2}\,\text{cm}^2$ **2.** 0.771 m²

3. $P=135+\frac{9\sqrt{15}}{2}\,\text{cm}^2$ **4.** c **5.** $a=4\,\text{cm}$, $b=\frac{7}{2}\,\text{cm}$

6. a) 35 dijagonala b) 17-terokut, nema c) $n<12$ ($n\leq 11$)

7. $a=17$ cm, $P=276$ cm², odgovor a **8.** c **9.** a) $\sqrt{34}$ b) $22+\sqrt{34}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** a **3.** b **4.** d **5.** a **6.** c **7.** c **8.** b **9.** c **10.** b **11.** c
12. a **13.** d **14.** a **15.** a **16.** b **17.** d **18.** c **19.** c **20.** a **21.** c **22.** a
23. b **24.** d **25.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

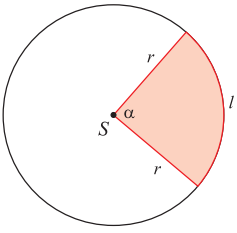
1. 36 m **2.** $P=103.923$ cm²
3. $a=12$ cm, $b=6$ cm, $r=6$ cm. Razlika površina je $(72-18\pi)\,\text{cm}^2\approx 15.48\,\text{cm}^2$.
4. $d_1=8$ cm, $d_2=6$ cm **5.** $v=4.8$ cm **6.** a) $x=27°48'41''$ b) $x=26°42'18''$

7. 20 cm **8.** $a = 16$ cm, $c = 9$ cm **9.** $P = 276$ cm^2
10. $b = 6.64$ cm, $v = 6.23$ cm, $O = 35.88$ cm, $P = 70.4$ cm^2
11. $r_o : r_u = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **12.** a) 72° b) $|OP| = 25.52$ cm c) $P = 95\,911$ cm^2
13. $P = 129.58$ cm^2 **14.** $P = 75.57$ cm^2 **15.** $x = 75°$, $y = 94°$
16. $P_2 - P_1 = 32\sqrt{3}$ cm^2 **17.** $n = 22$ **18.** $n = 13$
19. $n = 24$ **20.** $n = 202$ **21.** $\gamma = 168°$ **22.** $d_1 : d_2 = 5 : 4$
23. $d_2 : d_1 = \sqrt{3} : 2$ **24.** 162 m^2 **25.** $O = 758.2$ m
26. a) $24\sqrt{2}$ cm b) 72 cm^2 c) $12\sqrt{2}$ cm d) 288 cm^2

4.1.3. Kružnica i krug

Kružnica je skup točaka u ravnini koje su jednako udaljene od neke čvrste točke S. Točka S je središte kružnice, a udaljenost središta do bilo koje točke na kružnici polumjer r. **Krug** je dio ravnine omeđen kružnicom.

Opseg kruga je $O = 2r\pi$, a površina kruga $P = r^2\pi$.

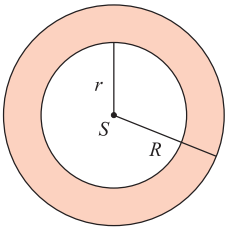


Kružni isječak je dio kruga koji određuje središnji kut α (kut s vrhom u središtu kruga S).

Površina kružnog isječka $P = \frac{r^2\pi}{360°} \cdot \alpha°$

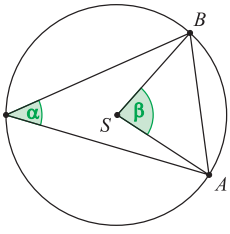
Kružni luk je dio kružnice koji određuje središnji kut α.

Duljina kružnog luka $l = \frac{r\pi}{180°} \cdot \alpha°$



Kružni vijenac je dio ravnine omeđen dvjema koncentričnim kružnicama.

Površina kružnog vijenca $P = (R^2 - r^2)\pi$



Poučak o obodnom i središnjem kutu

Obodni kut α ima vrh na kružnici, a središnji kut β ima vrh u središtu kružnice S.
Središnji kut je dva puta veći od obodnog kuta nad istom tetivom, tj. $\beta = 2\alpha$.

Talesov poučak o obodnom kutu

Obodni kut nad promjerom kružnice je pravi kut.

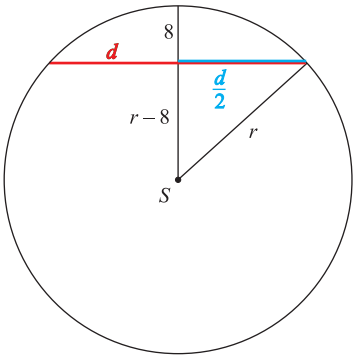
Primjer 1: Kolika je duljina polumjera kružnice čiji je opseg jednak zbroju opsega dviju kružnica s polumjerima 3 cm i 5 cm?

Rješenje: $O = O_1 + O_2 = 2r_1\pi + 2r_2\pi = 6\pi + 10\pi = 16\pi$ cm

$O = 2r\pi \quad \Rightarrow \quad 2r\pi = 16\pi \quad \Rightarrow \quad r = 8$ cm

Primjer 2: Izračunajmo opseg i površinu kruga u kojem je povučena tetiva duljine 24 cm čija je udaljenost od središta 8 cm manja od polumjera.

Rješenje: Iz pravokutnog trokuta sa stranicama r, $r-8$ i $\frac{d}{2}$ slijedi:



$$r^2 = \left(\frac{d}{2}\right)^2 + (r-8)^2.$$

$$r^2 = 144 + r^2 - 16r + 64$$

$$16r = 208 \,/ : 16$$

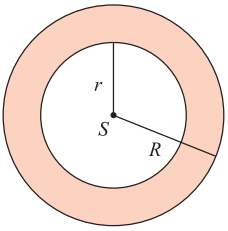
$$r = 13 \text{ cm}.$$

$$O = 2r\pi = 26\pi \text{ cm}$$

$$P = r^2\pi = 169\pi \text{ cm}^2$$

Primjer 3: Površina kružnog vijenca je 55π cm^2, a opseg manjeg kruga kružnog vijenca je 6π cm. Koliki su polumjeri kružnica tog kružnog vijenca?

Rješenje: Iz opsega manjeg kruga odredimo r.



$$O = 2r\pi \;\Rightarrow\; 6\pi = 2r\pi \;\Rightarrow\; r = 3 \text{ cm}$$

Polumjer većeg kruga izračunat ćemo iz površine kružnog vijenca.

$$P = (R^2 - r^2)\pi$$

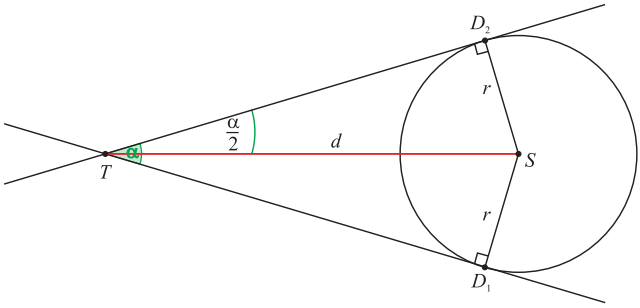
$$55\pi = \left(R^2 - 9\right)\pi \,/ : \pi$$

$$55 = R^2 - 9$$

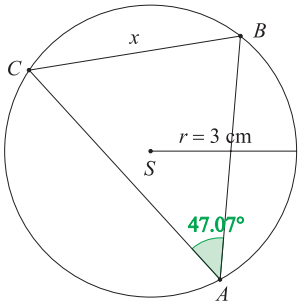
$$R^2 = 64 \;\Rightarrow\; R = 8 \text{ cm}$$

Primjer 4: Iz točke T povučene su tangente na kružnicu polumjera 7 cm. Odredimo udaljenost točke T od središta kružnice ako je kut koji zatvaraju tangente 45°.

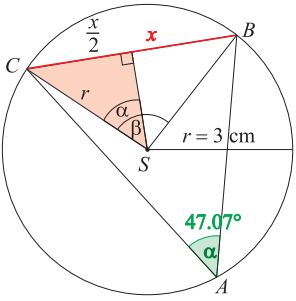
Rješenje: $\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{r}{d} \;\Rightarrow\; d = \frac{r}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{7}{\sin 22°30'} = 18.29 \text{ cm}$



Primjer 5: Odredimo duljinu tetive x na slici.



Rješenje: Za središnji kut vrijedi $\beta = 2\alpha = 94° 8' 24''$.
Trokut ΔCSB je jednakokračan s krakom r.

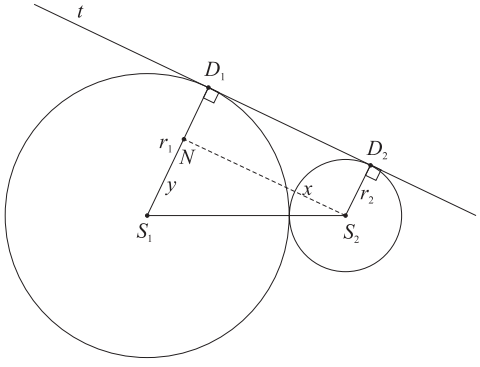


$$\sin\alpha = \frac{\frac{x}{2}}{r} \quad \Rightarrow \quad x = 2r\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad x = 4.39 \text{ cm}$$

Primjer 6: Dvije kružnice polumjera 24.5 cm i 4.5 cm dodiruju se izvana. Odredimo udaljenost dirališta njihove zajedničke tangente koja ne prolazi sjecištem kružnica.

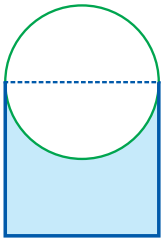
Rješenje: Udaljenost središta kružnica je
$d(S_1, S_2) = r_1 + r_2 = 29$ cm.
Iz pravokutnog trokuta $\Delta S_1 S_2 N$ slijedi:
$y = r_1 - r_2 = 20$ cm.

$$x = d(D_1, D_2) = \sqrt{29^2 - 20^2} = \sqrt{441} = 21 \text{ cm}$$



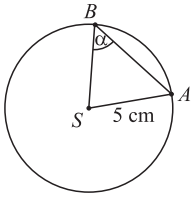
Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2007.) U polovištu jedne stranice kvadrata nalazi se središte kružnice (vidi sliku). Ako je duljina stranice kvadrata 8 cm, tada površina osjenčanog lika iznosi:



a) $(64 - 8\pi)$ cm^2
b) $(64 - 16\pi)$ cm^2
c) $56\,\pi$ cm^2
d) $48\,\pi$ cm^2.

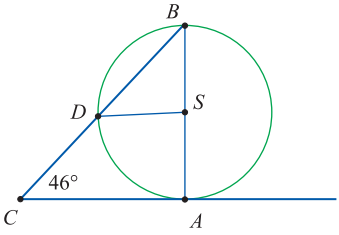
2. (NI 2007.) Ako je $\cos\alpha = 0.6$, tada je duljina tetive $\overline{AB}$ na slici jednaka:



a) 3 cm
b) 4 cm
c) 6 cm
d) 8 cm.

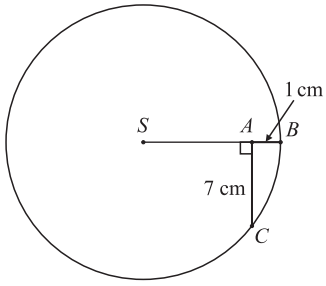
3. (IK 2007.) Navedite mjere nekog središnjeg **šiljastoga** kuta i njemu pripadnog obodnoga kuta.

4. (NI 2008.) Polupravac CA je tangenta kružnice.



a) Odredite mjeru $\angle ABC$.
b) Odredite mjeru $\angle ASD$.

5. (NI 2009.) Odredite polumjer kružnice sa slike.



a) $\sqrt{50}$
b) 8
c) $\sqrt{113}$
d) 25

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Površine dvaju krugova, čiji se polumjeri odnose kao 5 : 3, razlikuju se za 256π cm^2. Zbroj površina tih dvaju krugova je

a) 584π cm^2 b) 544π cm^2 c) 512π cm^2 d) 32π cm^2.

2. Za koliko postotaka treba povećati polumjer kruga $r = 5$ cm da bi se njegova površina povećala za 224%?

a) 80% b) 100% c) 120% d) 140%

3. Za koliko postotaka treba smanjiti polumjer kružnice da bi se opseg kruga smanjio za 20%?

a) 10% b) 20% c) 30% d) 40%

4. Za koliko postotaka treba povećati polumjer kružnice da se površina kruga poveća za 23.21%?

a) 10% b) 11% c) 12% d) 13%

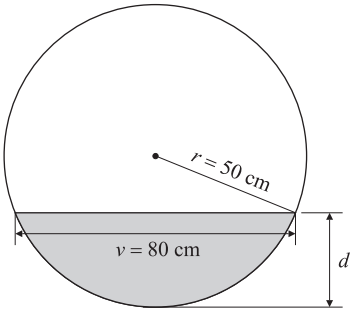
5. Poprečni presjek cijevi je kružnica polumjera 50 cm, kao na slici. Dubina vode d u cijevi je:

a) 20 cm

b) 25 cm

c) 30 cm

d) 40 cm.



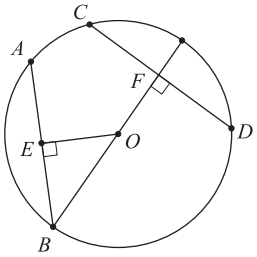
6. U kružnicu su ucrtane tetive $|CD| = |AB| = 16$ cm, kao na slici. Ako je $|OB| = 10$ cm, koliko je $|OF|$?

a) 4.5 cm

b) 6 cm

c) 7.5 cm

d) 10 cm



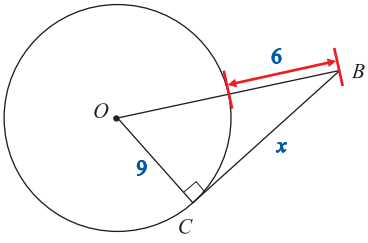
7. Iz točke B povučena je tangenta na kružnicu kao na slici. Nađite duljinu x.

a) 15

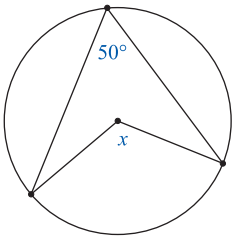
b) 14

c) 12

d) 9

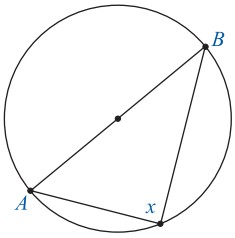


8. Koliki je kut x na slici?



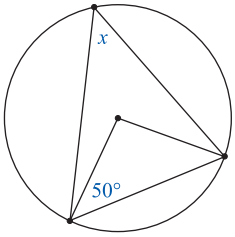
a) 25°
b) 50°
c) 100°
d) 125°

9. U kružnici je nacrtan promjer $\overline{AB}$ kao na slici. Koliki je kut x?



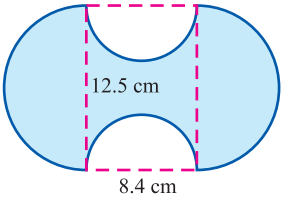
a) 45°
b) 60°
c) 90°
d) 180°

10. Koliki je kut x na slici?



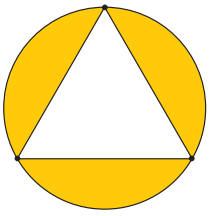
a) 100°
b) 80°
c) 50°
d) 40°

11. Kolika je površina osjenčanog lika?



a) 283.1 cm^2
b) 200.0 cm^2
c) 178.1 cm^2
d) 172.3 cm^2

12. Odredite površinu osjenčanog dijela između kružnice promjera 4 cm i upisanog jednakostraničnog trokuta.



a) 8.7 cm^2
b) 7.4 cm^2
c) 10.0 cm^2
d) 12.6 cm^2

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite opseg kružnice ako je površina kruga 50.24 cm^2.

2. Kolika je duljina kružnog luka kružnice polumjera 6 cm ako je središnji kut 75°? Odredite i površinu pripadnog kružnog isječka.

3. Površina kružnog vijenca širine 6 cm je 120π cm^2. Koliki su polumjeri kružnica koji tvore taj kružni vijenac?

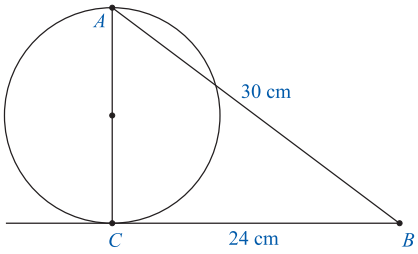
4. Udaljenost središta dviju kružnica koje se dodiruju izvana je 9 cm. Koliki su im polumjeri ako je zbroj njihovih površina 45π cm^2?

5. Odredite širinu kružnog vijenca ako je opseg kružnog vijenca 26π cm, a površina 39π cm^2.

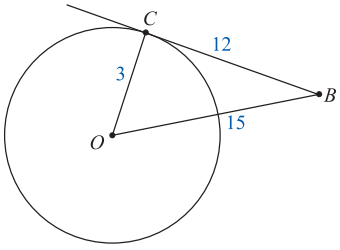
6. Dvije kružnice polumjera 9 cm, prolaze jedna drugoj kroz središte. Izračunajte:

a) opseg manje zatvorene figure koju čine obje kružnice
b) opseg veće zatvorene figure koju čine obje kružnice.

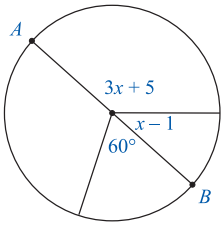
7. Polumjer kružnice je 9 cm. Je li pravac *CB* tangenta kružnice?



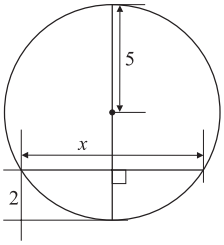
8. Je li pravac *CB* na slici tangenta kružnice?



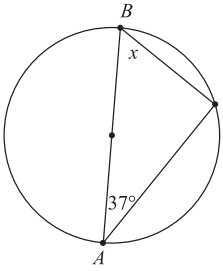
9. Odredite *x* sa slike.



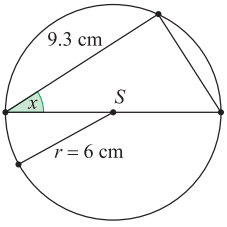
10. Odredite x sa slike.



11. Koliki je kut x na slici?



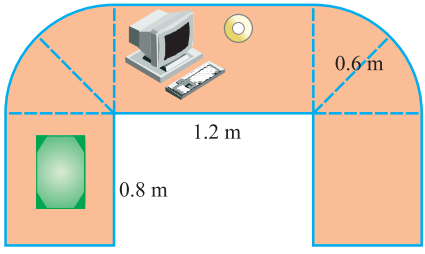
12. Koliki je kut x na slici?



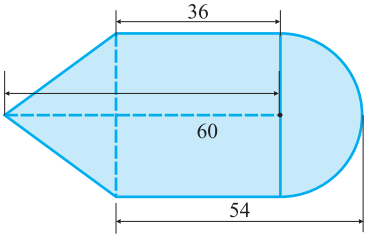
13. Gospodin Ferdo želi napraviti pokrivač za novi bazen kružnog oblika, ali ne zna njegov polumjer. Razmišljao je kako izmjeriti polumjer bazena, a ostati suh i sjetio se. Stao je na udaljenosti 4 metra od bazena, a zatim izmjerio udaljenost 12 metara od mjesta gdje je stajao do ruba bazena, idući po tangenti. Koliki je polumjer bazena i koliko materijala treba Ferdo za pokrivač (u m^2)?

14. Dvije kružnice polumjera 49 cm i 16 cm dodiruju se izvana. Odredite udaljenost dirališta njihove zajedničke tangente koja ne prolazi sjecištem kružnica.

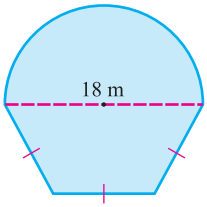
15. Snježanin radni stol ima oblik kao na slici. Odredite površinu stola. Zaokružite na dva decimalna mjesta.



16. Odredite površinu lika na slici ako su sve mjere u decimetrima. Zaokružite na jedno decimalno mjesto.



17. Odredite površinu lika na slici. Zaokružite na jedno decimalno mjesto.



RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

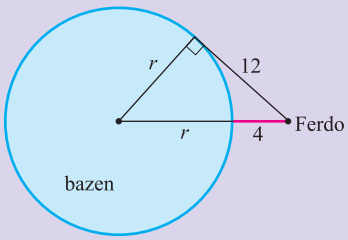
1. a **2.** c **3.** Primjerice, središnji kut = 35°, obodni kut = 17.5°
4. a) $\angle ABC = 44°$ b) $\angle ASD = 88°$ **5.** d

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. b **2.** a **3.** b **4.** b **5.** a **6.** b **7.** c **8.** c **9.** c
10. d **11.** d **12.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $r = 4$ cm, $O = 8\pi = 25.13$ cm **2.** $l = 2.5\pi = 7.85$ cm, $P = 7.5\pi = 23.56$ cm^2
3. $R = 13$ cm, $r = 7$ cm **4.** $r_1 = 6$ cm, $r_2 = 3$ cm **5.** $d = 3$ cm
6. a) $O = 12\pi$ cm b) $O = 24\pi$ cm **7.** Da **8.** Ne **9.** $x = 44$ **10.** $x = 4$
11. $x = 53°$ **12.** $x = 39°\,11'42''$
13. $r = 16$ m, $P = 256\pi$ m^2 = 805 m^2

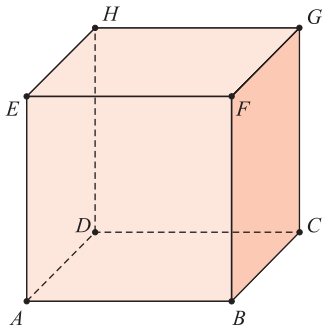


14. $d = 56$ cm **15.** 2.25 m^2 **16.** 2236.9 dm^2 **17.** 232.5 m^2

4.2. Uvod u geometriju prostora

Osnovni elementi prostora su točke, pravci i ravnine.

Međusobni položaj dvaju pravaca



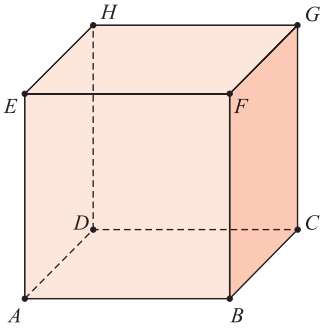
Dva pravca se sijeku kad imaju zajedničku točku. Pravci određeni točkama BC i CG sijeku se i zajednička im je točka C.

Dva su pravca usporedna kad leže u istoj ravnini i nemaju zajedničkih točaka. Pravci određeni točkama AB i EF su usporedni. Oni leže u ravnini određenoj točkama ABE.

Dva su pravca mimosmjerna kad ne postoji ravnina u kojoj leže oba pravca. Pravci određeni točkama CD i EH su mimosmjerni.

Ravnina je određena dvama pravcima koji se sijeku ili dvama usporednim pravcima.

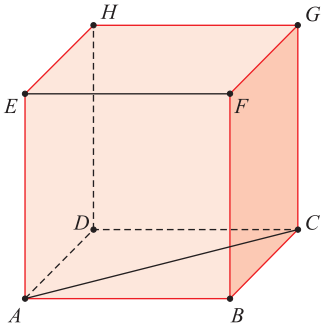
Međusobni položaj dviju ravnina



Dvije su ravnine usporedne kad nemaju zajedničkih točaka. Ravnine određene točkama ADH i BCG su usporedne.

Dvije se ravnine sijeku kad imaju zajednički pravac. Ravnine određene točkama DCG i BCD sijeku se u pravcu koji prolazi točkama CD.

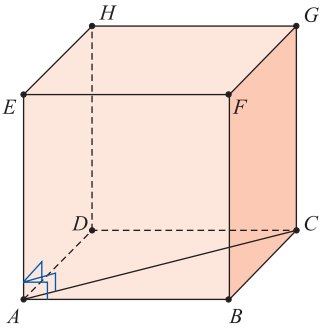
Međusobni položaj pravca i ravnine



Pravac i ravnina su usporedni kad nemaju zajedničkih točaka. Pravac koji prolazi točkama EF i ravnina određena točkama DCG su usporedni.

Pravac siječe (probada) ravninu kad s njom ima jednu zajedničku točku koju nazivamo **probodište**. Pravac određen točkama HD siječe ravninu određenu točkama ABC kroz probodište D.

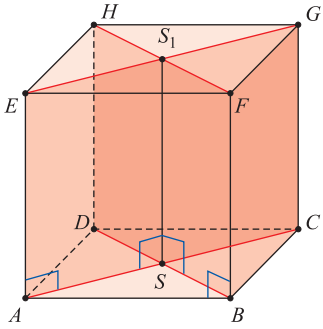
Pravac leži u ravnini kad su sve točke pravca ujedno i točke ravnine. Pravac određen točkama AC leži u ravnini određenoj točkama ABC.



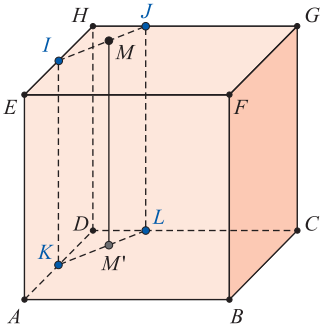
Okomitost

Pravac i ravnina međusobno su **okomiti** kad je pravac okomit na sve pravce ravnine koji prolaze njegovim probodištem s ravninom. Pravac određen točkama *AE* okomit je na ravninu određenu točkama *ABC* i na pravce određene točkama *AB*, *AC*, *AD* i svim pravcima ove ravnine koji prolaze točkom *A*.

Pravac određen točkama *GB* nije okomit na ravninu određenu točkama *ABC*, ali je okomit na pravac *AB*.



Ako su dvije ravnine okomite na treću ravninu, onda je i njihova presječnica okomita na treću ravninu. Ravnine određene točkama *ACG* i *BDH* okomite su na ravninu određenu točkama *ABC*. Njihova presječnica, pravac SS_1, okomit je na ravninu *ABC*.

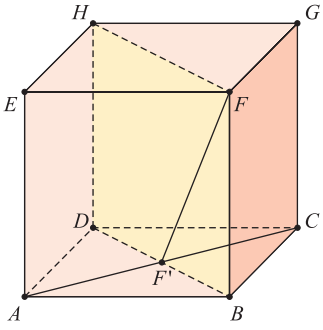


Ortogonalna projekcija

Ortogonalna projekcija **točke na ravninu** je probodište okomice iz točke na ravninu i same ravnine.

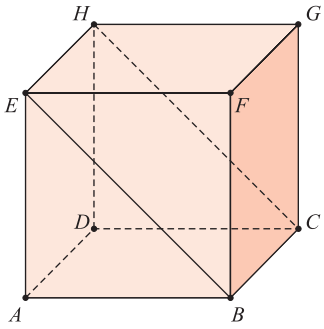
Ortogonalna projekcija točke *E* na ravninu *ABC* je točka *A*.

Ortogonalna projekcija točke *M* koja se nalazi u ravnini *EFG* je točka *M'* u ravnini *ABC*. Pravac *MM'* okomit je na ravnine *ABC* i *EFG*. Točka *M'* probodište je tog pravca i ravnine *ABC*. Ravnina *JIK* okomita je na ravnine *ABC* i *EFG*.



Ortogonalna projekcija **točke na pravac** je probodište ravnine koja sadrži točku, a okomita je na pravac i ravninu samog pravca.

Ortogonalna projekcija točke *F* na pravac *HD* je točka *H*.
Ortogonalna projekcija točke *F* na pravac *AC* je točka *F'* koja se nalazi na presjeku ravnine okomite na zadani pravac (ravnina *DBF*) i ravnine samog pravca.



Udaljenost

Udaljenost **točke od ravnine** je udaljenost točke od njezine ortogonalne projekcije na ravninu.

Udaljenost točke E od ravnine BCG je udaljenost točaka E i F. Točka F je ortogonalna projekcija točke E na ravninu BCG.

Udaljenost **točke od pravca** je udaljenost točke od njezine ortogonalne projekcije na pravac.

Udaljenost točke B od pravca EH je udaljenost točaka B i E. Točka E je ortogonalna projekcija točke B na pravac određen točkama EH. Ravnina ABF sadrži točku B i okomita je na pravac EH.

Udaljenost **pravca od ravnine** koja je s njim usporedna je udaljenost bilo koje njegove točke do te ravnine.

Udaljenost pravca FG od ravnine ABC je udaljenost od točaka F i B. Pravac je usporedan s ravninom.

Udaljenost dvaju usporednih pravaca je udaljenost bilo koje točke jednog pravca i njene ortogonalne projekcije na drugi pravac.

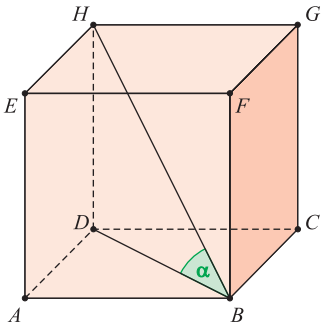
Udaljenost pravaca EB i HC je udaljenost točaka B i C jer su pravci usporedni.

Udaljenost dviju usporednih ravnina je udaljenost bilo koje točke jedne ravnine i usporedne ravnine.

Udaljenost usporednih ravnina ABF i DCG jednaka je udaljenosti točaka A i D.

Udaljenost **mimosmjernih pravaca** jednaka je udaljenosti jednog pravca do ravnine koja sadrži drugi pravac i usporedna je s prvim pravcem.

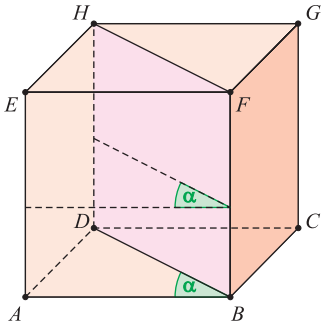
Udaljenost mimosmjernih pravaca AB i DH jednaka je udaljenosti pravca AB i njemu usporedne ravnine HDC u kojoj leži pravac DH. Točka D je ortogonalna projekcija točke A na ravninu HDC, pa je dana udaljenost jednaka udaljenosti točaka A i D.



Kut

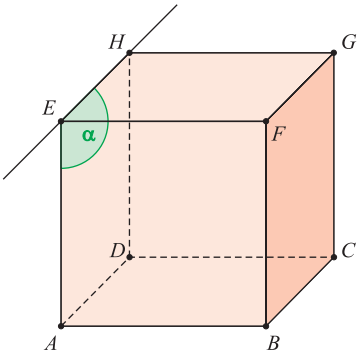
Kut **pravca i ravnine** je kut između pravca i njegove ortogonalne projekcije na ravninu.

Kut između pravca BH i ravnine ABC je kut između zadanog pravca i njegove ortogonalne projekcije na zadanu ravninu, pravca BD.



Kut **između dviju ravnina** je kut između pravaca koji se nalaze u tim ravninama i koji su okomiti na presječnicu tih dviju ravnina.

Kut između ravnina *ABF* i *DBF* je kut između pravaca *AB* i *DB* koji su okomiti na presječnicu ovih dviju ravnina, tj. pravac određen točkama *BF*.

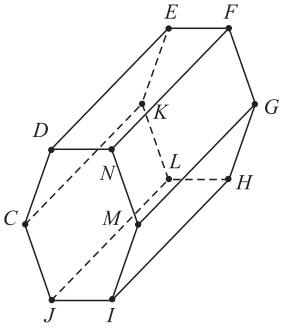


Kut **između mimosmjernih pravaca** je kut između jednog pravca i pravca koji je usporedan s drugim pravcem, a siječe prvi pravac.

Kut između mimosmjernih pravaca *FG* i *AE* je kut između pravca usporednog prvom pravcu (*FG*) koji prolazi točkama *EH* i zadanog pravca kroz točke *AE*. U ovom slučaju radi se o pravom kutu.

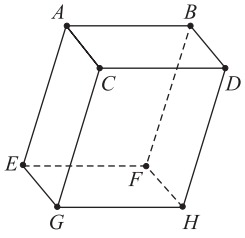
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Koji pravac NIJE paralelan s dužinom $\overline{NF}$?



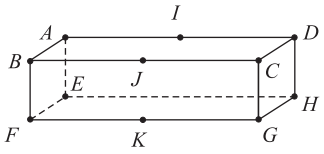
a) Pravac *HI*.
b) Pravac *CK*.
c) Pravac *MI*.
d) Pravac *DE*.

2. Što je presjek ravnina *ACG* i *DCG* ?



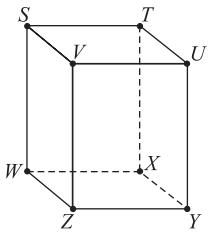
a) Pravac *GA*.
b) Pravac *AC*.
c) Pravac *GD*.
d) Pravac *GC*.

3. Koje od sljedećih točaka nisu komplanarne?



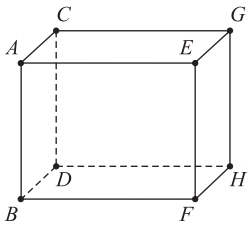
a) A, E, F, B
b) B, J, C, D
c) A, D, H, E
d) A, J, D, G

4. Koja je točka u istoj ravnini koja je određena točkama T, W i S?



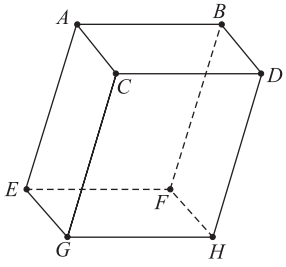
a) U
b) X
c) Z
d) V

5. Koji je par pravaca mimosmjeran?



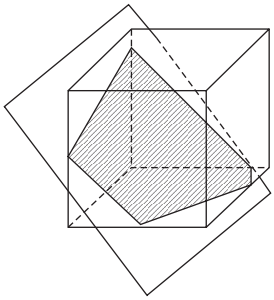
a) Pravci BD i FH.
b) Pravci AE i BF.
c) Pravci AC i GC.
d) Pravci BD i GH.

6. Koja dužina nije usporedna s $\overline{DH}$?



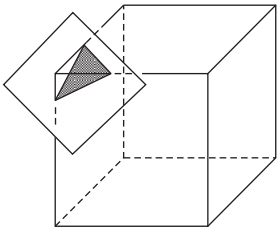
a) $\overline{BF}$
b) $\overline{CG}$
c) $\overline{GH}$
d) $\overline{AE}$

7. Opišite presjek ravnine i kocke.



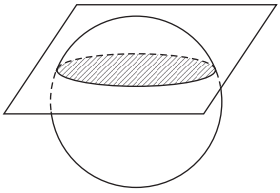
a) Četverokut.
b) Peterokut.
c) Šesterokut.
d) Kocka.

8. Opišite presjek ravnine i kocke.



a) Četverokut.
b) Kvadrat.
c) Trokut.
d) Piramida.

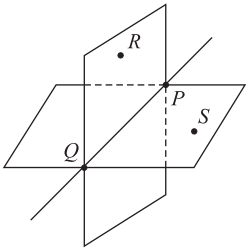
9. Opišite presjek ravnine i kugle.



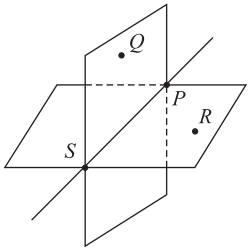
a) Krug.
b) Elipsa.
c) Parabola.
d) Sfera.

10. Na kojoj se od slika ravnine PQR i QRS sijeku u pravcu QR?

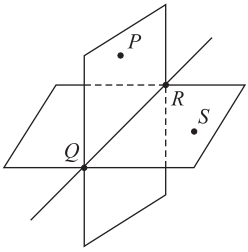
a)



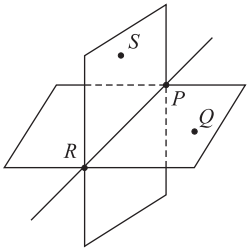
b)



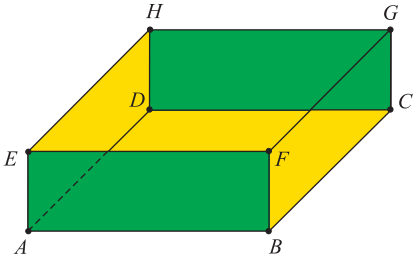
c)



d)



11. Koji par bridova ove kutije leži u istoj ravnini?

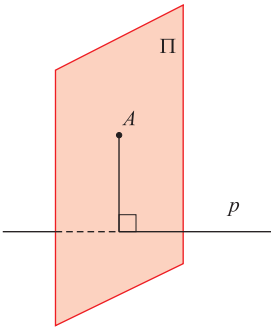


a) $\overline{EA}$ i $\overline{FG}$.
b) $\overline{HD}$ i $\overline{AB}$.
c) $\overline{GC}$ i $\overline{BC}$.
d) $\overline{HG}$ i $\overline{EA}$.

12. Koje ravnine (ravnina) iz zadatka 11. sadrže točku F i usporedne su s ravninom AEH?

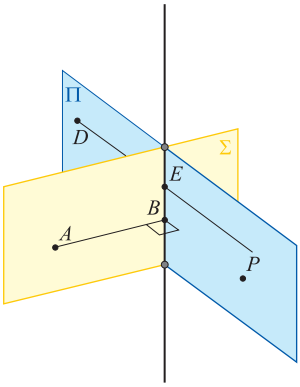
a) Ravnine FGC i HGF.
b) Ravnine FBC i ABC.
c) Samo ravnina FGH.
d) Samo ravnina FGC.

13. Koja je od sljedećih izjava točna?



a) Pravac p leži u ravnini Π.
b) Presjek pravca p i ravnine Π je točka A.
c) Ravnina Π je okomita na pravac p.
d) Ni jedna od izjava nije točna.

14. Koja je od sljedećih izjava točna?



a) Ravnine Π i Σ su paralelne ravnine.
b) Presjek ravnina Π i Σ je dužina $\overline{DE}$.
c) Točka P je u ravnini Π.
d) Ni jedna od izjava nije točna.

15. Ako su dvije ravnine okomite na isti pravac, za njih vrijedi da su:

a) okomite
b) usporedne
c) sijeku se ali nisu okomite
d) ne vrijedi ni jedno od navedenog.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Ispišite sve pravce određene vrhovima kvadra $ABCDEFGH$ koji su usporedni s ravninom:
a) BCG b) ACG c) FEH.

2. Ispišite sve pravce određene vrhovima kvadra $ABCDEFGH$ koji su usporedni s pravcem:
a) AD b) BF c) GE.

3. Ispišite sve pravce određene vrhovima kvadra $ABCDEFGH$ koji probadaju ravninu:
a) BCG u točki G b) FEH u točki E
c) ABC u točki C.

4. Nacrtajte pravilnu šesterostranu prizmu i na njoj istaknite:
a) dva mimosmjerna brida
b) brid paralelan s ravninom
c) strane koje leže na paralelnim ravninama.

5. Neka je P polovište brida $\overline{AE}$, a R polovište brida $\overline{EH}$ kvadra $ABCDEFGH$. Odredite ortogonalnu projekciju dužine $\overline{PR}$ na ravninu određenu točkama FBC.

6. Neka je P polovište brida $\overline{AV}$ četverostrane piramide $ABCDV$. Odredite ortogonalnu projekciju točke P na ravninu ABC.

7. U kocki $ABCDEFGH$ označite kut između brida $\overline{FD}$ i ravnine DHG.

8. U trostranoj prizmi $ABCDEF$ točka P je polovište brida $\overline{AB}$. Označite kut između pravca $\overline{FP}$ i ravnine ABC.

9. Vrhovi kvadra su $ABCDEFGH$. U kakvom su međusobnom položaju:
a) ravnina ABC i pravac BH
b) pravci BC i HD
c) ravnine ADH i BCG?

10. Dužina $\overline{AB}$ priklonjena je prema ravnini pod kutom od 60°. Kolika je duljina dužine $\overline{AB}$ ako je duljina njezine ortogonalne projekcije na ravninu 6 cm?

11. Točke A i B nalaze se s različitih strana ravnine i od nje su udaljene 12 cm, odnosno 18 cm. Izračunajte duljinu ortogonalne projekcije dužine $\overline{AB}$ ako je $\overline{AB} = 50$ cm.

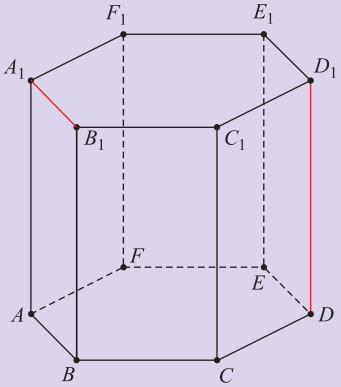
RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

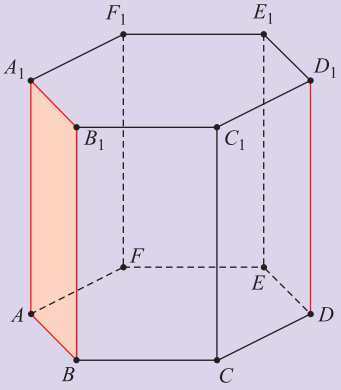
1. c **2.** d **3.** d **4.** b **5.** d **6.** c **7.** b **8.** c
9. a **10.** c **11.** c **12.** d **13.** c **14.** c **15.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

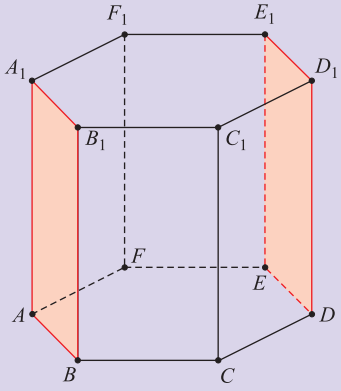
1. Pravci: a) *AD, EH, AE, DH* b) *BF, DH* c) *AB, BC, CD, DA.*
2. Pravci: a) *EH, FG, BC* b) *CG, DH, AE* c) *CA.*
3. Pravci: a) *EG, HG, AG, DG* b) *EA, ED, EC, EB* c) *GC, FC, HC, EC.*
4. a)



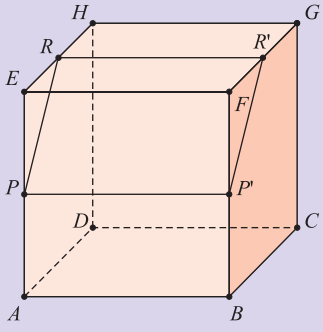
b)



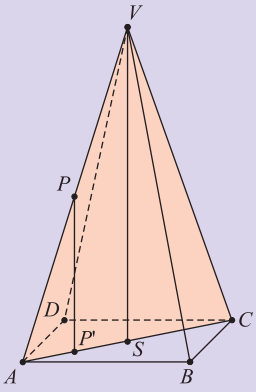
c)



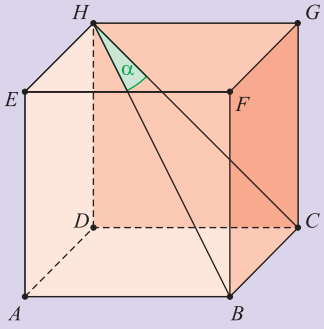
5.



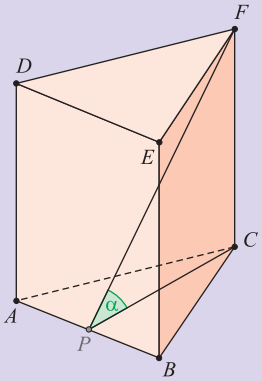
6.



7.

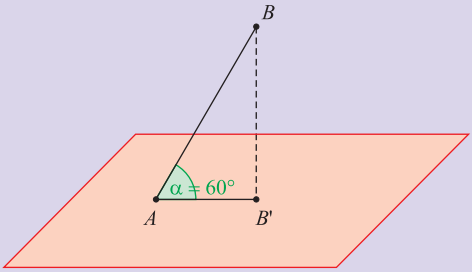


8.

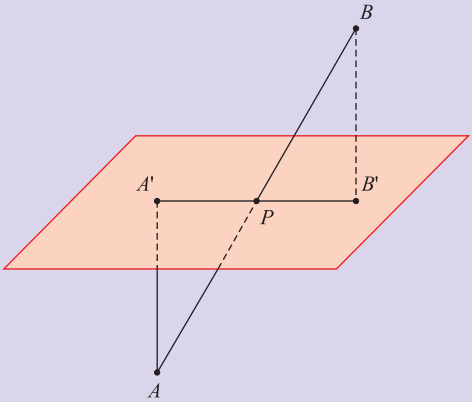


9. a) Pravac BH probada ravninu ABC u točki B.
b) Pravci BC i HD su mimosmjerni.
c) Ravnine ADH i BCG su usporedne.

10. $\cos 60° = \dfrac{|AB'|}{|AB|} \Rightarrow |AB| = 12\,\text{cm}$

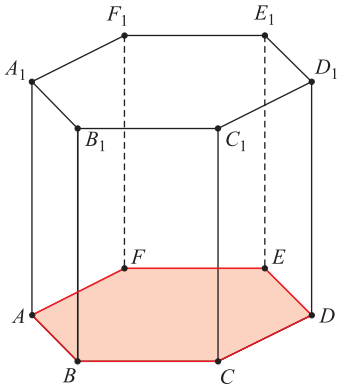


11. $\Delta PA'A : \Delta PB'B \Rightarrow |A'A| : |B'B| = |A'P| : |PB'| = |AP| : |PB| \Rightarrow |A'P| = 16,\ |PB'| = 24$



4.3. Geometrijska tijela

4.3.1. Prizma



Prizma je dio prostora omeđen s dvama paralelnima i sukladnima mnogokutima (n-terokutima) koje nazivamo **baze** ili **osnovice** (**osnovke**) i n paralelograma koje nazivamo **strane** ili **pobočke** prizme. Bridovi na osnovici su **osnovni bridovi**, a bridovi u kojima se spajaju pobočke su **bočni bridovi**. Ukoliko su bočni bridovi okomiti na bazu govorimo o uspravnoj prizmi ($b = v$), a ako nisu, prizma je kosa. Pravilna prizma je uspravna prizma kojoj je baza pravilan mnogokut.

Površinu baze označavamo sa B, površinu pobočja sa P, a visinu prizme sa v. Sve prizme jednakih površina osnovica i jednakih visina imaju isti obujam (volumen).

Obujam prizme $V = B \cdot v$

Oplošje je jednako zbroju površina svih strana.

$$O = 2B + P$$

Oplošje i obujam kocke $O = 6a^2,\ V = a^3$

Oplošje i obujam pravilne četverostrane prizme (kvadratne)

$$O = 2a^2 + 4av,\ V = a^2v$$

Oplošje i obujam kvadra

$$O = 2(ab + ac + bc),\ V = abc$$

Prostorna dijagonala kvadra

$$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

Oplošje i obujam pravilne trostrane prizme

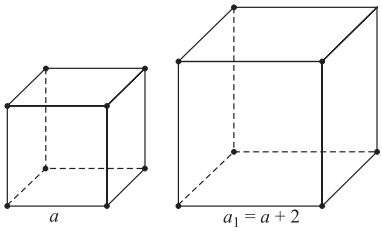
$$O = 2\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3av,\quad V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v$$

Oplošje i obujam pravilne šesterostrane prizme

$$O = 2 \cdot 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 6av = 3a^2\sqrt{3} + 6av,\quad V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot v = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot v$$

Primjer 1: Ako se brid kocke poveća za 2 cm, oplošje joj se poveća za 144 cm^2. Izračunajmo obujam početne kocke.

Rješenje: Stranice kocaka su a i $a_1 = a + 2$. Zapišimo njihova oplošja.



$O = 6a^2$

$O_1 = 6a_1^{\,2} = 6(a+2)^2 =$

$= 6(a^2 + 4a + 4) =$

$= 6a^2 + 24a + 24$

$O_1 = O + 144$

$6a^2 + 24a + 24 = 6a^2 + 144$

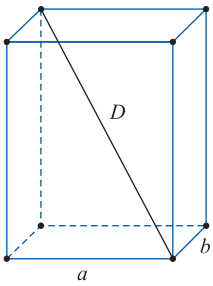
$24a = 120$

$a = 5$ cm

$V = a^3 = 5^3 = 125$ cm^3

Primjer 2: Duljina prostorne dijagonale kvadra jednaka je 21 cm, a duljine bridova kvadra odnose se kao 2:3:6.
Koliko iznose oplošje i obujam kvadra?

Rješenje: $a : b : c = 2 : 3 : 6 \Rightarrow a = 2k,\ b = 3k,\ c = 6k$



$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$

$21^2 = (2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2$

$441 = 4k^2 + 9k^2 + 36k^2 \Rightarrow k^2 = 9 \Rightarrow k = 3$

Stranice kvadra su:

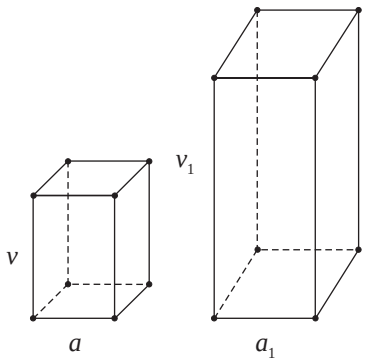
$a = 6$ cm, $b = 9$ cm, $c = 18$ cm.

$O = 2(ab + ac + bc) = 648$ cm^2

$V = abc = 6 \cdot 9 \cdot 18 = 972$ cm^3

Primjer 3: Za koliko će se postotaka povećati obujam pravilne uspravne četverostrane prizme čija je osnovka kvadrat ako se stranica osnovke duljine 5 cm poveća za 1 cm, a visina duljine 4 cm poveća za 4 cm?

Rješenje: $V = a^2 \cdot v = 25 \cdot 4 = 100$ cm^3



$V_1 = a_1^{\,2} \cdot v_1 = 6^2 \cdot 8 = 288$ cm^3

Volumen se povećao za

$V_r = V_1 - V = 188$ cm^3.

Postotak se može izračunati na više načina.

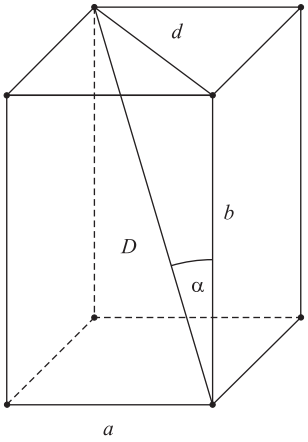
$p = \frac{V_r}{V} \cdot 100 = 188\%$ ili

$V_1 = 2.88\,V \Rightarrow$ povećanje je

$p = (2.88 - 1) \cdot 100 = 188\%$

Primjer 4: Duljina osnovnog brida pravilnog kvadra je za 3 cm manja od duljine bočnog brida, a oplošje kvadra je 90 cm^2. Odredimo kut koji prostorna dijagonala kvadra zatvara s bočnim bridom.

Rješenje: $a = b - 3 \Rightarrow b = a + 3$



$O = 2B + 4ab = 2a^2 + 4a(a+3) = 6a^2 + 12a$

$6a^2 + 12a = 90 \Rightarrow a^2 + 2a - 15 = 0 \Rightarrow a = 3$ cm

$b = 6$ cm

Odredimo duljinu dijagonale baze:

$d = a\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ cm.

Kut između dijagonale i bočnog brida:

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{d}{b} = \dfrac{3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \alpha = 35°\,15'\,52''.$

Primjer 5: Baza uspravne trostrane prizme je trokut sa stranicama 44 cm, 39 cm i 17 cm, a duljina visine jednaka je polovici opsega baze. Izračunajmo oplošje i obujam prizme.

Rješenje: Izračunajmo površinu baze po Heronovoj formuli.

$$B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$s = \frac{O}{2} = \frac{a+b+c}{2} = \frac{44+39+17}{2} = 50$$

$$B = \sqrt{50(50-44)(50-39)(50-17)} = 330 \text{ cm}^2$$

Visina prizme je $v = 50$ cm.

Oplošje prizme je

$O = 2B + P_1 + P_2 + P_3 = 660 + 50 \cdot 44 + 50 \cdot 39 + 50 \cdot 17 =$

$= 5\,660$ cm^2.

Obujam je $V = B \cdot v = 330 \cdot 50 = 16\,500$ cm^3.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2010.) Plastična posuda oblika kvadra napunjena je vodom. Stranice su duljine 25 cm, 20 cm i 18 cm. Koliko je litara vode u posudi? (1 litra je 1 dm^3.)

a) 90 litara b) 16.2 litre c) 9 litara d) 1.62 litre

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Kocka ima oplošje 1 261.5 cm^2. Obujam kocke je:

a) 3 018.625 cm^3 b) 3 028.625 cm^3
c) 3 038.625 cm^3 d) 3 048.625 cm^3.

2. Za koliko centimetara treba povećati duljinu brida kocke 5 cm da bi se njeno oplošje povećalo za 156%?

a) 1 cm b) 2 cm c) 3 cm d) 4 cm

3. Bridovi kvadra su tri uzastopna cijela broja, a dijagonala je $\sqrt{149}$ cm. Koliko je oplošje kvadra?

a) 178 cm^2 b) 242 cm^2 c) 292 cm^2 d) 312 cm^2

4. Duljina prostorne dijagonale kvadra veća je od duljine njegovih bridova za 1, 2, odnosno 3 cm. Kolika je duljina te dijagonale?

a) 6 cm b) $\sqrt{3}$ cm c) $\left(3+\sqrt{2}\right)$ cm d) $6\sqrt{3}$ cm

5. Površine strana kvadra jednake su 20 cm^2, 28 cm^2 i 35 cm^2. Koliki je volumen kvadra?

a) 83 cm^3 b) 140 cm^3 c) 156 cm^3 d) 225 cm^3

6. Površine strana kvadra odnose se kao 2 : 3 : 5. Njegov je volumen jednak $225\sqrt{2}$ cm^3. Koliko mu je oplošje?

a) 100 cm^2 b) 300 cm^2 c) $125\sqrt{2}$ cm^2 d) $95\sqrt{2}$ cm^2

7. Osnovni brid pravilne uspravne šesterostrane prizme dug je 3 cm, a dijagonala pobočke 6 cm. Koliki je volumen prizme?

a) 243 cm^3 b) 189 cm^3 c) 150.5 cm^3 d) 121.5 cm^3

8. Za koliko će se postotaka povećati obujam pravilne uspravne trostrane prizme čija je osnovka jednakostranični trokut ako se stranica osnovke duljine 4 cm poveća za 2 cm, a visina duljine 6 cm poveća za 1 cm?

a) 160.5% b) 162.5% c) 164.5% d) 166.5%

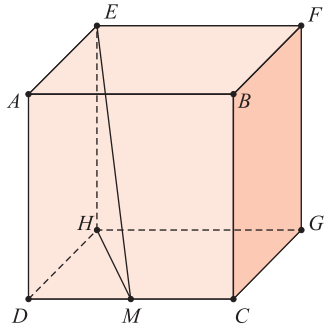
9. Bazen ima oblik kvadra duljine 6.5 m, širine 4.5 m i visine 3.4 m. Napunjen je vodom do dvije trećine svoje visine. Da bi se taj bazen napunio do vrha potrebno je u njega uliti:

a) 3.315 hL vode b) 33.15 hL vode
c) 331.5 hL vode d) 3315 hL vode.

10. Duljina osnovnog brida kvadratne prizme je 3.7 cm, a kut dijagonale pobočke i osnovice $\alpha = 54° 34'$. Volumen prizme je:

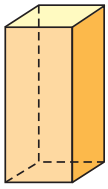
a) 71.2 cm^3 b) 89 cm^3 c) 150.5 cm^3 d) 121.5 cm^3.

11. Kocka na slici ima osnovni brid duljine 4 metra. Točka M je polovište osnovnog brida $\overline{DC}$. Kut $\angle EMH$ je najbliži:



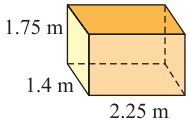
a) 41° 49'
b) 48° 12'
c) 49° 6'
d) 54° 42'.

12. Koliko bridova ima tijelo na slici?



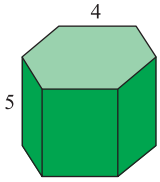
a) 4
b) 16
c) 12
d) 6

13. Koliki je obujam prizme na slici?



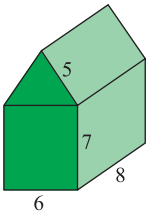
a) 12.78 m^3
b) 14.18 m^3
c) 6.30 m^3
d) 5.51 m^3

14. Koliko je oplošje pravilne šesterostrane prizme na slici?



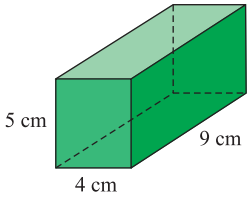
a) 122.1
b) 203.1
c) 83.1
d) 184.1

15. Koliko je oplošje tijela na slici?

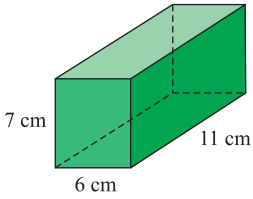


a) 336 kvadratnih jedinica.
b) 348 kvadratnih jedinica.
c) 396 kvadratnih jedinica.
d) 384 kvadratnih jedinica.

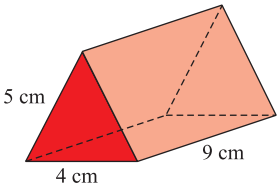
16. Koja je prizma slična zadanoj prizmi?



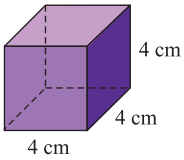
a)



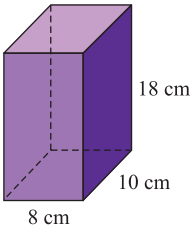
b)



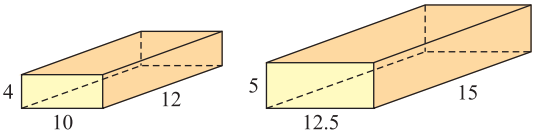
c)



d)

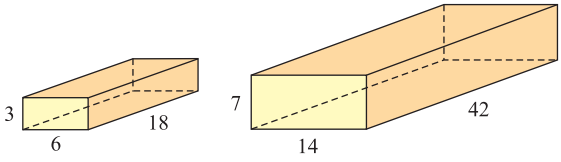


17. Kako se odnose oplošja sličnih prizmi na slici?



a) 8 : 10
b) 16 : 10
c) 16 : 25
d) 64 : 125

18. Kako se odnose obujmovi sličnih prizmi na slici?



a) 9 : 21
b) 27 : 21
c) 9 : 49
d) 27 : 343

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Nacrtajte mrežu pravilne trostrane prizme kojoj su svi bridovi duljine 3 cm.

2. Duljina brida kocke je 7 cm. Odredite oplošje i obujam kocke.

3. Izračunajte oplošje kocke ako je njen obujam 64 cm^3.

4. Duljina prostorne dijagonale kocke je 6 cm. Odredite oplošje i obujam kocke.

5. Obujam kvadra je 280 cm^3, a duljine dvaju njegovih bridova su 7 cm i 10 cm. Izračunajte oplošje kvadra.

6. Duljine bridova kvadra odnose se kao $5 : 6 : 12$, a njegov obujam iznosi 2 880 cm^3. Koliko je oplošje kvadra?

7. Površine strana kvadra odnose se kao $12 : 15 : 20$. Koliki je obujam kvadra ako mu je oplošje 94 dm^2?

8. Izračunajte oplošje i obujam pravilne trostrane prizme duljine osnovnog brida $4\sqrt{3}$ cm i visine 3 cm.

9. Najveći dijagonalni presjek pravilne šesterostrane prizme je kvadrat površine 36 cm^2. Izračunajte obujam prizme.

10. Ravnina prolazi trima vrhovima kocke i od nje odsijeca tetraedar. Kako se odnose volumeni dobivenih tijela?

11. U pravilnoj četverostranoj prizmi brid baze je dva puta veći od bočnog brida. Koliki je kut α koji prostorna dijagonala zatvara s ravninom baze?

12. Presjek kvadra ravninom koja prolazi manjim osnovnim bridom i nagnuta je prema ravnini baze pod kutom od 60°, kvadrat je površine 25 cm^2. Ako se osnovni bridovi odnose kao $1 : 2$, koliki je obujam kvadra?

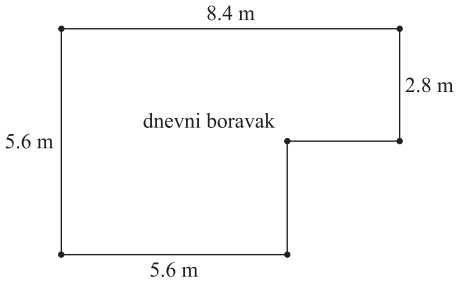
13. Obujam kvadra je 900 cm^3, a duljina visine je 15 cm. Osnovni bridovi odnose se kao $3 : 5$. Kolike su duljine osnovnih bridova?

14. Duljina osnovnog brida pravilne šesterostrane prizme je 3 m, a obujam $V = 121.5$ m^3. Kolika je duljina dijagonale pobočke prizme?

15. Obujam pravilne šesterostrane prizme je $540\sqrt{3}$ cm^3, a duljina visine je 10 cm. Koliko je oplošje prizme?

16. U uspravnu trostranu prizmu upisana je kugla polumjera R. Koliki je volumen prizme?

17. Pri kupovini klima-uređaja treba voditi računa o njegovoj snazi jer prejaka klima prebrzo hladi i ne može izvući vlagu iz zraka, a troši i puno energije. Naravno, preslaba klima neće moći dobro hladiti i trošit će mnogo energije jer će stalno raditi. Zato je vrlo važno znati koliki je prostor koji treba hladiti i odabrati uređaj prave snage. Odredite volumen dnevnog boravka u m^3 ako je visina zida 2.25 m.

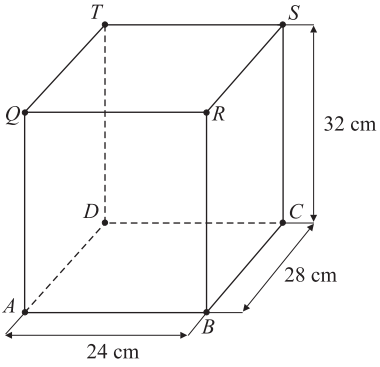


18. Kutiju dimenzija 19 cm, 15 cm i 4 cm želimo zamotati u ukrasni papir.

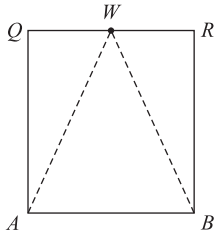
a) Koliko je minimalno potrebno ukrasnog papira (u cm^2)?

b) Koliko manjih kutijica volumena 20 cm^3 stane u ovu kutiju?

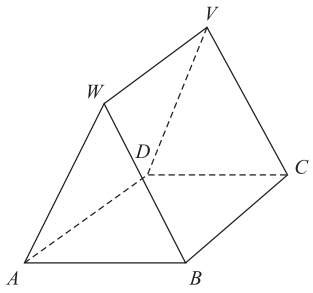
19. Ivo ide na tečaj obrade drva. Na tečaju će od drveta izrađivati geometrijska tijela. Ivo ima komad drveta u obliku pravokutne prizme (na slici).



Na prednjoj strani tijela, *ABRQ*, Ivo je označio točku *W* koja je polovište dužine $\overline{QR}$, te je tu točku spojio dužinama $\overline{AW}$ i $\overline{BW}$.



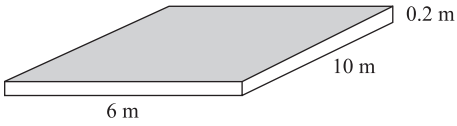
a) Odredite duljinu dužine $\overline{QW}$.
b) Izračunajte mjeru kuta $\angle WAQ$.
c) Izračunajte mjeru kuta $\angle AWB$.
d) Koliki je omjer površina bočne strane $ABRQ$ i trokuta ABW?



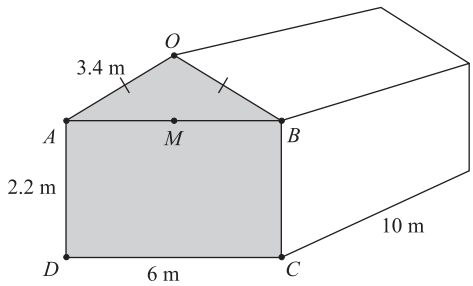
Ivo je iz svog komada drveta izrezao trostranu prizmu, kao na slici. Točka V je polovište dužine $\overline{TS}$ sa stražnje strane prizme.

e) Odredite duljinu dužine $\overline{AW}$.
f) Koliko je oplošje ove trostrane prizme?

20. Štagalj je sagrađen na postojećim temeljima oblika pravokutne prizme (slika).



a) Izračunajte volumen temelja.
b) Pri izradi nacrta štaglja, za 6 metara u stvarnosti, uzeli su 3 cm na papiru. U kojem je omjeru nacrtan plan?
c) Površina gornje plohe temelja je 60 m^2. Kolika je površina te iste plohe u nacrtu?



d) Štagalj ima oblik prizme. Prednja strana štaglja, $AOBCD$, nacrtana je na slici. $ABCD$ je pravokutnik, a M polovište dužine $\overline{AB}$. Odredite duljinu dužine $\overline{OM}$.
e) Odredite površinu prednje strane štaglja $AOBCD$.
f) Koliki je volumen štaglja?
g) Sve unutarnje strane štaglja, uključujući i pod, bit će obojane. Odredite površinu plohe koja će biti obojana.
h) Jedna litra boje dovoljna je za 16 m^2. Koliko litara boje je potrebno?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

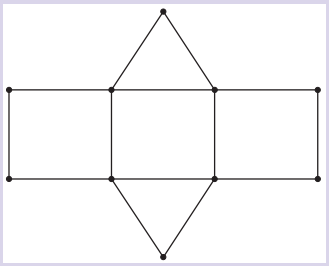
1. c

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** c **3.** c **4.** c **5.** b **6.** b **7.** d **8.** b **9.** c
10. a **11.** a **12.** c **13.** d **14.** b **15.** b **16.** d **17.** c **18.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1.



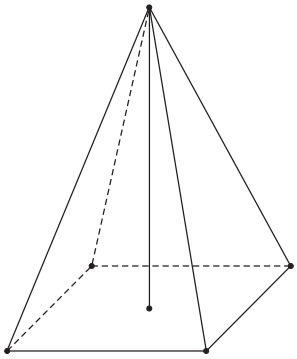
2. $O = 294\ \text{cm}^2$, $V = 343\ \text{cm}^3$ **3.** $O = 96\ \text{cm}^2$

4. $O = 72\,\text{cm}^2$, $V = 24\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **5.** $O = 276\ \text{cm}^2$ **6.** $1\,296\ \text{cm}^2$ **7.** $60\ \text{dm}^3$
8. $O = 60\sqrt{3}\ \text{cm}^2$, $V = 36\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **9.** $81\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **10.** $V_1 : V_2 = 1:5$

11. $\cos\alpha = \dfrac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \alpha = 19°\ 28'\ 16''$ **12.** $V = 125\sqrt{3}\ \text{cm}^3$ **13.** $a = 6\ \text{cm},\ b = 10\ \text{cm}$
14. $d = 6\ \text{m}$ **15.** $O = 36\left(3\sqrt{3}+10\right)\text{cm}^2$
16. $V = 6\sqrt{3}\,\text{R}^3$ **17.** $V = 88.2\ \text{m}^3$

18. a) Potrebno je najmanje 842 cm^2 ukrasnog papira. b) Stane 57 manjih kutijica.
19. a) 12 cm b) 20° 33' 21" c) 41° 6' d) 1:2 e) 34.18 cm f) 3 354.08 cm^2
20. a) 12 m^3 b) 1:200 c) 15 cm^2 d) 1.6 m e) 18 m^2
f) 180 m^3 g) 208 m^2 h) 13 litara

4.3.2. Piramida



Piramida je dio prostora omeđen mnogokutom (n-terokutom) koji nazivamo **baza** ili osnovica i n trokuta koje zovemo **pobočke**. Bridovi na osnovici su osnovni bridovi, a bridovi u kojima se spajaju pobočke su bočni bridovi.

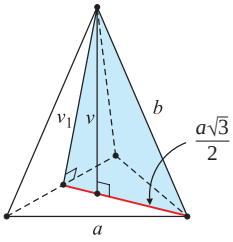
Piramidu nazivamo pravilna ako je baza pravilni mnogokut.

Površina baze je B, površina pobočja P, visina prizme v, visina pobočke v_1. Sve piramide jednakih osnovica i jednakih visina imaju isti obujam (volumen).

Obujam piramide $V = \frac{B \cdot v}{3}$

Oplošje piramide $O = B + P$

Oplošje i obujam pravilne trostrane piramide

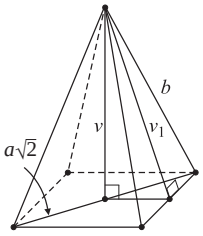


$$O = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3av_1}{2}, V = \frac{a^2\sqrt{3} \cdot v}{12}$$

$$b^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad b^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2$$

$$v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2$$

Oplošje i obujam pravilne četverostrane piramide

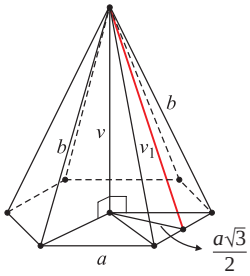


$$O = a^2 + 2av_1, V = \frac{a^2 v}{3}$$

$$b^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, \quad b^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

Površina dijagonalnog presjeka $D = \frac{a\sqrt{2} \cdot v}{2}$

Oplošje i obujam pravilne šesterostrane piramide



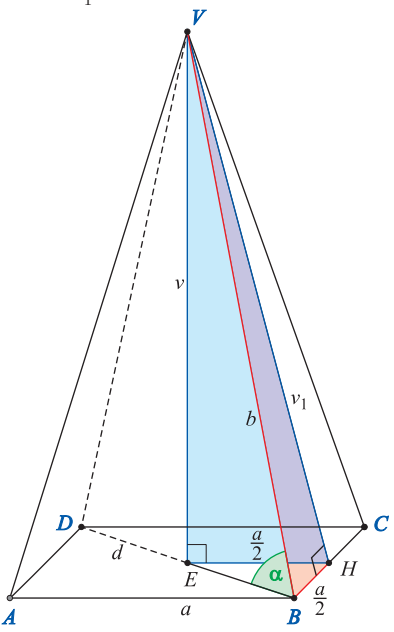
$$O = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} + 3av_1, V = \frac{a^2\sqrt{3} \cdot v}{2}$$

$$b^2 = v_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2, v_1^2 = v^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2, b^2 = v^2 + a^2$$

Površina većeg dijagonalnog presjeka $D = av$

Primjer 1: Baza uspravne četverostrane piramide je kvadrat duljine stranice 4 cm. Duljina bočnog brida piramide je 12 cm. Nađimo oplošje i obujam piramide. Koliki je prikloni kut bočnog brida prema ravnini baze?

Rješenje: Iz pravokutnog trokuta ΔBHV izračunat ćemo duljinu visine v_1.



$$v_1^2 = b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 144 - 4 = 140 \quad \Rightarrow \quad v_1 = 2\sqrt{35} \approx 11.83\,\text{cm}$$

$$O = B + P = a^2 + 4\frac{av_1}{2} = a^2 + 2av_1$$

$$O = 16 + 8 \cdot 2\sqrt{35} = 16\left(1 + \sqrt{35}\right) \approx 110.66\,\text{cm}^2$$

Iz pravokutnog trokuta ΔEHV izračunat ćemo duljinu visine v.

$$v^2 = v_1^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 140 - 4 = 136 \quad \Rightarrow \quad v = 2\sqrt{34} \approx 11.66\,\text{cm}$$

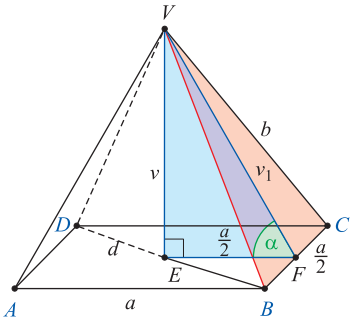
$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{a^2 v}{3} = \frac{16 \cdot 2\sqrt{34}}{3} = \frac{32\sqrt{34}}{3} \approx 62.2\,\text{cm}^3$$

Kut α izračunat ćemo iz pravokutnog trokuta ΔEBV.

$$\sin\alpha = \frac{v}{b} = \frac{11.66}{12} = 0.971666666 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 76^\circ\,19'\,42''$$

Primjer 2: U pravilnoj četverostranoj piramidi površina jedne pobočke je 10 dm^2, a kut između pobočke i osnovke $\alpha = 60°$. Odredimo obujam piramide.

Rješenje: Površina pobočke VBC je



$$P_p = \frac{av_1}{2} \Rightarrow \frac{av_1}{2} = 10 \Rightarrow av_1 = 20.$$

Iz trokuta ΔVEF slijedi:

$$\cos\alpha = \frac{\frac{a}{2}}{v_1} \Rightarrow \frac{\frac{a}{2}}{v_1} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{a}{2v_1} = \frac{1}{2} \Rightarrow a = v_1.$$

Uvrštavanjem u $av_1 = 20$ slijedi

$$a \cdot a = 20 \Rightarrow a = 2\sqrt{5} \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{5}.$$

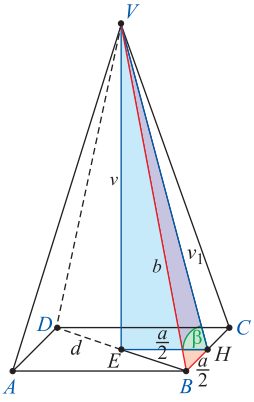
Iz trokuta ΔVEF slijedi:

$$\sin 60° = \frac{v}{v_1} \Rightarrow v = v_1 \sin 60° = 2\sqrt{5} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{15}.$$

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{a^2 \cdot v}{3} = \frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2 \cdot \sqrt{15}}{3} = \frac{20\sqrt{15}}{3}\,\text{dm}^3$$

Primjer 3: Odredimo prikloni kut koji pobočka pravilne četverostrane piramide zatvara s njezinom bazom ako je površina pobočja jednaka dvostrukoj površini baze.

Rješenje: Površina pobočja je $P = 2av_1$, a površina baze $B = a^2$.



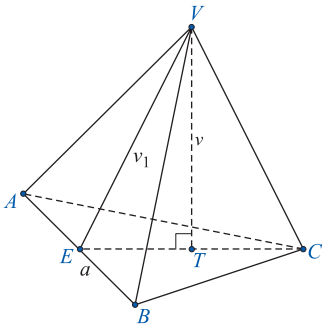
$$P = 2B \Rightarrow 2av_1 = 2a^2 \Rightarrow v_1 = a.$$

Iz pravokutnog trokuta ΔEHV slijedi:

$$\cos\beta = \frac{\frac{a}{2}}{v_1} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2} \Rightarrow \beta = \frac{\pi}{3} \text{ ili } \beta = 60°.$$

Primjer 4: Visina pravilnog tetraedra je $v = 2\sqrt{3}$. Odredimo duljinu brida tetraedra.

Rješenje: Strane tetraedra su jednakostranični trokuti. Iz trokuta ΔABV slijedi $v_1 = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Nadalje, točka T je težište trokuta ABC i dijeli težišnicu u omjeru $1:2$ iz čega slijedi da je $|ET| = \frac{1}{3} v_1$.



U pravokutnom trokutu ΔETV vrijedi:

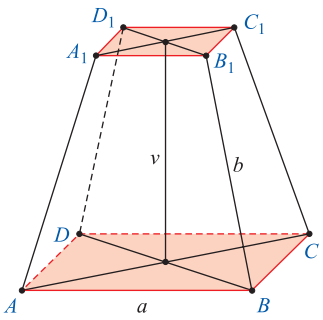
$$v_1^2 = \left(\frac{1}{3} v_1\right)^2 + v^2.$$

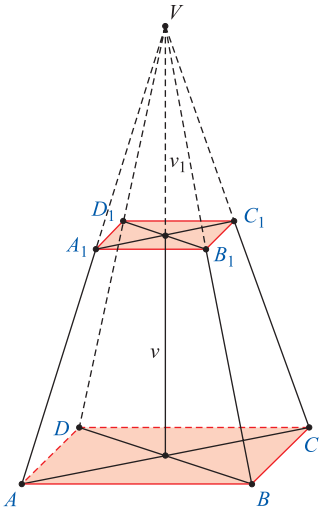
$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{3}\right)^2$$

$$\frac{3a^2}{4} = \frac{a^2}{12} + 12 \;/\cdot 12 \;\Rightarrow\; 9a^2 = a^2 + 144$$

$$8a^2 = 144 \;\Rightarrow\; a^2 = 18 \;\Rightarrow\; a = 3\sqrt{2}$$

Ako piramidu presiječemo ravninom paralelnoj osnovki dobit ćemo dva geometrijska tijela: manju odsječenu piramidu (koju nazivamo dopunjak) i krnju piramidu.





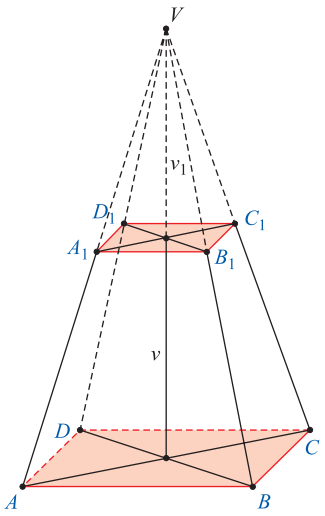
Ako su, redom, h visina cijele piramide, v_1 visina dopunjka, v visina krnje piramide, B površina veće osnovke i B_1 površina manje osnovke, onda iz svojstva sličnosti slijedi:

$$B : B_1 = h^2 : v_1^2.$$

Obujam krnje piramide $$V = \frac{v}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right)$$

Primjer 5: Visina piramide je 35 cm. Ako tu piramidu presiječemo ravninom koja je paralelna bazi, dobit ćemo krnju piramidu s bazama površina 245 cm^2 i 80 cm^2. Koliki je volumen krnje piramide?

Rješenje: Visina cijele piramide je $h = v + v_1$, a $v_1 = h - v$.



Uvrštavanjem u formulu $B : B_1 = h^2 : v_1^2$ dobivamo:

$245 : 80 = 35^2 : (35 - v)^2$.

$245(1\,225 - 70v + v^2) = 80 \cdot 1\,225 \,/ : 245$

$1\,225 - 70v + v^2 = 400$

$v^2 - 70v + 825 = 0$

$v = 15$ (rješenje $v = 55$ nije moguće)

Volumen krnje piramide je:

$$V = \frac{v}{3}\left(B + B_1 + \sqrt{BB_1}\right) =$$

$$= \frac{15}{3}\left(245 + 80 + \sqrt{245 \cdot 80}\right)$$

$V = 2\,325$ cm^3.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2009.) Baza uspravne četverostrane piramide je kvadrat duljine stranice 6 cm. Duljina visine piramide je 10 cm. Koliki je obujam (volumen) te piramide?

a) 60 cm^3 b) 120 cm^3 c) 360 cm^3 d) 600 cm^3

2. (NI 2009.) Osnovka (baza) uspravne četverostrane piramide je kvadrat. Duljina visine piramide je 8 cm. Mjera kuta između bočnoga brida i ravnine osnovke je 55°. Odredite oplošje te piramide.

a) 151.9 cm^2 b) 189.5 cm^2 c) 204.2 cm^2 d) 241.1 cm^2

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Izračunajte obujam (volumen) pravilne četverostrane piramide kojoj je duljina visine 15 cm, a površina dijagonalnog presjeka 105 cm^2.

a) $105\sqrt{2}$ cm^3 b) 400 cm^3 c) 490 cm^3 d) $490\sqrt{2}$ cm^3

2. Obujam uspravne piramide, čija je osnovka kvadrat, iznosi 128 cm^3, a duljina stranice osnovke je 8 cm. Duljina pobočnog brida piramide je:

a) $\sqrt{67}$cm b) $\sqrt{68}$ cm c) $\sqrt{69}$ cm d) $\sqrt{70}$ cm.

3. Za koliko će se postotaka povećati obujam pravilne uspravne četverostrane piramide čija je osnovka kvadrat ako se stranica osnovke duljine 5 cm poveća za 1 cm, a visina duljine 3 cm poveća za 2 cm?

a) 120% b) 130% c) 140% d) 150%

4. Odredite oplošje pravilne šesterostrane piramide ako joj je visina v trostruko veća od osnovnog brida a.

a) $\frac{3}{2}\sqrt{3}\left(1+\sqrt{13}\right)a^2$ b) $\frac{3}{2}\sqrt{3}a^2$

c) $\frac{3}{2}a^2$ d) $\frac{3}{4}\left(1+\sqrt{13}\right)a^2$

5. Suma osnovnog brida i visine bočne strane pravilne četverostrane piramide iznosi 11 cm. Ako se osnovni brid poveća za 2 cm, a visina bočne strane za 1 cm, oplošje se poveća za 64 cm^2. Koliko je oplošje piramide?

a) 56 cm^2 b) 72 cm^2 c) 96 cm^2 d) 102 cm^2

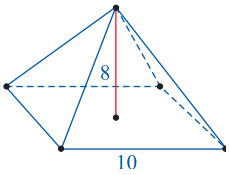
6. Odredite oplošje pravilne četverostrane piramide ako joj je visina trostruko veća od polumjera r kružnice opisane bazi.

a) $r^2\left(8+\sqrt{2}\right)$ b) $2r^2\left(1+\sqrt{19}\right)$ c) $8\sqrt{2}r^2$ d) $2\sqrt{19}r^2$

7. Ako od piramide čija baza ima površinu 36 cm^2 odsiječemo piramidu ravninom paralelnom bazi, dobit ćemo krnju piramidu volumena 76 cm^3 i visine 3 cm. Koliki je volumen odsječene piramide?

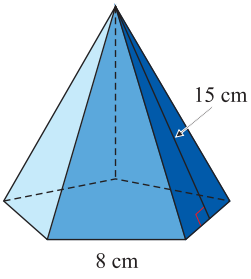
a) 32 cm^3 b) 16 cm^3 c) 44 cm^3 d) 36 cm^3

8. Odredite obujam pravilne četverostrane piramide (zaokružite na najbližu kubičnu jedinicu).



a) 800
b) 267
c) 80
d) 27

9. Kolika je površina pobočja pravilne piramide na slici?



a) 240 cm^2
b) 300 cm^2
c) 120 cm^2
d) 180 cm^2

10. Piramida faraona Kafre sagrađena je za njegovog sina Khufa. Visina joj je 136.4 m, a osnovni brid duljine 215.2 m. Odredite obujam piramide na najbliži kubni metar.

a) 6 316 826 m^3
b) 2 105 609 m^3
c) 4 003 787 m^3
d) 1 334 596 m^3

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Duljina osnovnog brida pravilne četverostrane piramide je 2 cm, a visina piramide je $\sqrt{2}$. Kolika je duljina bočnog brida?

2. Duljina osnovnog brida pravilne četverostrane piramide jednaka je visini piramide i iznosi 2 cm. Izračunajte oplošje piramide.

3. Koliki je obujam pravilne četverostrane piramide oplošja 3 920 cm^2 ako je duljina visine pobočke 29 cm?

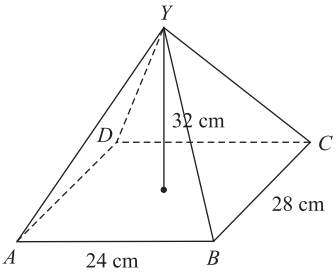
4. Visina pravilne četverostrane piramide je 10 cm. Koliki je obujam piramide ako sve strane te piramide imaju jednaku površinu?

5. Oplošje pravilne šesterostrane piramide iznosi $72\sqrt{3}$ cm^2, a duljina osnovnog brida piramide je 4 cm. Koliki je obujam piramide?

6. Obujam pravilne četverostrane krnje piramide je 74 cm^3, a duljina visine je 6 cm. Kolike su njene baze ako im se površine međusobno razlikuju za 7 cm^2?

7. Koliki je obujam krnje piramide ako su joj površine baza $B = 81$ cm^2, $B_1 = 36$ cm^2, a visina dopunjka 18 cm.

8. Na slici je dana četverostrana uspravna piramida.



a) Izračunajte obujam ove piramide (u cm^3).
b) Odredite duljinu bočnog brida $\overline{AY}$ (zaokružite na najbliži cm).
c) Koristeći rezultat b) zadatka, odredite površinu pobočke *ABY*.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. b **2.** c

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** b **3.** c **4.** a **5.** c **6.** b **7.** a **8.** b **9.** b **10.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

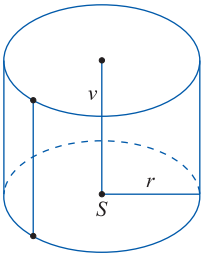
1. $b = 2$ cm **2.** $O = 4\left(1+\sqrt{5}\right)$ cm^2 **3.** $V = 11\,200$ cm^3 **4.** $V = 88.89$ cm^3

5. $V = 48\sqrt{3}$ cm^3 **6.** $B = 16$ cm^2, $B_1 = 9$ cm^2 **7.** $V = 513$ cm^3

8. a) 7 168 cm^3 b) $36.93 \approx 37$ cm c) 420 cm^2

4.3.3. Valjak

Valjak je dio prostora omeđen s dva jednaka paralelna kruga (osnovke ili baze valjka) i zakrivljenom plohom (plašt valjka). **Os valjka** je pravac koji prolazi središtima baza valjka. **Izvodnica** valjka je svaka dužina koja spaja rubne točke osnovica valjka, a paralelna je s osi valjka.



Površina osnovke valjka

$$B = r^2\pi$$

Površina plašta valjka

$$P_p = 2r\pi v$$

Oplošje valjka

$$O = 2B + P_p \Rightarrow O = 2r^2\pi + 2r\pi v$$

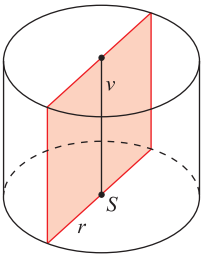
Obujam valjka

$$V = B \cdot v \Rightarrow V = r^2\pi v$$

Jednakostranični valjak je valjak kojemu je promjer osnovke jednak visini valjka, tj. $2r = v$.

Primjer 1: Osni presjek valjka je kvadrat površine 64 cm^2. Odredimo oplošje i obujam valjka.

Rješenje: Osni presjek valjka je svaki presjek valjka ravninom koja sadrži os valjka.



$P_{op} = 2r \cdot v,\ 2r = v$

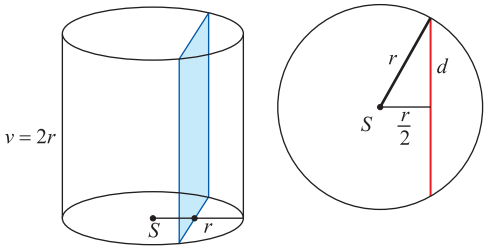
$64 = v^2 \Rightarrow v = 8$ cm, $r = 4$ cm

$O = 2r^2\pi + 2r\pi v = 2r\pi(r + v) = 8\pi \cdot 12 = 96\pi$ cm^2

$V = B \cdot v = r^2\pi v = 16\pi \cdot 8 = 128\pi$ cm^3

Primjer 2: Polovištem polumjera baze jednakostraničnog valjka položena je ravnina okomita na polumjer. Površina presjeka valjka i te ravnine je $72\sqrt{3}$ cm^2. Odredimo polumjer valjka.

Rješenje: Valjak je jednakostraničan ako mu je osni presjek kvadrat, tj. $2r = v$.



Odredimo d.

$$d^2 = r^2 - \left(\frac{r}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3r^2}{4} \quad \Rightarrow \quad d = \frac{r\sqrt{3}}{2}$$

Presjek valjka ravninom je pravokutnik sa stranicama v i $2d$.

$$P = 2d \cdot 2r = 4r \cdot \frac{r\sqrt{3}}{2} = 2r^2\sqrt{3}$$

Polumjer valjka odredit ćemo iz površine presjeka.

$P = 72\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad 2r^2\sqrt{3} = 72\sqrt{3}$

$\Rightarrow \quad r^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad r = 6$ cm.

Primjer 3: Za koliko će se postotaka povećati obujam valjka ako mu se i polumjer duljine 4 cm i visina 10 cm povećaju za 2 cm?

Rješenje: $r = 4$ cm, $v = 10$ cm $\qquad r_1 = 6$ cm, $v_1 = 12$ cm

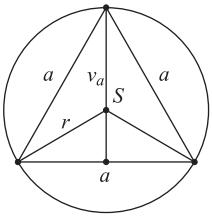
$V = r^2\pi v = 160\pi$ cm^3 $\qquad V_1 = r_1^2\pi v_1 = 432\pi$ cm^3

$$V_1 = \frac{432\pi}{160\pi}V \quad \Rightarrow \quad V_1 = 2.7V \quad \Rightarrow \quad V_1 = V + 1.7V$$

$p = 1.7 \cdot 100 = 170\%$

Primjer 4: U valjak obujma 40π cm^3 upisana je pravilna trostrana prizma. Odredimo obujam prizme.

Rješenje: Baza prizme je jednakostraničan trokut stranice a upisan u krug.



$$r = \frac{2}{3}v_a,\ v_a = \frac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \quad r = \frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \Rightarrow \quad a = r\sqrt{3}$$

$$V_v = r^2\pi v \quad \Rightarrow \quad 40\pi = r^2\pi v \quad \Rightarrow \quad r^2 v = 40$$

$$V_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}\cdot v = \frac{\left(r\sqrt{3}\right)^2\sqrt{3}\cdot v}{4} = r^2 v\frac{3\sqrt{3}}{4} =$$

$$= 40\cdot\frac{3\sqrt{3}}{4} = 30\sqrt{3} \text{ cm}^3$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Metalnu kuglu obujma 36π cm^3 treba pretopiti u valjak. Odredite visinu valjka ako je polumjer baze valjka jednak polumjeru kugle.

2. (IK 2010.) Kuglu polumjera 5 cm treba pretopiti u valjak. Ako će polumjer baze valjka biti 4 cm, odredite visinu valjka zaokružujući rezultat na dvije decimale.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Visina valjka je za 10 cm veća od polumjera baze, a oplošje valjka iznosi 144π cm^2. Duljina visine je:

a) 4 cm b) 7 cm c) 14 cm d) 21 cm.

2. Valjak ima oplošje 930π cm^3 i visinu duljine 1.6 dm. Obujam tog valjka je:

a) $3\,600\pi$ cm^3 b) $3\,000\pi$ cm^3 c) $3\,300\pi$ cm^3 d) $4\,600\pi$ cm^3.

3. Obujam valjka iznosi 200π cm^3, a duljina polumjera baze i visina valjka odnose se kao $1 : 1.6$. Oplošje tog valjka je:

a) 100π cm^2 b) 130π cm^2 c) 140π cm^2 d) 160π cm^2.

4. U valjak polumjera 4 cm i visine 2 cm upisana je pravilna četverostrana piramida. Obujam piramide je:

a) $\frac{55}{3}$ cm^3 b) 64 cm^3 c) 32 cm^3 d) $\frac{64}{3}$ cm^3.

5. U valjak je upisana pravilna šesterostrana prizma. Plašt valjka i pobočje prizme odnose se kao:

a) $5\pi : 6$ b) $2\pi : 3$ c) $\pi : 3$ d) $2\pi : 5$.

6. U pravilnu šesterostranu prizmu upisan je valjak. Pobočje prizme i plašt valjka odnose se kao:

a) $6 : (\sqrt{3}\pi)$ b) $\sqrt{3}\pi : 4$ c) $4 : (\sqrt{2}\pi)$ d) $36 : (\sqrt{3}\pi)$.

7. Polumjer valjka smanji se za 20%. Obujam tog valjka smanji se za:

a) 20% b) 26% c) 36% d) 40%.

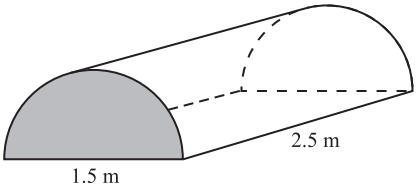
8. Ako je visina valjka jednaka promjeru osnovke, tada je omjer površina njegove osnovke i plašta jednak:

a) 1 : 2 b) 1 : 3 c) 1 : 4 d) 1 : 5.

9. Koja od sljedećih formula određuje oplošje valjka bez jedne baze? (r je polumjer baze, a v visina valjka.)

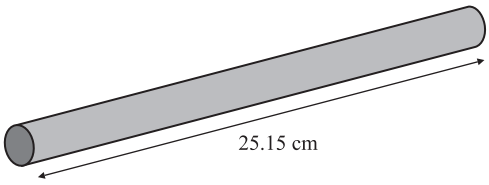
a) $2r\pi v + 2\,r^2\pi$ b) $2r\pi v + r^2\pi$ c) $2r\pi v - r^2\pi$ d) $2r\pi v$

10. Koliko je potrebno platna za šator na slici (uključujući i dno)?



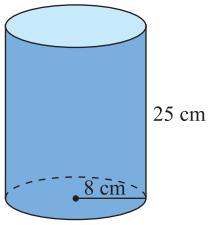
a) 5.5 m^2
b) 7.7 m^2
c) 8.8 m^2
d) 11.4 m^2

11. Štap prikazan slikom ima volumen 490.87 cm^3. Duljina štapa iznosi 25.15 cm. Polumjer štapa (u cm zaokružen na jedno decimalno mjesto) je:



a) 2.5
b) 5
c) 6.3
d) 12.5.

12. Kolika je površina plašta valjka na slici?

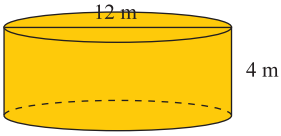


a) 1 256.6 cm^2
b) 402.2 cm^2
c) 628.3 cm^2
d) 3 217. 8 cm^2

13. Kako se odnose obujmovi sličnih valjaka ako se njihovi polumjeri odnose kao 2 : 7?

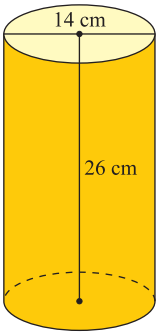
a) 6 : 343 b) 8 : 343 c) 6 : 21 d) 4 : 14

14. Koliko je oplošje valjka na slici?



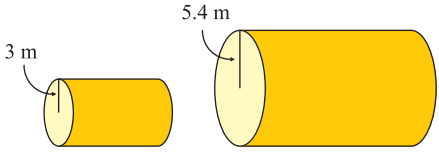
a) 527.8 m^2
b) 263.9 m^2
c) 377.0 m^2
d) 188.5 m^2

15. Kolika je površina plašta valjka na slici?



a) 1 134.5 cm^2
b) 1 143.5 cm^2
c) 1 153.5 cm^2
d) 1 163.5 cm^2

16. Koji je koeficijent proporcionalnosti sličnih valjaka sa slike?



a) 1 : 4
b) 1 : 5
c) 1 : 8
d) 5 : 9

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Površina osnog presjeka valjka je 180 cm^2, a opseg 54 cm. Odredite oplošje i obujam valjka.

2. Izračunajte obujam i površinu plašta uspravnog valjka ako je duljina polumjera osnovke 12 cm, a oplošje valjka 912π cm^2.

3. Ako je oplošje valjka 324π cm^2, a visina i polumjer su u omjeru 7 : 2, izračunajte obujam i površinu plašta.

4. Izračunajte oplošje jednakostraničnog valjka ako je površina plašta 50 cm^2.

5. Ako se promjer valjka poveća za 20%, koliko se poveća obujam tog valjka?

6. Osnovka pravilne šesterostrane piramide upisana je u osnovku valjka, a vrh joj se nalazi u središtu gornje osnovke valjka. Visina piramide je 6 cm, a obujam $12\sqrt{3}$ cm^3. Koliko je oplošje valjka?

7. Polumjer kamenog bata u obliku valjka (služi za nabijanje zemlje) je 1.6 m i ima visinu 2 m. Kolika je njegova masa ako znamo da 1 dm^3 ima masu 2.6 kg?

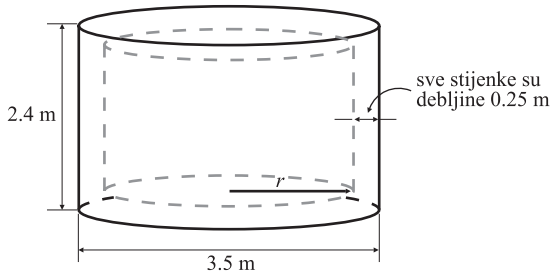
8. Od drvenog valjka polumjera baze 9 cm i visine 12 cm istesana je najveća moguća pravilna trostrana prizma. Koliki je volumen otpadaka?

9. Izračunajte obujam valjka koji je upisan u jednakobridnu pravilnu šesterostranu prizmu brida duljine 6 cm.

10. Kvadrat stranice 4 cm savijen je u plašt valjka. Izračunajte obujam valjka.

11. Posuda oblika valjka polumjera 4 cm i visine 12 cm napunjena je do polovine vodom. Ako se u posudu uroni metalna kugla polumjera 3 cm do koje visine se podigne razina vode?

12. Zatvoreni cilindrični bazen za vodu ima vanjski promjer 3.5 m. Vanjska visina bazena je 2.4 m. Stijenke (dno, vrh i sa strane) debljine su 0.25 m.



a) Koliki je unutarnji polumjer?
b) Odredite najveću količinu vode koja stane u bazen (u m^3).

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. 4 cm **2.** 10.42 cm

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

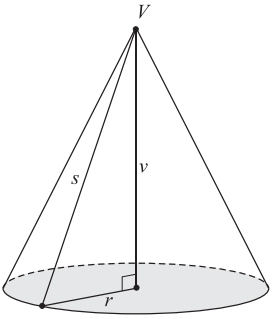
1. c **2.** a **3.** b **4.** d **5.** c **6.** a **7.** c **8.** c
9. b **10.** d **11.** a **12.** a **13.** b **14.** c **15.** b **16.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $v = 15$ cm, $r = 6$ cm, $V = 540\pi$ cm^3, $O = 252\pi$ cm^2
2. $v = 26$ cm, $V = 3744\pi$ cm^3, $P_p = 624\pi$ cm^2
3. $v = 21$ cm, $r = 6$ cm, $V = 756\pi$ cm^3, $P_p = 252\pi$ cm^2
4. $O = 75$ cm^2 **5.** 44% **6.** $O = 24\pi$ cm^2
7. $V = 1280\pi$ dm^3, $m = 10455.22$ kg
8. $V = \frac{r^2 v}{4}\left(4r - 3\sqrt{3}\right)$ cm^3 = 7 485.335 cm^3
9. $V = \frac{3}{4} \cdot 6^3 \pi \text{cm}^3 = 162\pi \text{cm}^3$ **10.** $V = \frac{16}{\pi}$ **11.** $h = 6 + 2.25 = 8.25$cm
12. a) 1.5 m b) 13 m^3

4.3.4. Stožac

Stožac je dio prostora omeđen krugom (osnovka stošca) i zakrivljenom plohom (plašt stošca). **Os stošca** je pravac koji prolazi središtem osnovke i vrhom stošca. **Izvodnica stošca** s je svaka dužina koja spaja vrh stošca s nekom točkom na rubu osnovke.



Površina osnovke stošca $B = r^2\pi$

Površina plašta stošca (površina kružnog isječka)

$$P_p = r\pi s \quad \text{ili} \quad P_p = \frac{rl}{2} = \frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$$

(l duljina luka kružnog isječka, α središnji kut isječka)

Oplošje stošca

$$O = B + P_p = r^2\pi + r\pi s = r\pi(r + s)$$

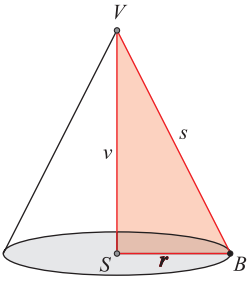
Obujam stošca

$$V = \frac{B \cdot v}{3} = \frac{r^2\pi v}{3}$$

Jednakostranični stožac je takav stožac kojemu je promjer osnovke jednak duljini izvodnice, tj. $2r = s$.

Primjer 1: Odredimo oplošje i obujam stošca ako je polumjer baze 3 cm, a visina stošca 4 cm.

Rješenje: Iz trokuta ΔVSB izračunat ćemo izvodnicu.



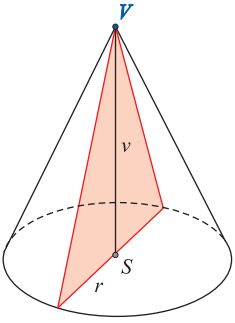
$$s = \sqrt{r^2 + v^2} = \sqrt{9+16} = 5$$

$$O = r\pi(r+s) = 3\pi(3+5) = 24\pi\,\text{cm}^2$$

$$V = \frac{r^2\pi v}{3} = \frac{3^2\pi \cdot 4}{3} = 12\pi\,\text{cm}^3$$

Primjer 2: Opseg osnog presjeka stošca iznosi 36 cm, a plašt stošca 65π cm^2. Odredimo oplošje i obujam stošca.

Rješenje: Osni presjek je jednakokračan trokut s osnovicom $2r$ i krakom s.



$O_o = 2r + 2s \quad \Rightarrow \quad 2r + 2s = 36 \quad \Rightarrow \quad s = 18 - r$

Plašt stošca je kružni isječak.

$P_p = r\pi s \quad \Rightarrow \quad r\pi s = 65\pi \quad \Rightarrow \quad rs = 65$

Riješimo dobiveni sustav.

$$r(18-r)=65$$
$$r^2-18r+65=0$$
$$r_1=5,\ r_2=13 \quad \Rightarrow \quad s_1=13,\ s_2=5$$

Rješenje je $r=5$ cm i $s=13$ cm (drugo rješenje ne zadovoljava).

Visina stošca je $v=\sqrt{s^2-r^2}=\sqrt{169-25}=\sqrt{144}=12\,\text{cm}$.

Odredimo sad oplošje i obujam.

$$O=r\pi(r+s)=5\pi(5+13)=90\pi\ \text{cm}^2$$
$$V=\frac{r^2\pi v}{3}=\frac{25\pi\cdot 12}{3}=100\pi\ \text{cm}^3$$

Primjer 3: Za koliko će se postotaka povećati obujam stošca ako mu se polumjer baze duljine 5 cm poveća za 1 cm, a visina duljine 6 cm poveća za 2 cm?

Rješenje: $r_1=5,\ v_1=6$ $\qquad$ $r_2=6,\ v_2=8$

$$V_1=\frac{r_1^2\pi v_1}{3}=\frac{25\pi\cdot 6}{3}=50\pi\ \text{cm}^3 \qquad V_2=\frac{r_2^2\pi v_2}{3}=\frac{36\pi\cdot 8}{3}=96\pi\ \text{cm}^3$$

$$V_2=\frac{96}{50}V_1=1.92V_1=V_1+0.92V_2 \quad \Rightarrow \quad p=0.92\cdot 100=92\%$$

Primjer 4: Obujam stošca je $27\pi\ \text{cm}^3$, a visina stošca 3 cm. Odredimo kut α pri vrhu osnog presjeka.

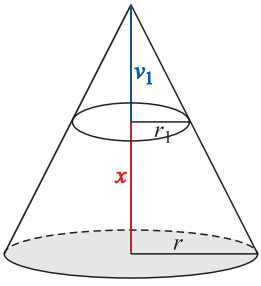
Rješenje: $V=\frac{r^2\pi v}{3} \quad \Rightarrow \quad 27\pi=\frac{r^2\pi 3}{3} \quad \Rightarrow \quad r=3\sqrt{3}$

Iz pravokutnog trokuta s katetama v i r te hipotenuzom s izračunamo kut.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{r}{v}=\frac{3\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\alpha}{2}=60° \quad \Rightarrow \quad \alpha=120°.$$

Primjer 5: Zadan je stožac polumjera baze 5 cm i visine 6 cm. Na kojoj udaljenosti od baze treba položiti ravninu paralelnu s bazom, tako da stožac bude podijeljen na dva dijela jednakih obujama?

Rješenje: Visina stošca $v = v_1 + x$, gdje je v_1 visina manjeg stošca.



Iz sličnosti slijedi:

$$V:V_1=v^3:v_1^3 \quad \Rightarrow \quad 2:1=6^3:v_1^3$$
$$v_1=\sqrt[3]{108}=4.76\,\text{cm}.$$

Tražena udaljenost je

$$x=v-v_1=6-4.76=1.24\ \text{cm}.$$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Stožac ima oplošje 24π dm^2 i duljinu polumjera osnovice 30 cm. Obujam tog stošca je:

a) 24π dm^3 b) 15π dm^3 c) 12π dm^3 d) 8π dm^3.

2. Stožac ima obujam 96π cm^3 i visinu duljine 0.8 dm. Oplošje tog stošca je:

a) 96π cm^2 b) 64π cm^2 c) 86π cm^2 d) 112π cm^2.

3. Polumjer stošca smanji se za 10%. Obujam tog stošca pritom se smanji za:

a) 13% b) 19% c) 15% d) 23%.

4. Kada se plašt stošca razvije u ravninu, dobije se polukrug. Koliki je kut na vrhu osnog presjeka tog stošca?

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°

5. Visina stošca je 8 cm. Na udaljenosti 3 cm od vrha položena je ravnina paralelna s bazom. Površina presjeka ravnine i stošca je 27 cm^2. Izračunajte obujam stošca.

a) $V = 512$ cm^3 b) $V = 425$ cm^3 c) $V = 325$ cm^3 d) $V = 212$ cm^3

6. Polumjer osnovke stošca je 5 cm, a izvodnica 13 cm. Kolika je visina njemu sličnog stošca ako je obujam sličnog stošca osam puta veći?

a) $v = 12$ cm b) $v = 24$ cm c) $v = 16$ cm d) $v = 36$ cm

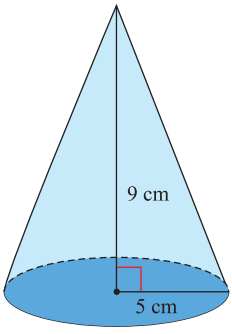
7. Dva stošca imaju zajedničku bazu polumjera 2 dm. Ako se njihovi obujmi razlikuju za 5π dm^3, onda im se visine razlikuju za:

a) 1.2 cm b) 2.4 cm c) 3 cm d) 3.75 cm.

8. Valjak i stožac imaju polumjer od 3 cm i visinu od 8 cm. Koji je omjer volumena stošca i valjka?

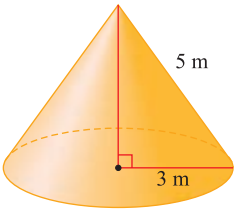
a) 1 : 2 b) 1 : 3 c) $1 : \pi$ d) 1 : 1

9. Kolika je površina plašta stošca sa slike?



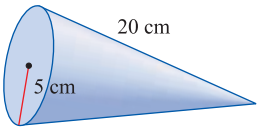
a) 240.3 cm^2
b) 141.4 cm^2
c) 161.7 cm^2
d) 706.9 cm^2

10. Koliki je obujam stošca sa slike?



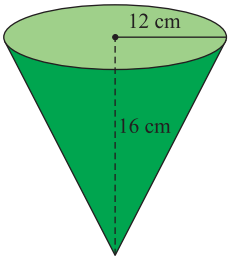
a) 47.12 m^3
b) 141.37 m^3
c) 94.25 m^3
d) 31.42 m^3

11. Koliko je oplošje stošca sa slike?



a) 314.2 cm^2
b) 392.7 cm^2
c) 706.9 cm^2
d) 78.5 cm^2

12. Koliko papira treba da se napravi šuplja posuda oblika kao na slici?



a) 1 206.4 cm^2
b) 603.2 cm^2
c) 1 508.0 cm^2
d) 754.0 cm^2

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Izračunajte obujam i oplošje stošca čiji je polumjer baze 15 cm, a površina plašta 375π cm^2.

2. Opseg osnog presjeka uspravnog stošca je 48 cm, a površina plašta 135π cm^2. Izračunajte obujam i oplošje stošca.

3. Visina uspravnog stošca je za 1 cm dulja od polumjera baze, a izvodnica je za 1 cm dulja od visine. Izračunajte obujam i oplošje stošca.

4. Plašt stošca je kružni isječak polumjera 8 cm i središnjeg kuta od 135°. Odredite obujam i oplošje stošca.

5. Površina plašta stošca tri je puta veća od površine baze. Ako je visina stošca 2 dm, koliki je obujam stošca?

6. Izračunajte oplošje i obujam stošca polumjera r kojemu je osni presjek jednakostraničan trokut.

7. Polumjer osnovke stošca jednak je polumjeru polukugle r. Ako je oplošje stošca jednako oplošju polukugle, kolika je visina stošca?

8. Stožac obujma V presiječemo ravninom paralelnom s bazom stošca tako da je obujam manjeg odsječenog stošca osam puta manji od V. Koliki je omjer baza velikog i malog stošca?

9. Polumjer osnovke stošca je 12 cm, a izvodnica 40 cm. Koliki je kut kružnog isječka koji se dobije razmatanjem plašta stošca?

10. Zadana su dva stošca. Polumjer baze prvog je četiri puta veći od polumjera baze drugog stošca, a visina prvog stošca je četiri puta manja od visine drugog. Koliki je omjer volumena prvog i drugog stošca?

RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

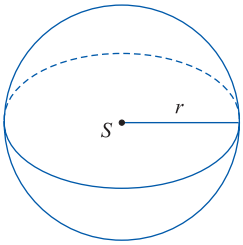
1. c **2.** a **3.** b **4.** c **5.** a **6.** b **7.** d **8.** b
9. c **10.** a **11.** b **12.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $v = 20$ cm, $s = 25$ cm, $V = 1500\pi$ cm^3, $O = 600\pi$ cm^2
2. $r = 9$ cm, $v = 12$ cm, $s = 15$ cm, $V = 324\pi$ cm^3, $O = 216\pi$ cm^2
3. $r = 3$ cm, $v = 4$ cm, $s = 5$ cm, $V = 12\pi$ cm^3, $O = 24\pi$ cm^2
4. $O = 33\pi$ cm^2, $V = 3\sqrt{55}\pi$ cm^3 **5.** $V = \frac{1}{3}\pi$ dm^3 **6.** $O = 3r^2\pi$, $V = \frac{\sqrt{3}}{3}r^3\pi$
7. $v = r\sqrt{3}$ **8.** $B : B_1 = 4 : 1$ **9.** $\alpha = 108°$ **10.** $V_1 : V_2 = 4 : 1$

4.3.5. Kugla

Kugla je dio prostora omeđen sferom. Sfera je skup svih točaka prostora koje su jednako udaljene od neke čvrste točke S koju nazivamo središte. Polumjer kugle je r.



Oplošje kugle

$$O = 4r^2\pi$$

Obujam kugle

$$V = \frac{4r^3\pi}{3}$$

Primjer 1: Odredimo oplošje i obujam kugle polumjera 4 cm.

Rješenje: $O = 4r^2\pi = 4 \cdot 4^2\pi = 64\,\text{cm}^2$

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot 4^3\pi}{3} = \frac{256\pi}{3}\,\text{cm}^3$$

Primjer 2: Oplošje kugle je 207.36π cm^2. Odredimo obujam kugle.

Rješenje: Iz oplošja izračunamo polumjer kugle, a zatim uvrstimo u formulu za obujam.

$$O = 4r^2\pi \;\Rightarrow\; r^2 = \frac{207.36\pi}{4\pi} = 51.84 \;\Rightarrow\; r = 7.2\text{ cm}$$

$$V = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4 \cdot (7.2)^3\,\pi}{3} = 497.664\,\pi\text{ cm}^3$$

Primjer 3: Ako se polumjer kugle poveća za 25%, koliko se poveća obujam kugle?

Rješenje: $V = \frac{4r^3\pi}{3} \Rightarrow \quad V_1 = \frac{4r_1^3\pi}{3},\ r_1 = 1.25r$

$$V_1 = \frac{4(1.25r)^3\,\pi}{3} = \frac{4 \cdot 1.953125r^3\pi}{3} =$$

$$= 1.953125\,\frac{4r^3\pi}{3} = 1.953125 \cdot V$$

$$V_1 = V + 0.953125V \quad \Rightarrow \quad p = 0.953125 \cdot 100 = 95.3125\%$$

Zaključujemo da je obujam povećan za 95.3125%.

Primjer 4: Kugla polumjera 2 cm pretopi se u manje kuglice promjera 1 cm. Koliko se dobije manjih kuglica?

Rješenje: Izračunajmo obujmove velike i male kugle.

$$V_v = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4\cdot 2^3\pi}{3} = \frac{32}{3}\pi \text{ cm}^3$$

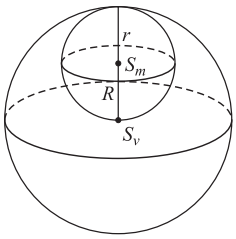
$$V_m = \frac{4r^3\pi}{3} = \frac{4\cdot 0.5^3\pi}{3} = \frac{1}{6}\pi \text{ cm}^3$$

Broj manjih kuglica dobije se dijeljenjem većeg s manjim obujmom.

$$\frac{V_v}{V_m} = \frac{\frac{32}{3}\pi}{\frac{1}{6}\pi} = 64$$

Primjer 5: Manja kugla nalazi se unutar veće kugle obujma 16 cm^3. Kugle se dotiču, a središte veće nalazi se na sferi manje. Koliki je obujam manje kugle?

Rješenje: Polumjer manje kugle jednak je polovini polumjera veće kugle. Iz obujma slijedi:



$$V_v = \frac{4R^3\pi}{3} \Rightarrow R^3 = \frac{16\cdot 3}{4\pi} \Rightarrow R = \sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}$$

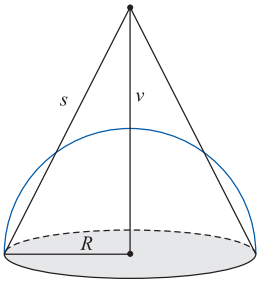
$$r = \frac{R}{2} = \frac{\sqrt[3]{\frac{12}{\pi}}}{2} = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}$$

$$V_m = \frac{4\left(\sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}}\right)^3\pi}{3} = \frac{4\cdot\frac{3}{2\pi}\cdot\pi}{3} = 2\,\text{cm}^3.$$

Primjer 6: Polumjer osnovke stošca jednak je polumjeru kugle. Ako je obujam stošca jednak obujmu polukugle, kolika je visina stošca?

Rješenje: Obujam stošca je $V_s = \frac{R^2\pi v}{3}$.

Obujam polukugle je



$$V_{pk} = \frac{1}{2}\cdot\frac{4R^3\pi}{3} = \frac{2R^3\pi}{3}.$$

$$V_s = V_{pk} \Rightarrow \frac{R^2\pi v}{3} = \frac{2R^3\pi}{3} \Rightarrow v = 2R$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Metalnu kuglu obujma 36π cm^3 treba pretopiti u valjak. Odredite visinu valjka ako je polumjer baze valjka jednak polumjeru kugle.

2. (IK 2010.) Metalna kugla ima obujam 288π cm^3.

a) Koliki joj je polumjer?

b) Kuglu polumjera 5 cm treba pretopiti u valjak. Ako će polumjer baze valjka biti 4 cm, odredite visinu valjka zaokruživši rezultat na dvije decimale.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Kugla ima obujam $6\,550.67\pi$ cm^3. Oplošje kugle je:

a) $1\,156\pi$ cm^2 b) $1\,204\pi$ cm^2 c) $2\,156\pi$ cm^2 d) $2\,656\pi$ cm^2.

2. Zbroj obujmova dviju kugli iznosi 202.67π cm^3, a polumjer jedne kugle je 3 cm. Polumjer druge kugle je:

a) 2 cm b) 3 cm c) 4 cm d) 5 cm.

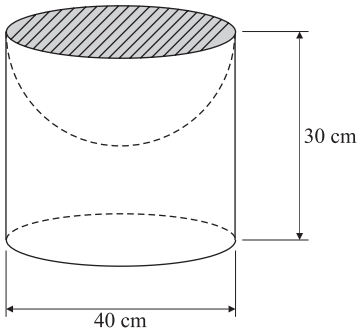
3. Za koliko postotaka treba povećati polumjer kugle da se njezino oplošje uveća za 25.44%?

a) 10% b) 12% c) 18% d) 25.44%

4. Izvodnica stošca zatvara s visinom kut $\alpha = 45°$. Koliki je omjer volumena stošca i volumena kugle opisane tom stošcu?

a) 1 : 2 b) 1 : 3 c) 1 : 4 d) 1 : 5

5. Visina uspravnog valjka je 30 cm, a promjer 40 cm. Iz valjka je izrezana polukugla, kao na slici. Koliko je oplošje tako dobivenog tijela (rezultat zaokružite na najbliži kvadratni centimetar)?



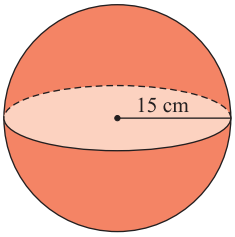
a) 1 260 cm^2

b) 2 510 cm^2

c) 6 280 cm^2

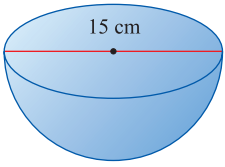
d) 7 540 cm^2

6. Koliki je obujam kugle na slici?



a) 14 137.17 cm^3
b) 10 602.88 cm^3
c) 7 952.16 cm^3
d) 2 827.43 cm^3

7. Koliki je obujam polukugle na slici?

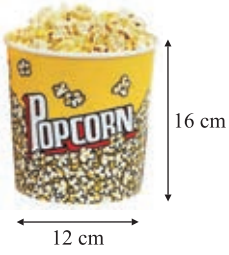


a) 1 060.3 cm^3
b) 1 767.1 cm^3
c) 662.7 cm^3
d) 883.6 cm^3

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Za koliko se postotaka treba povećati polumjer kugle da bi se njezin obujam povećao za 33.1%?

2. U tri različita kina u gradu kokice prodaju u različitim pakiranjima. U prvom kinu kokice dobijete u kutiji oblika kvadra, u drugom valjka, a u trećem u posudi oblika polukugle. U kojem kinu dobijete najviše kokica?



3. Stotinu metalnih kocki duljine osnovnog brida 3 cm pretopi se u kuglu. Koliko je oplošje i obujam kugle?

4. Kugla je presječena s dvije paralelne ravnine koje su međusobno udaljene 3 cm i nalaze se s iste strane središta. Ravnine sijeku kuglu po krugovima polumjera 9 cm i 12 cm. Koliki je obujam kugle?

5. Dvije paralelne ravnine međusobno udaljene 9 cm presijecaju kuglu s iste strane središta kugle. Površine presjeka kugle s ravninama su 49π cm^2 i 4π cm^2. Izračunajte polumjer kugle.

6. Valjak i kugla upisani su u kocku. Koliki je omjer oplošja kugle i oplošja valjka?

7. Kutija za nakit je oblika valjka, a poklopac za kutiju oblika polukugle. Promjer kutije i poklopca je 18 cm. Kolika je visina kutije zajedno s poklopcem ako i kutija i poklopac imaju jednak obujam?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. 4 cm **2.** a) 6 cm b) 10.42 cm

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. a **2.** d **3.** b **4.** c **5.** d **6.** a **7.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. 10%

2. $V_K = 1\,600$ cm^3, $V_V = 1\,809.56$ cm^3, $V_{\frac{1}{2}K} = 2\,094.39$ cm^3. Najviše se dobije u trećem kinu.

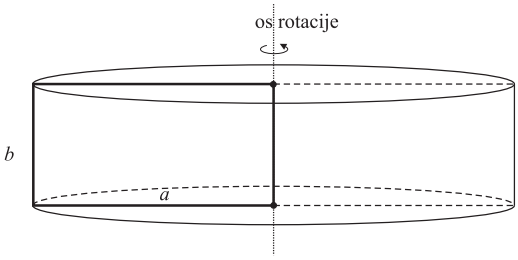
3. $V = 2700$ cm^3, $O = 937.7$ cm^2 **4.** $V = 4\,500\pi$ cm^3 **5.** $r = 25$ cm

6. $O_k : O_v = 2 : 3$ **7.** $h = 15$ cm

4.3.6. Rotacijska tijela

Primjer 1: Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za 4 cm. Vrtnjom pravokutnika oko manje stranice nastane valjak oplošja 320π cm^2. Koliko iznosi oplošje tijela koje nastane vrtnjom pravokutnika oko veće stranice?

Rješenje: Stranice pravokutnika su a i $b = a - 4$. Izračunajmo ih iz oplošja valjka.



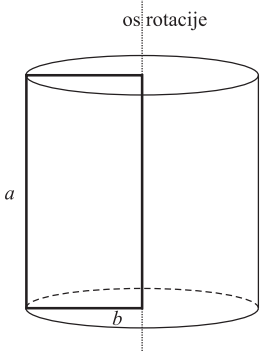
$$O = 2B + P_p = 2a^2\pi + 2a\pi b = 2a\pi(a + a - 4) = 4\pi(a^2 - 2a)$$

$$4\pi(a^2 - 2a) = 320\pi$$

$$a^2 - 2a - 80 = 0$$

$a = 10$ cm $\quad (a = -8$ ne može biti)

$b = 6$ cm



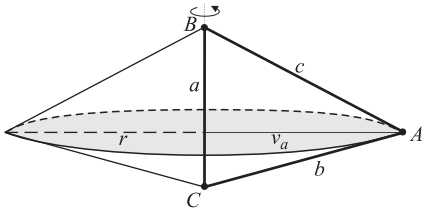
Oplošje tijela koje nastaje vrtnjom oko veće stranice je:

$$O = 2b^2\pi + 2b\pi a =$$

$$= 2 \cdot 36\pi + 12 \cdot 10\pi = 192\pi \text{ cm}^2.$$

Primjer 2: Trokut sa stranicama duljina 6 cm, 25 cm i 29 cm rotira oko najmanje stranice. Izračunajmo oplošje i obujam nastalog rotacijskog tijela.

Rješenje: Rotacijom trokuta nastaju dva stošca jednake (zajedničke) osnovke polumjera $r = v_a$, a zbroj visina obaju stožaca je $v_1 + v_2 = a$.



Iz površine trokuta izračunat ćemo visinu v_a.

$$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},\ s = \frac{a+b+c}{2} = 30 \text{ cm}$$

$$P = \sqrt{30 \cdot 24 \cdot 5 \cdot 1} = 60 \text{ cm}^2$$

$$P = \frac{av_a}{2} = 60 \quad \Rightarrow \quad \frac{6v_a}{2} = 60 \quad \Rightarrow \quad v_a = 20 \text{ cm}$$

Oplošje nastalog rotacijskog tijela je zbroj površina plašta obaju stožaca. Izvodnica jednog stošca je stranica c, a drugog stranica b.

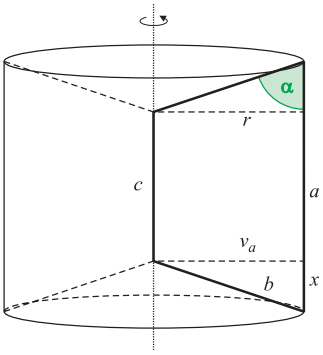
$O_{rt} = r\pi c + r\pi b = r\pi(c + b) = 20 \cdot 54\pi = 1\,080\pi \text{ cm}^2$

Obujam rotacijskog tijela je:

$$V = \frac{Bv_1}{3} + \frac{Bv_2}{3} = \frac{B(v_1 + v_2)}{3} = \frac{Ba}{3} = \frac{20^2\pi \cdot 6}{3} = 800\pi \text{ cm}^3.$$

Primjer 3: Jednakokračni trapez s osnovicama 12 cm i 18 cm i šiljastim kutom $\alpha = 60°$ rotira oko manje osnovice. Izračunajmo volumen nastalog rotacijskog tijela.

Rješenje: Iz trapeza ćemo izračunati krak b i visinu v_a.



$$\cos\alpha = \frac{x}{b},\quad x = \frac{a-c}{2} = 3 \text{ cm}$$

$$b = \frac{x}{\cos\alpha} = \frac{3}{\cos 60°} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6 \text{ cm}$$

$$v_a = \sqrt{b^2 - x^2} = \sqrt{36-9} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \quad r = 3\sqrt{3}$$

Obujam nastalog rotacijskog tijela jednak je razlici obujma valjka i dvaju jednakih stožaca.

Polumjeri stošca i valjka jednaki su, visina valjka je stranica a, a visina stošca x.

$$V_{rt} = V_v - 2V_s = r^2\pi a - 2\frac{r^2\pi x}{3} = r^2\pi 18 - 2\frac{r^2\pi 3}{3} =$$

$$= 16\,r^2\pi = 16 \cdot 27\pi = 432\pi \text{ cm}^3$$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Pravokutnik sa stranicama $a = 4$ cm i $b = 3$ cm vrti se oko stranice a. Koliko je oplošje nastalog rotacijskog tijela?

a) 56π cm^2 b) 54π cm^2 c) 48π cm^2 d) 42π cm^2

2. Pravokutnik sa stranicama $a = 4$ cm i $b = 10$ cm vrti se oko stranice b. Koliko je oplošje nastalog rotacijskog tijela?

a) 280π cm^2 b) 140π cm^2 c) 112π cm^2 d) 90π cm^2

3. Romb dulje dijagonale f i kraće dijagonale e rotira oko kraće dijagonale e. Ako je $\left(\frac{f}{6}\right)^2 = \frac{1}{e}$, odredite volumen nastalog rotacijskog tijela.

a) 3π b) 36π c) 12π d) $\frac{1}{3}\pi$

4. Jednakokračni trokut osnovice a i kraka b rotira oko stranice a. Ako je visina na stranicu a dvostruko veća od visine na stranicu b, odredite oplošje nastalog rotacijskog tijela.

a) $4\sqrt{15}\pi a^2$ b) $2\sqrt{15}\pi a^2$ c) $2\sqrt{17}\pi a^2$ d) $2\sqrt{3}\pi a^2$

5. Jednakokračni trapez dulje osnovice 9 cm, kraće osnovice 5 cm i kraka 3 cm rotira oko manje osnovice. Izračunajte volumen nastalog rotacijskog tijela.

a) $\frac{115}{3}\pi$ cm^3 b) $\frac{155}{3}\pi$ cm^3 c) 45π cm^3 d) $\frac{125}{3}\pi$ cm^3

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Duljine stranica pravokutnika razlikuju se za 4 cm. Vrtnjom pravokutnika oko veće stranice nastane valjak oplošja 192π cm^2. Koliko iznose oplošje i obujam tijela koje nastane vrtnjom pravokutnika oko manje stranice?

2. Jednakokračan trokut s krakom duljine 2 cm i kutom na osnovici $\alpha = 30°$ vrti se oko osi simetrije trokuta. Izračunajte volumen nastalog rotacijskog tijela.

3. Jednakokračni trapez dulje osnovice 16 cm, kraće osnovice 10 cm i šiljastim kutom $\alpha = 45°$, rotira oko veće osnovice. Izračunajte volumen nastalog rotacijskog tijela.

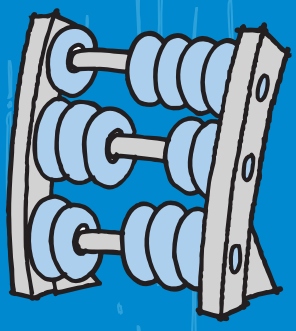
RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** c **3.** a **4.** b **5.** a

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $O = 320\pi$ cm^2, $V = 600\pi$ cm^3 **2.** $V = \pi$ cm^3 **3.** $V = 108\pi$ cm^3



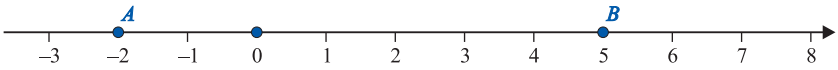
5. ANALITIČKA GEOMETRIJA

5.1. Koordinatni sustav na pravcu i u ravnini

Udaljenost točaka na brojevnom pravcu

Ako su $A(a)$ i $B(b)$ točke na brojevnom pravcu, onda je njihova udaljenost $d(A,B)=|b-a|$.

Primjer 1: Kolika je udaljenost točaka $A(-2)$ i $B(5)$?

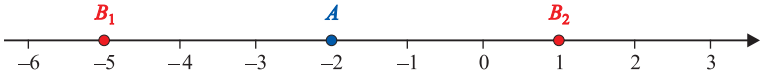


Rješenje: $d(A,B)=|5-(-2)|=|5+2|=7$

Primjer 2: Odredimo točke na brojevnom pravcu udaljene za 3 od točke $A(-2)$.

Rješenje: Iz formule za udaljenost točaka $d(A,B)=|b-a|$ slijedi:

$$d(A,B)=|b-(-2)|=|b+2|=3.$$

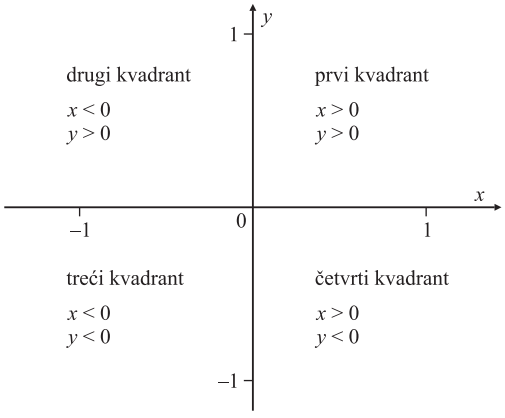


$$b+2=-3 \quad \Rightarrow \quad b=-5 \quad \Rightarrow \quad B_1(-5)$$
$$b+2=3 \quad \Rightarrow \quad b=1 \quad \Rightarrow \quad B_2(1)$$

Pravokutni koordinatni sustav u ravnini čine dva međusobno okomita brojevna pravca x i y sa zajedničkim ishodištem i jediničnim dužinama jednake duljine.

Ako je uređeni par brojeva (x, y) pridružen točki T u koordinatnoj ravnini, onda broj x nazivamo **apscisa** točke T, a broj y **ordinata** točke T.

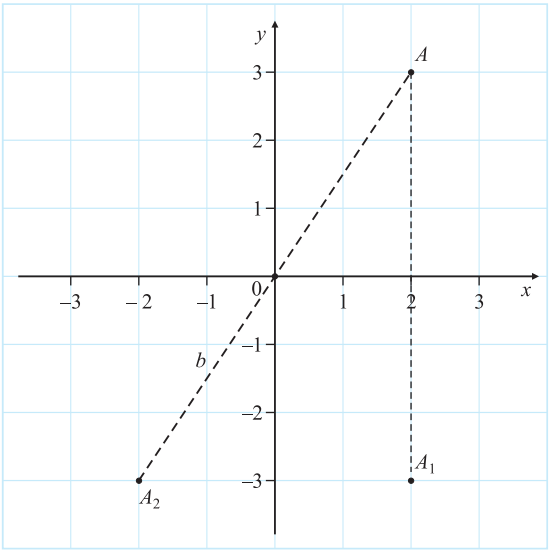
Koordinatne osi dijele koordinatnu ravninu na četiri područja koja nazivamo kvadrantima.



Primjer 3: Odredimo točku simetričnu točki $A(2, 3)$:
a) s obzirom na x os b) s obzirom na ishodište.

Rješenje: a) Točka simetrična točki A s obzirom na x-os nalazi se ispod točke A u četvrtom kvadrantu, a jednako je udaljena od osi x kao i točka A. Apscisa simetrične točke ostat će ista kao apscisa točke A, a ordinata će promijeniti predznak: $A_1(2, -3)$.

b) Točka simetrična točki A s obzirom na ishodište, nalazit će se na jednakoj udaljenosti od ishodišta kao i točka A. Točka A_2 simetrična točki A s obzirom na ishodište imat će koordinate suprotnog predznaka $A_2(-2, -3)$.



Udaljenost točaka $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$ u koordinatnom sustavu

$$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Površina trokuta ΔABC zadanog vrhovima $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ i $C(x_3, y_3)$

$$P = \frac{1}{2}\left|x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right|$$

Ako uvrštavanjem koordinata zadanih točaka dobivamo da je $P = 0$, znači da te tri točke leže na istom pravcu.

Polovište dužine $\overline{T_1T_2}$, $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$

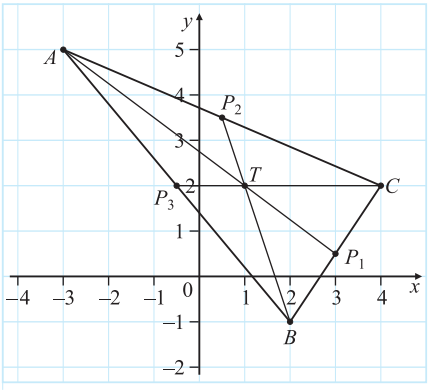
$$P\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Težište trokuta ΔABC, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$

$$T\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}\right)$$

Primjer 4: Nacrtajmo u koordinatnom sustavu trokut ΔABC zadan vrhovima $A(-3, 5)$, $B(2, -1)$ i $C(4, 2)$.
a) Odredimo koordinate polovišta stranica.
b) Odredimo koordinate težišta.

Rješenje: a) Polovišta su redom:



$$P_1\left(\frac{2+4}{2}, \frac{-1+2}{2}\right)=\left(3, \frac{1}{2}\right)$$

$$P_2\left(\frac{-3+4}{2}, \frac{5+2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$$

$$P_3\left(\frac{-3+2}{2}, \frac{5-1}{2}\right)=\left(-\frac{1}{2}, 2\right).$$

b) Iz formule za težište trokuta

$$T\left(\frac{x_1+x_2+x_3}{3}, \frac{y_1+y_2+y_3}{3}\right)$$

slijedi:

$$T\left(\frac{-3+2+4}{3}, \frac{5-1+2}{3}\right)=(1, 2).$$

Primjer 5: Odredimo točku T na osi ordinata koja je jednako udaljena od točaka $M(7, 3)$ i $N(1, -5)$.

Rješenje: Iz jednakosti udaljenosti $d(M, T) = d(N, T)$ i $T(0, y)$ slijedi:

$$\sqrt{(0-1)^2+(y+5)^2}=\sqrt{(0-7)^2+(y-3)^2}.$$

Nakon kvadriranja dobivamo

$$1 + y^2 + 10y + 25 = 49 + y^2 - 6y + 9$$
$$16y = 32$$
$$y = 2.$$

Tražena točka je $T(0, 2)$.

Primjer 6: Točke $A(2, -3)$, $B(-8, 1)$ su dva vrha trokuta. Treći vrh C nalazi se na y-osi, a težište trokuta na x-osi. Odredimo koordinate vrha C.

Rješenje: Koordinate težišta su:

$$T(x, 0)=T\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3}, \frac{y_A+y_B+y_C}{3}\right)$$

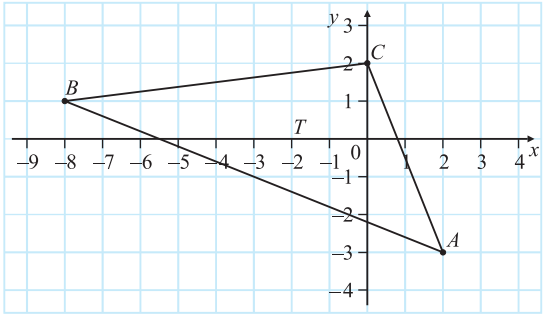
$$T(x, 0)=T\left(\frac{2-8+0}{3}, \frac{-3+1+y_C}{3}\right)=T\left(-2, \frac{-2+y_C}{3}\right).$$

$$\Rightarrow \text{ Slijedi: } x_T = -2, \quad y_T = \frac{-2 + y_C}{3}$$

$$-2 + y_C = 0$$

$$y_C = 2$$

Točka C je na y-osi te su njene koordinate $C(0, 2)$.



Primjer 7: Odredimo površinu trokuta ΔABC ako su koordinate vrhova $A(0, 2)$, $B(5, 2)$ i $C(4, 5)$. Nacrtajmo taj trokut.

Rješenje: Površinu možemo izračunati po formuli

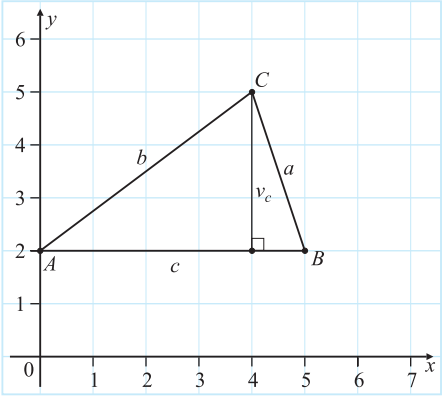
$$P = \frac{1}{2}\left|x_1\left(y_2 - y_3\right) + x_2\left(y_3 - y_1\right) + x_3\left(y_1 - y_2\right)\right|$$

$$P = \frac{1}{2}\left|0\left(2-5\right) + 5\left(5-2\right) + 4\left(2-2\right)\right|$$

$$P = \frac{1}{2}\left|0 + 5\cdot 3 + 4\cdot 0\right| = \frac{15}{2}.$$

Površinu smo mogli izračunati i pomoću grafa.

$$P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{5\cdot 3}{2} = \frac{15}{2}$$

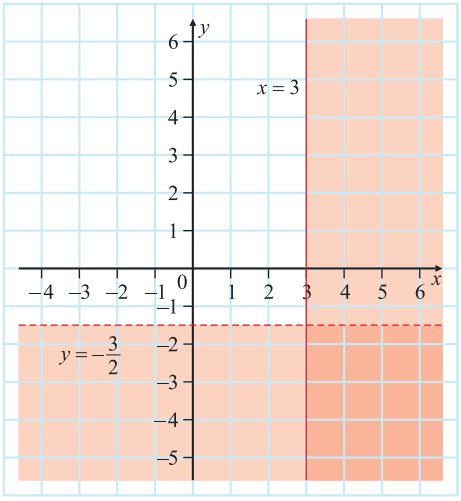


Primjer 8: Odredimo skup točaka ravnine za koji vrijedi $x \geq 3$ i $y < -\frac{3}{2}$.

Rješenje: Uvjetom $x \geq 3$ dane su sve točke ravnine čija je apscisa veća ili jednaka od 3, tj. sve točke koje se nalaze desno od pravca (uključujući i sam pravac) koji je okomit na x-os i prolazi točkom $(3, 0)$.

Isto tako, uvjetom $y < -\frac{3}{2}$ dane su sve točke čija je ordinata manja od $-\frac{3}{2}$, odnosno sve točke koje se nalaze ispod pravca koji je okomit na y-os i prolazi točkom $\left(0, -\frac{3}{2}\right)$.

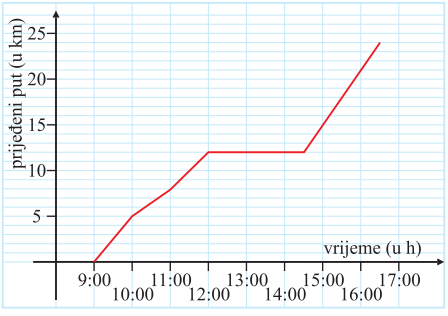
Zajedničko područje traženi je skup točaka.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2006.) Odredite opseg kvadrata $ABCD$, ako je $A(-2, -1)$, $B(1, -2)$, $C(2, 1)$, $D(-1, 2)$.

2. (IK 2006.) Planinarsko društvo priprema zajednički izlet na Papuk. Polazak je predviđen za 9:00 sati. Voditelj izleta predlaže vremenski plan pješačenja prikazan na slici.



a) Kolika je duljina puta koji bi trebali prijeći u prvom satu pješačenja?
b) Koliko vremena je predviđeno za odmor?
c) Koliki će ukupni put prijeći?

3. (NI 2007.) Opseg jednakostraničnog trokuta ΔABC, gdje je $A(3, 6)$, $B(7, 2)$, $C(5+\sqrt{12},\ 4+\sqrt{12})$ jednak je:

a) $\sqrt{288}$ b) $\sqrt{192}$ c) 24 d) 12.

4. (NI 2007.) Udaljenost točaka $S(3, 0)$ i $T(0, 1)$ iznosi:

a) 8 b) $\sqrt{10}$ c) 4 d) $\sqrt{2}$

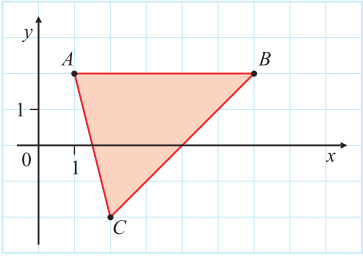
5. (NI 2008.) Zadane su točke $A(-6, -2)$, $B(-2, 1)$, $C(4, 5)$.

a) Zadane točke ucrtajte u koordinatni sustav.

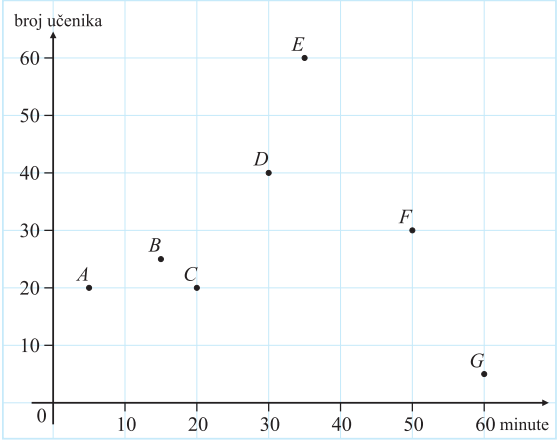
b) Izračunajte međusobne udaljenosti točaka A, B i C te odredite broj $|AB|+|BC|-|AC|$ zaokružen na tri decimale.

6. (NI 2008.) Zadane su točke $A(-1, 2)$, $B(3, -1)$. Odredite koordinate polovišta dužine $\overline{AB}$.

7. (NI 2009.) Odredite površinu P trokuta ΔABC na slici.



8. (NI 2009.) Bilježeno je vrijeme potrebno učenicima da odigraju računalnu igricu. Podaci su uneseni u koordinatni sustav na sljedeći način: točka A označuje da je 20 učenika odigralo igricu do kraja za više od 0, a manje od 5 minuta. Točka B označuje da je 25 učenika odigralo igricu do kraja za više od 5, a manje od 15 minuta. Točka C označuje da je 20 učenika odigralo igricu do kraja za više od 15, a manje od 20 minuta i tako dalje.



a) Što označuje točka G?

b) Koliko je učenika igralo računalnu igricu?

c) Koliki je postotak učenika trebao manje od 5 minuta da završi igricu?

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Točke $A_1(1, 3)$ i $A_3(4, 7)$ krajnje su točke jedne dijagonale kvadrata. Površina kvadrata iznosi:

a) 10 b) 12.5 c) 15 d) 5.

2. Ako su zadana dva vrha jednakostraničnog trokuta $A(2, 5)$, i $B(5, 9)$, tada je površina trokuta:

a) $3.075\sqrt{3}$ b) $4.075\sqrt{3}$ c) $5.25\sqrt{3}$ d) $6.25\sqrt{3}$.

3. Ako su $A(0, 2)$, $B(4, 4)$ i $C(2, 8)$ vrhovi trokuta ΔABC, tada su koordinate težišta trokuta:

a) $T\left(2, \frac{10}{3}\right)$ b) $T\left(2, \frac{12}{3}\right)$ c) $T\left(2, \frac{14}{3}\right)$ d) $T\left(2, \frac{16}{3}\right)$.

4. Ako su $A(-3, -4)$, $B(7, -4)$, $C(4, 5)$ i $D(-2, 5)$ vrhovi trapeza $ABCD$, tada je površina trapeza:

a) 60 b) 64 c) 68 d) 72.

5. Ako su $A(1, 5)$, $B\left(\frac{5}{2}, 2\right)$, $C\left(\frac{7}{2}, 4\right)$ i $D(2, 7)$ vrhovi paralelograma $ABCD$, tada je njegova površina:

a) 4 b) 6 c) 8 d) 10.

6. Trokut kojem su vrhovi $A(2, 3)$, $B(-2, 5)$ i $C(-1, -3)$ je:

a) jednakostraničan b) jednakokračan
c) pravokutan d) tupokutan.

7. Točke $P_1\left(2, \frac{3}{2}\right)$ i $P_3(0, 3)$ redom su polovišta stranica $\overline{AB}$ i $\overline{CA}$, a $B(4, 3)$ je vrh trokuta ΔABC. Površina trokuta jednaka je:

a) 4 b) 8 c) 12 d) 16.

8. Točke $P_1(1, 0)$, $P_2(3, 1)$ i $P_3(0, 2)$ redom su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ΔABC. Zbroj koordinata težišta trokuta je:

a) $\frac{5}{3}$ b) $\frac{7}{3}$ c) 3 d) $\frac{11}{3}$.

9. Površina trokuta ΔABC je 4. Dva su njegova vrha u točkama $A(2, 1)$ i $B(3, -2)$, a treći vrh C leži na osi x. Odredite koordinate vrha C.

a) $C(2, 0)$ b) $C(0, 3)$ c) $C_1(5, 0)$, $C_2\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$

d) $C_1(0, -5)$, $C_2\left(\frac{1}{3}, 0\right)$.

10. U kojem se kvadrantu nalazi točka $(2, -5)$?

a) Prvom. b) Drugom. c) Trećem. d) Četvrtom.

11. Točke $A(x, y)$ i $B(-x, -y)$ simetrične su s obzirom na:

a) x-os b) y-os c) ishodište d) točku $(1, 1)$.

12. Skup točaka $T(0, y)$ je:

a) os apscisa
b) os ordinata
c) pravac okomit na x-os
d) pravac okomit na y-os.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite točke na brojevnom pravcu udaljene za 13 od točke $A(-7)$.

2. Kolika je apscisa točke koja se nalazi na osi ordinata?

3. Odredite polovište dužine $\overline{AB}$ ako su dane točke $A(-7, 3)$ i $B(1, 5)$.

4. Dužina $\overline{AB}$, $A(-4, -2)$ i $B(4, 4)$, promjer je kružnice. U kojoj je točki središte kružnice? Kolika je duljina polumjera?

5. Točke $A(4, 1)$ i $B(2, 7)$ dva su vrha trokuta, a $T(3, 5)$ je težište. Odredite koordinate trećeg vrha trokuta C.

6. Površina pravokutnog trokuta iznosi 24 cm^2. Udaljenost točaka $A(2, 3)$ i $C(2, 9)$ duljina je najkraće katete trokuta. Koliki je opseg trokuta?

7. Odredite površinu trokuta određenog vrhovima $A(1, 5)$, $B(6, 2)$, i $C(8, 8)$.

8. Ako su $A(4, 0)$, $B(8, 3)$, $C(4, 6)$ i $D(0, 3)$ vrhovi romba, kolika je površina romba?

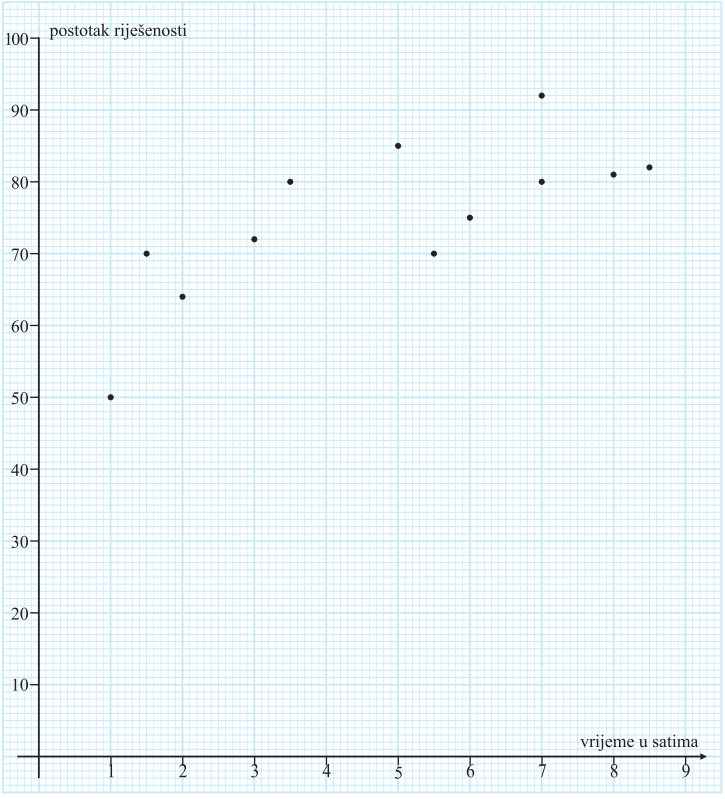
9. Zadani su vrhovi trokuta $A(4, 5)$, $B(6, 1)$, i $C(2, 3)$. Odredite duljinu težišnice povučene iz vrha B.

10. Zadane su tri točke u koordinatnom sustavu $A(-2, 2)$, $B(-2, -3)$ i $C(1, 1)$. Nacrtajte trokut ΔABC u koordinatnom sustavu.

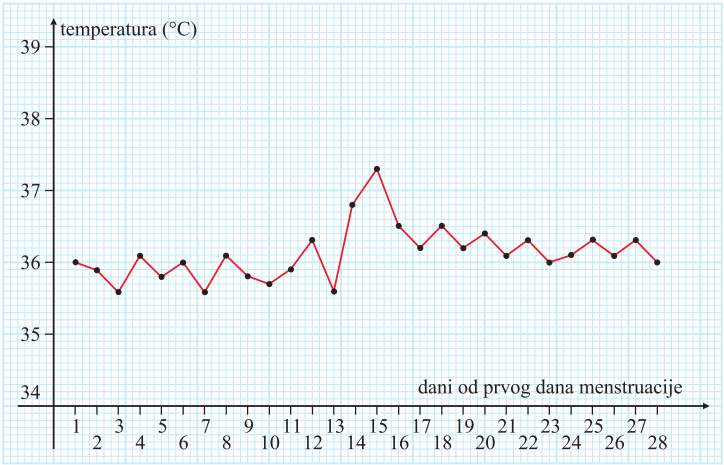
a) Odredite duljinu stranice a ovog trokuta.
b) Odredite duljinu težišnice stranice b trokuta ΔABC.
c) Odredite površinu trokuta ΔABC.

11. Neki maturanti kao pripremu za maturu izabrali su fakultativnu nastavu iz matematike (12 učenika). Podaci su uneseni u koordinatni sustav, tako da je na os x unesen broj sati tjedno koje su proveli učeći matematiku, a na os y uspješnost (u postocima) riješenosti testa na maturi.

a) Koji uspjeh je postigao učenik koji je matematiku učio 1 sat tjedno?
b) Koliko je učenika učilo 7 sati tjedno?
c) Koliko učenika je postiglo uspjeh od točno 80% riješenosti testa?
d) Koliko učenika je postiglo uspjeh više od 70% i manje od 90%?
e) Koliko sati tjedno je učio učenik koji je postigao najbolji uspjeh?
f) Koliko sati tjedno je učio učenik koji je postigao najlošiji uspjeh?



12. Graf prikazuje mjerenje bazalne temperature u ženinom mjesečnom ciklusu od prvog dana mjesečnice (menstruacije). Skok u razini progesterona neposredno nakon ovulacije povisit će tjelesnu temperaturu za 0.5 °C do 1 °C nakon ovulacije. Računa se da kod 60% žena ovulacija nastupa u vrijeme najniže točke krivulje BT prije skoka temperature, a u ostalih 40% žena u vrijeme najvišeg izmjerenog skoka bazalne temperature. Plodno razdoblje obuhvaća 4 dana prije ovulacije i 3 dana poslije ovulacije.



a) Što se događa s temperaturom između dvanaestog i trinaestog dana?
b) Koji su dani moguće ovulacije? Ne znamo u kojoj je skupini ova žena.
c) Koje je plodno razdoblje kod ove žene? Ne znamo u kojoj je skupini ova žena.

13. Odredite skup točaka ravnine za koji vrijedi:

a) $x \leq -2$ i $y < -\frac{5}{2}$ b) $x \leq 5$ i $y \geq 4$

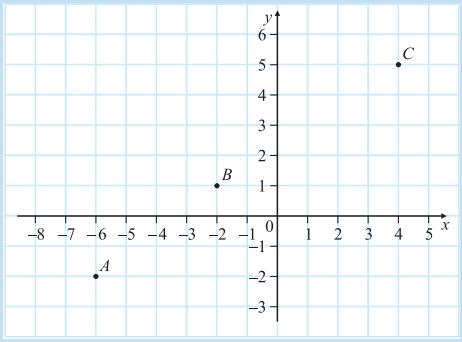
c) $-5 < x < -1$ i $-2 < y < 3$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. $|AB| = \sqrt{10}$, $O = 4\sqrt{10} \approx 12.65$ **2.** a) 5 km b) 2.5 sati c) 24 km
3. a **4.** b

5. a)



b) $|AB| = 5$, $|BC| = 2\sqrt{13}$, $|AC| = \sqrt{149}$, $|AB| + |BC| - |AC| \approx 0.005$

6. $P_{\overline{AB}} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ **7.** 10 kvadratnih jedinica

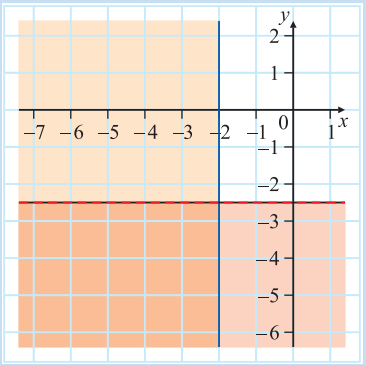
8. a) G označava da je 5 učenika odigralo igricu do kraja za više od 50, a manje od 60 minuta.
b) 200
c) 10%

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

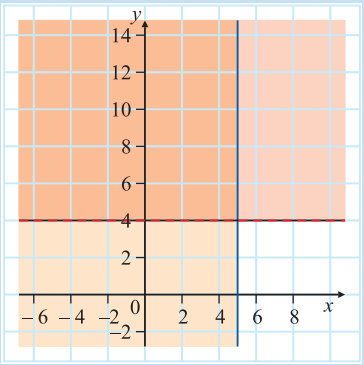
1. b **2.** d **3.** c **4.** d **5.** b **6.** c **7.** c **8.** b **9.** c
10. d **11.** c **12.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

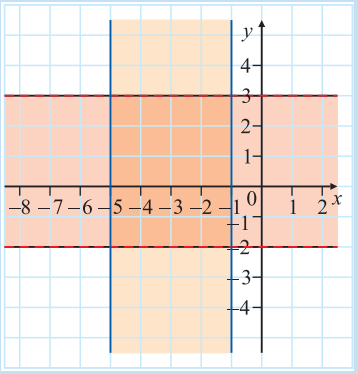
1. $B_1(-20)$, $B_2(6)$ **2.** 0 **3.** $P(-3, 4)$ **4.** $S = P_{MN}(0, 1)$, $r = |SB| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$
5. $C(3, 7)$ **6.** $O = 24$ **7.** $P = 18$ **8.** $P = 24$ **9.** $t_b = 3\sqrt{2}$
10. a) $a = 5$ b) $P_{AC}\left(-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$, $t_b = |BP_{AC}| = \frac{\sqrt{90}}{2} = \frac{3\sqrt{10}}{2}$ c) $P = 7.5$
11. a) 50% b) 2 c) 2 d) 7 e) 7 f) 1
12. a) Pada. b) Između 13. i 15. dana. c) Od 9. do 1. dana.
13. a)



b)

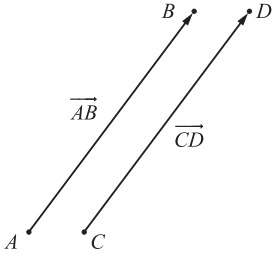


c)

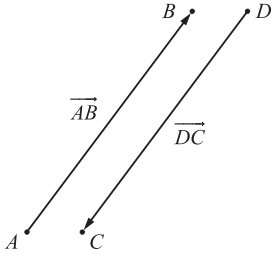


5.2. Vektori

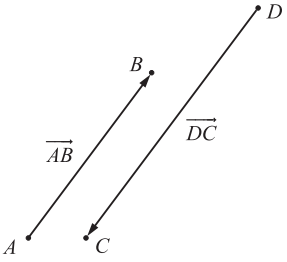
Vektor $\overrightarrow{AB}$ je usmjerena dužina kojoj je točka A početak, a točka B kraj. Svaki vektor određen je svojim smjerom (pravcem na kojem leži), duljinom (modulom) i orijentacijom (od početne prema krajnjoj točki).



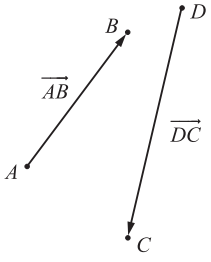
– vektori istog smjera, jednake duljine i iste orijentacije



– vektori istog smjera, jednake duljine i suprotne orijentacije



– vektori istog smjera, različite duljine i suprotne orijentacije



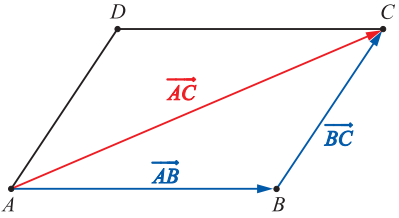
– vektori različitog smjera i različite duljine

Dva su vektora jednaka ako imaju jednake module (duljine), jednake smjerove i jednake orijentacije. Vektori su **suprotni** ako imaju jednake module (duljine), jednake smjerove i suprotne orijentacije. **Nul-vektor** definiramo kao vektor kojem se početna i završna točka poklapaju. Svi nul-vektori su jednaki.
Dva vektora istog smjera su **kolinearni vektori.**

Vektore možemo zbrajati po pravilu paralelograma i po pravilu trokuta.

Pravilo paralelograma

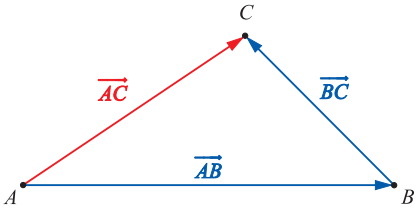
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DB}$$



Pravilo trokuta

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CB}$



Vektore na jedinstven način možemo prikazati pomoću jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$, $\left(|\vec{i}|=|\vec{j}|=1,\ \vec{i}\perp\vec{j}\right)$.

Vektor $\vec{i}$ je u smjeru x-osi, a vektor $\vec{j}$ u smjeru y-osi.

Prikaz vektora $\overrightarrow{T_1T_2}$ u koordinatnom sustavu ako su koordinate krajnjih točaka vektora $T_1\,(x_1, y_1)$, $T_2\,(x_2, y_2)$

$$\overrightarrow{T_1T_2}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}$$

Ako (x_2-x_1) zamijenimo s a_x, a (y_2-y_1) sa a_y, vektor možemo zapisati ovako:

$$\overrightarrow{T_1T_2}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}.$$

Duljina (modul) vektora je udaljenost od početne do završne točke.

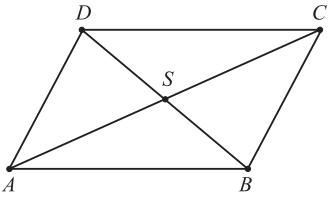
$$\left|\overrightarrow{T_1T_2}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=\sqrt{a_x^2+a_y^2}$$

Jedinični vektor vektora $\vec{a}$ je $\vec{a}_0=\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$ duljine 1, $|\vec{a}_o|=1$.

Primjer 1: Ispišimo sve jednake i sve suprotne vektore koji su definirani vrhovima i sjecištem dijagonala paralelograma.

Rješenje: Jednaki vektori

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$
$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AS}=\overrightarrow{SC}$
$\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{SD}$
$\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DA}$
$\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{DS}$
$\overrightarrow{SA}=\overrightarrow{CS}$
$\overrightarrow{AA}=\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{CC}=\overrightarrow{DD}=\overrightarrow{SS}$



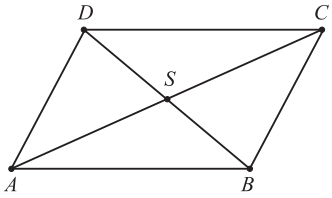
Suprotni vektori

$\overrightarrow{AB}$.....$\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{CD}$
$\overrightarrow{BC}$.....$\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{DA}$
$\overrightarrow{CD}$.....$\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{AB}$
$\overrightarrow{DA}$.....$\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$
$\overrightarrow{AS}$.....$\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{CS}$
$\overrightarrow{BS}$.....$\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{DS}$

Primjer 2: Ako su A, B, C i D vrhovi paralelograma, a S sjecište dijagonala paralelograma, izračunajmo:

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}$ c) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}$ d) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}$
e) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}$ f) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}$ g) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}$.

Rješenje:

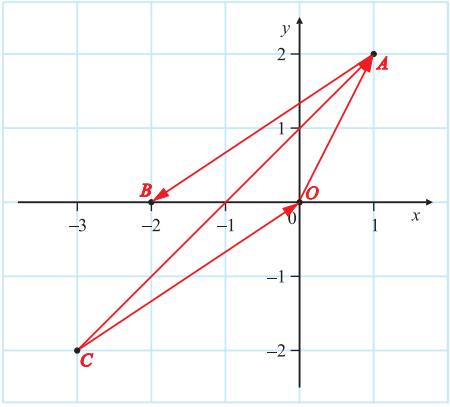


a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$
b) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SB}=\overrightarrow{AB}$
c) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BS}=\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{SD}=\overrightarrow{AD}$
d) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{DB}$
e) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$
f) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DC}$
g) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{CD}$

Primjer 3: Zadane su koordinate točaka $O(0,0)$, $A(1,2)$, $B(-2,0)$, i $C(-3,0)$. U koordinatnom sustavu nacrtajmo vektore i odredimo njihove duljine:

a) $\overrightarrow{OA}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{CA}$ d) $\overrightarrow{CO}$.

Rješenje:



a) $\left|\overrightarrow{OA}\right|=\sqrt{(x_A-x_O)^2+(y_A-y_O)^2}=$
$=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

b) $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2}=$
$=\sqrt{(-2-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

c) $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{(x_A-x_C)^2+(y_A-y_C)^2}=$
$=\sqrt{(1+3)^2+(2+2)^2}=\sqrt{16+16}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$

d) $\left|\overrightarrow{CO}\right|=\sqrt{(x_O-x_C)^2+(y_O-y_C)^2}=$
$=\sqrt{(0+3)^2+(0+2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}$

O vektorima $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CO}$ možemo primijetiti da imaju jednake module, paralelni su (imaju jednake smjerove) i suprotnu orijentaciju, znači da su suprotni vektori.

Primjer 4: Prikažimo vektore $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{CO}$ iz primjera 3. pomoću vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$, a zatim izračunajmo:

a) $2\overrightarrow{OA}-3\overrightarrow{CA}$ b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}$.

Rješenje: $\overrightarrow{CA}=(x_A-x_C)\vec{i}+(y_A-y_C)\vec{j}=(1+3)\vec{i}+(2+2)\vec{j}=4\vec{i}+4\vec{j}$

$\overrightarrow{CO}=(x_A-x_C)\vec{i}+(y_A-y_C)\vec{j}=(0+3)\vec{i}+(0+2)\vec{j}=3\vec{i}+2\vec{j}$

$\overrightarrow{OA}=\vec{i}+2\vec{j}$

$\overrightarrow{AB}=-3\vec{i}-2\vec{j}$

$\overrightarrow{BC}=-\vec{i}-2\vec{j}$

a) $2\left(1\vec{i}+2\vec{j}\right)-3\left(4\vec{i}+4\vec{j}\right)=2\vec{i}+4\vec{j}-12\vec{i}-12\vec{j}=-10\vec{i}-8\vec{j}$

b) $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left(-4\vec{i}-4\vec{j}\right)-\frac{3}{4}\left(-3\vec{i}-2\vec{j}\right)=$

$=-2\vec{i}-2\vec{j}+\frac{9}{4}\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}=$

$=\frac{1}{4}\vec{i}-\frac{1}{2}\vec{j}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=1\vec{i}+2\vec{j}-3\vec{i}-2\vec{j}-\vec{i}-2\vec{j}+3\vec{i}+2\vec{j}=$

$=\vec{0}$

Ovdje možemo primijeniti pravilo zbrajanja vektora i izračunati posljednji zbroj bez prikaza vektora pomoću jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$:

$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$.

Primjer 5: Zadane su koordinate triju uzastopnih vrhova paralelograma $A(-1,-2)$, $B(4,-1)$, i $C(1,4)$.

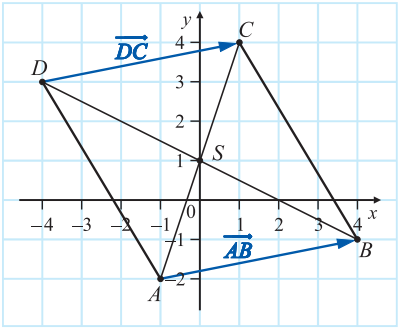
a) Odredimo koordinate točke D ako je ona četvrti vrh paralelograma. (Koristiti vektore!)

b) Odredimo koordinate sjecišta dijagonala S.

Rješenje: Nacrtajmo točke u koordinatnom sustavu i odredimo potrebne vektore.

$\overrightarrow{AB}=(4+1)\vec{i}+(-1+2)\vec{j}=5\vec{i}+\vec{j}$

$\overrightarrow{DC}=(1-x_D)\vec{i}+(4-y_D)\vec{j}$



a) Iz jednakosti vektora $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ slijedi:

$5\vec{i} + \vec{j} = (1 - x_D)\vec{i} + (4 - y_D)\vec{j}.$

$1 - x_D = 5 \qquad 4 - y_D = 1$

$x_D = -4 \qquad y_D = 3$

Koordinate četvrtog vrha su $D(-4, 3)$.

b) Sjecište dijagonala možemo izračunati na nekoliko načina.

Iz jednakosti vektora $\overrightarrow{AS} = \overrightarrow{SC}$ ili $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

Međutim, točka S je i polovište dužine $\overline{AC}$, pa vrijedi

$S = \left(\frac{x_A + x_C}{2}, \frac{y_A + y_C}{2} \right).$

Koordinate sjecišta su $S(0, 1)$.

Primjer 6: Vektor $\vec{a} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$ kolinearan je vektoru $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ određenom točkama $A(0, 4)$ i $B(3, y)$.
Odredimo y.

Rješenje: $\vec{b} = \overrightarrow{AB} = (3 - 0)\vec{i} + (y - 4)\vec{j} = 3\vec{i} + (y - 4)\vec{j}$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni, ako se može zapisati $\vec{a} = k\vec{b}$, $k \in R$.
To se može zapisati i ovako:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = k \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{-3} = \frac{y - 4}{-2} \quad \Rightarrow \quad 6 = 3y - 12 \quad \Rightarrow \quad y = 6.$$

Primjer 7: Prikažimo vektor $\vec{c} = 6\vec{i} + \vec{j}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a} = -\vec{i} + 4\vec{j}$ i $\vec{b} = 3\vec{i} - 2\vec{j}$.

Rješenje: Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni pa se vektor $\vec{c}$ može prikazati kao njihova linearna kombinacija.

$\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}, \quad \alpha, \beta \in \boldsymbol{R}$

$6\vec{i} + \vec{j} = \alpha(-\vec{i} + 4\vec{j}) + \beta(3\vec{i} - 2\vec{j})$

$6\vec{i} + \vec{j} = -\alpha\vec{i} + 4\alpha\vec{j} + 3\beta\vec{i} - 2\beta\vec{j}$

$6\vec{i} + \vec{j} = (-\alpha + 3\beta)\vec{i} + (4\alpha - 2\beta)\vec{j}$

Iz jednakosti vektora dobivamo sustav:

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 6 \\ 4\alpha - 2\beta = 1 \end{cases} \Rightarrow \beta = \frac{5}{2}, \ \alpha = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad \vec{c} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{5}{2}\vec{b}.$$

Skalarni produkt vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ je skalar (broj).

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}| \cos\varphi$ (φ je kut među vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, $0 \le \varphi \le \pi$)

Kut između dvaju vektora $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Ako su vektori $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$ i $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$, onda se skalarni produkt i kut među vektorima računaju ovako:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y,\ \cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}.$$

Primjer 8: Odredimo skalarni produkt vektora $\vec{a} = -7\vec{i} + 4\vec{j}$ i $\vec{b} = 12\vec{i} - 3\vec{j}$ i kut među njima.

Rješenje: Skalarni produkt je:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y \Rightarrow\ -7\cdot 12 + 4\cdot(-3) = -84 - 12 = -96.$$

Kut među vektorima je:

$$\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = \frac{-96}{\sqrt{49+16}\sqrt{144+9}} =$$

$$= -0.96265094$$

$$\varphi = 164°\,17'\,29".$$

Primjer 9: Dan je vektor $\vec{a} = -2\vec{i} + \vec{j}$. Odredimo vektor $\vec{b}$, ako je $|\vec{b}| = 2\sqrt{5}$ i $\vec{a}\cdot\vec{b} = -10$.

Rješenje: **I. način:**

Odredimo duljinu vektora $\vec{a}$.

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Iz skalarnog produkta $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi$ slijedi:

$$-10 = \sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\cos\varphi \ \Rightarrow\ \cos\varphi = \frac{-10}{10} = -1 \ \Rightarrow\ \varphi = 180^\circ.$$

Vektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su suprotni $|\vec{b}| = 2|\vec{a}| \Rightarrow \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$.

II. način:

Traženi vektor je oblika $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j}$ i iz njegove duljine znamo $b_x^2 + b_y^2 = 20$.

Iz skalarnog produkta $\cos\varphi = \frac{a_xb_x + a_yb_y}{\sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2}}\sqrt{b_x^{\,2} + b_y^{\,2}}}$ znamo:

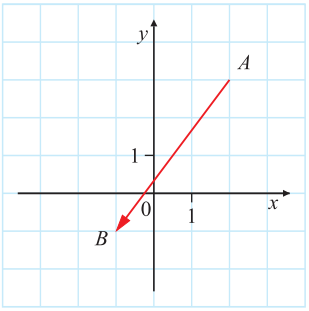
$$-1 = \frac{-2b_x + b_y}{\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}} \ \Rightarrow\ -2b_x + b_y = -10.$$

$$\begin{cases} b_x^2 + b_y^2 = 20 \\ -2b_x + b_y = -10 \end{cases}$$

$$\Rightarrow\ \underline{b_x^2 - 8b_x + 16 = 0} \ \Rightarrow\ b_x = 4 \text{ i } b_y = -2 \Rightarrow\ \vec{b} = 4\vec{i} - 2\vec{j}$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Vektor $\overrightarrow{AB}$ jednak je:



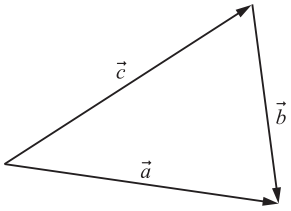
a) $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$
b) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} - 3\vec{j}$
c) $\overrightarrow{AB} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$
d) $\overrightarrow{AB} = -4\vec{i} + 3\vec{j}$.

2. (NI 2008.) Kut među vektorima $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} - 4\vec{j}$ i $\overrightarrow{CD} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$ jednak je:

a) $16° 15' 36''$ b) $90°$ c) $73° 44' 23''$ d) $180°$.

3. (NI 2009.) Za vektore $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ sa slike vrijedi:

a) $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ b) $\vec{a} + \vec{b} - \vec{c} = 0$ c) $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = 0$ d) $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} = 0$.



4. (NI 2009.) Zadane su točke $A(1, 2)$ i $B(3, 5)$.

a) Odredite vektor $\overrightarrow{AB}$ kao linearnu kombinaciju jediničnih vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$.

b) Odredite $\left(2\vec{i} + 3\vec{j}\right)\left(\vec{i} - 4\vec{j}\right)$.

c) Odredite α tako da su vektori $\alpha\vec{i} + 3\vec{j}$ i $\vec{i} - 4\vec{j}$ okomiti.

5. (IK 2010.) Zadane su točke $A(1, 2)$ i $B(3, 5)$. Odredite vektor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Ako su A, B, C, D, E, F vrhovi pravilnog šesterokuta, a S sjecište dijagonala šesterokuta, koliko je $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AF}$?

a) $3\overrightarrow{AB}$ b) $3\overrightarrow{AC}$ c) $3\overrightarrow{AD}$ d) $3\overrightarrow{AE}$

2. Ako su A, B, C, D vrhovi paralelograma, a S sjecište dijagonala paralelograma, koja je tvrdnja točna?

a) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{DA}=0$ b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}=0$

c) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{BA}=0$ d) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CA}=0$

3. Tri vrha paralelograma $ABCD$ su $A(1, 2)$, $B(-5, -3)$ i $C(7, -6)$. Koordinate četvrtog vrha D su:

a) $D(13, -1)$ b) $D(1, -13)$ c) $D(-13, 1)$ d) $D(1, 13)$.

4. Ako su vektori $\vec{a}=3\vec{i}-7\vec{j}$ i $\vec{b}=x\vec{i}+4\vec{j}$ kolinearni, koliki je x?

a) 3 b) -7 c) $-\frac{7}{3}$ d) $-\frac{12}{7}$

5. Zadano je $|\vec{a}|=11$, $|\vec{b}|=23$, $|\vec{a}-\vec{b}|=30$. Koliko je $|\vec{a}+\vec{b}|$?

a) 10 b) 20 c) 30 d) 40

6. Za koji y su vektori $\vec{a}=-3\vec{i}+\vec{j}$ i $\vec{b}=2\vec{i}-y\vec{j}$ okomiti?

a) -6 b) 3 c) -3 d) 6

7. Koliko je $\left(5\vec{i}-4\vec{j}\right)\left(-2\vec{i}-7\vec{j}\right)$?

a) 12 b) 18 c) 24 d) 33

8. Jednaki vektori imaju:

a) različite duljine, jednaki smjer i orijentaciju
b) jednake duljine i smjer te suprotne orijentacije
c) jednake duljine, smjer i orijentaciju
d) različite duljine i smjer, a jednaku orijentaciju.

9. Zaokružite točnu tvrdnju.

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{AC}$ b) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$ d) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$

10. Skalarni umnožak okomitih vektora jednak je:

a) 1 b) -1 c) 0 d) Nije realan broj.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Ispišite sve jednake i suprotne vektore koji su definirani vrhovima i središtem pravilnog šesterokuta.

2. Za proizvoljno zadani vektor $\overrightarrow{AB}$ nacrtajte vektore:

a) $\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ b) $-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ c) $4\overrightarrow{AB}$ d) $-\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$.

3. Ako su A, B, C, D vrhovi paralelograma, a S sjecište dijagonala paralelograma, izračunajte:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{SB}$ c) $\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{BS}$ d) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$

e) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$ f) $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{AD}$ g) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}$.

4. Ako su A, B, C, D, E, F vrhovi pravilnog šesterokuta, a S sjecište dijagonala šesterokuta, izračunajte:

a) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ b) $\overrightarrow{AS}-\overrightarrow{SB}$ c) $\overrightarrow{AS}+\overrightarrow{BC}$ d) $\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AS}$

e) $\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AB}$ f) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$ g) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BS}+\overrightarrow{EA}$.

5. Zadane su koordinate točaka $A(-1, 4)$, $B(1, 1)$, $C(-3, -2)$ i $D(0, 2)$. U koordinatnom sustavu nacrtajte vektore, odredite njihove module i prikažite ih pomoću vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$:

a) $\overrightarrow{DA}$ b) $\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{CA}$ d) $\overrightarrow{CD}$.

6. Koristeći vektore iz 5. zadatka izračunajte:

a) $3\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{CA}$ b) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$ d) $-2\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{DA}$.

7. Odredite duljine vektora iz 6. zadatka.

8. Zadane su točke $A(-2, 2)$, $B(-2, 3)$ i $C(1, 1)$. Prikažite vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AC}$ pomoću vektora $\vec{i}$ i $\vec{j}$ te odredite njihove module.

9. Zadane su točke $A(-4, 3)$, $B(-2, -3)$, $C(2, 1)$ i $D(0, 7)$.

a) Odredite vektore $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BD}$.

b) Odredite $\vec{v}_1=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

c) Odredite $\vec{v}_2=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$.

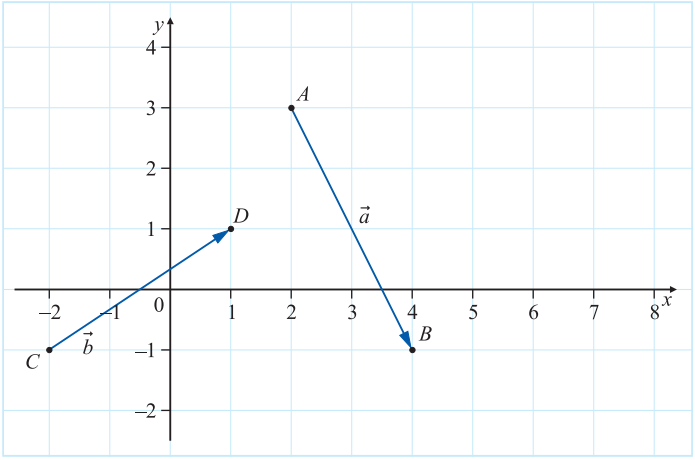
d) U kakvom su odnosu vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{CD}$?

e) U kakvom su odnosu vektori $\overrightarrow{BC}$ i $\overrightarrow{AD}$?

f) U kakvom su odnosu vektori $\vec{v}_1$ i $\vec{v}_2$?

g) U kakvom su odnosu vektori $\overrightarrow{AB}$ i $\vec{v}_1$?

10. Odredite zbroj vektora na slici (računski i grafički).



11. Vektore koji imaju istu duljinu i smjer, ali suprotnu orijentaciju zovemo _____ vektori.

12. Imaju li dva kolinearna vektora isti smjer?
a) DA b) NE

13. Ako su vektori linearno nezavisni:
a) tada su ti vektori kolinearni
b) tada ti vektori nisu kolinearni.

14. Vektor $\vec{j}$ ima smjer kao i os _____ .

15. Umnožak dvaju okomitih vektora jednak je _____ .

16. Prikažite vektor $\vec{c}$ kao linearnu kombinaciju vektora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ ako je zadano:
a) $\vec{a}=3\vec{i}+\vec{j},\ \vec{b}=-5\vec{i}+2\vec{j}$ i $\vec{c}=-\vec{i}+18\vec{j}$
b) $\vec{a}=2\vec{i}-\vec{j},\ \vec{b}=\vec{i}-2\vec{j}$ i $\vec{c}=\vec{i}+\vec{j}$.

17. Ako su točke $A(-4, 3)$, $B(-1, -1)$ i $C(4, 0)$ vrhovi trokuta, odredite sve kutove trokuta.

18. Točke $A(0, 0)$, $B(7, 0)$, $C(3, 3)$ i $D(0, 3)$ vrhovi su trapeza. Izračunajte skalarni produkt $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ i kut u vrhu B.

19. Odredite vektor $\vec{b}$ kolinearan s vektorom $\vec{a}=-4\vec{i}+3\vec{j}$ takav da s osi y zatvara tupi kut i ima duljinu 15.

20. Odredite vektor $\vec{b}$ okomit na vektor $\vec{a}=3\vec{i}-4\vec{j}$ takav da s osi y zatvara tupi kut i ima duljinu 10.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a **2.** c **3.** d **4.** a) $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+3\vec{j}$ b) -10 c) 12 **5.** $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}+3\vec{j}$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. c **2.** d **3.** a **4.** d **5.** b **6.** a **7.** b **8.** c **9.** c **10.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{FS}=\overrightarrow{SC}=\overrightarrow{ED}$, …

2. Uputa: Nacrtajte proizvoljan vektor, zatim u a) i c) nacrtajte vektore iste orijentacije (pomnožene brojem), a u b) i d) suprotne orijentacije. Svi su vektori istog smjera.

3. a) $\overrightarrow{DB}$ b) $\overrightarrow{AD}$ c) $\overrightarrow{AB}$ d) $\overrightarrow{AC}$ e) $\overrightarrow{BC}$ f) $\overrightarrow{BA}$ g) $\overrightarrow{CD}$

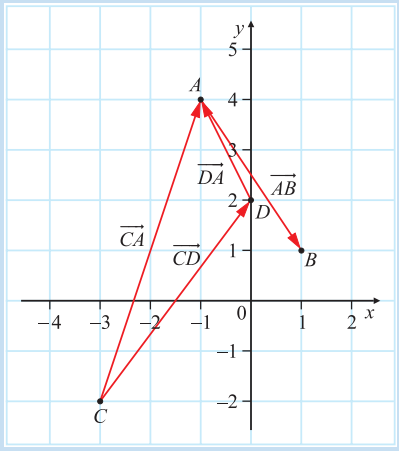
4. a) $\overrightarrow{SB}$ b) $\overrightarrow{AE}$ c) $\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AS}$ d) $\overrightarrow{SC}$ e) $\overrightarrow{AC}$ f) $\overrightarrow{FB}$ g) $\vec{0}$

5. a) $\overrightarrow{DA}=-\vec{i}+2\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{DA}\right|=\sqrt{5}$

b) $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-3\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=\sqrt{13}$

c) $\overrightarrow{CA}=2\vec{i}+6\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{CA}\right|=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

d) $\overrightarrow{CD}=3\vec{i}+4\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{CD}\right|=5$



6. a) $3\overrightarrow{DA}-2\overrightarrow{CA}=-7\vec{i}+18\vec{j}$

b) $\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}=-\frac{7}{2}\vec{i}-\frac{33}{4}\vec{j}$

c) $\vec{0}$

d) $-2\overrightarrow{CD}+4\overrightarrow{DA}=-10\vec{i}$

7. a) $\sqrt{373}$ b) $\frac{\sqrt{1\,285}}{4}$

c) 0 d) 10

8. $\overrightarrow{AB}=\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{AB}\right|=1$; $\overrightarrow{BC}=3\vec{i}-2\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{BC}\right|=\sqrt{13}$; $\overrightarrow{AC}=3\vec{i}-\vec{j}$, $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{10}$

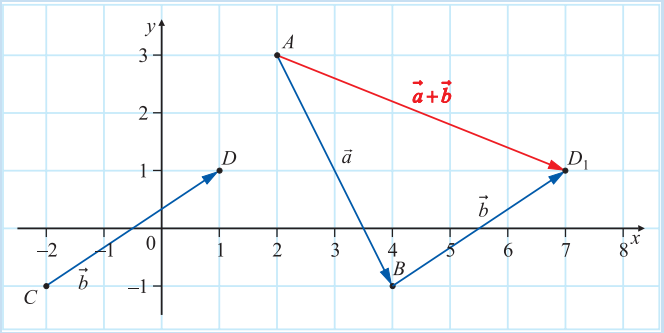
9. a) $\overrightarrow{AB}=2\vec{i}-6\vec{j}$, $\overrightarrow{BC}=4\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{CD}=-2\vec{i}+6\vec{j}$, $\overrightarrow{AD}=4\vec{i}+4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC}=6\vec{i}-2\vec{j}$, $\overrightarrow{BD}=2\vec{i}+10\vec{j}$

b) $\vec{v}_1=\frac{1}{2}\left(2\vec{i}-6\vec{j}\right)+\frac{1}{2}\left(4\vec{i}+4\vec{j}\right)=\vec{i}-3\vec{j}+2\vec{i}+2\vec{j}=3\vec{i}-\vec{j}$

c) $\vec{v}_2=\frac{1}{2}\left(6\vec{i}-2\vec{j}\right)-\frac{1}{2}\left(2\vec{i}+10\vec{j}\right)=3\vec{i}-\vec{j}-\vec{i}-5\vec{j}=2\vec{i}-6\vec{j}$

d) Suprotni vektori. e) Jednaki vektori. f) Kolinearni vektori $2\vec{v}_1=\vec{v}_2$. g) $\overrightarrow{AB}=2\vec{v}_1$

10. $\vec{a}+\vec{b}=5\vec{i}-2\vec{j}$



11. Suprotni vektori. **12.** Da. **13.** b) Ti vektori nisu kolinearni. **14.** Ordinata (y-os).

15. 0 (nula). **16.** a) $\vec{c}=8\vec{a}+5\vec{b}$ b) $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ **17.** $\alpha=32.57°$, $\beta=115.56°$ i $\gamma=31.87°$

18. $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=21$, $\beta=36.87°$ **19.** $\vec{b}=12\vec{i}-9\vec{j}$ **20.** $\vec{b}=-8\vec{i}-6\vec{j}$

5.3. Pravac

Graf linearne funkcije $f(x) = ax + b$ je pravac. Jednadžbu pravca možemo zapisati u **implicitnom** obliku ($Ax + By + C = 0$), **eksplicitnom** ($y = kx + l$, gdje je k koeficijent smjera pravca ili nagib pravca, a l odsječak na y-osi) ili u **segmentnom** obliku ($\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$, gdje su m i n odsječci na koordinatnim osima).

Površina trokuta određenog pravcem i koordinatnim osima je

$$P = \frac{|m \cdot n|}{2}.$$

Ukoliko je odsječak na y osi $l = 0$, pravac prolazi kroz ishodište koordinatnog sustava.

Dva su pravca paralelna ako imaju iste koeficijente smjera $k_1 = k_2$, a okomiti su ako vrijedi $k_1 = -\frac{1}{k_2}$.

Pravac je jednoznačno određen ili jednom točkom i koeficijentom smjera ili dvjema točkama. Iz toga slijedi:

a) **jednadžba pravca zadanog točkom $T(x_1, y_1)$ i koeficijentom smjera k**

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

b) **jednadžba pravca zadanog dvjema točkama** $T(x_1, y_1)$ i $T_2(x_2, y_2)$

$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, koeficijent smjera je $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Kut α između dvaju pravaca (s koeficijentima smjera k_1 i k_2)

$$tg\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$$

Udaljenost točke $T(x_1, y_1)$ od pravca $Ax + By + C = 0$

$$d(T, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Primjer 1: Provjerimo koje od točaka $A(1, -4)$, $B(3, 3)$ i $C(4, -4)$ leže na pravcu $2x - 3y + 4 = 0$.

Rješenje: Točka je na pravcu ako njene koordinate zadovoljavaju jednadžbu pravca.

$A(1, -4) \Rightarrow 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-4) + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 18 = 0 \Rightarrow$ točka nije na pravcu

$B(3, 3) \Rightarrow 2 \cdot 3 - 3 \cdot 3 + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 1 = 0 \Rightarrow$ točka nije na pravcu

$C(4, -4) \Rightarrow 2 \cdot 4 - 3 \cdot 4 + 4 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow 0 = 0 \Rightarrow$ točka je na pravcu

Primjer 2: U jednadžbi pravca $(a+1)x-2y-19+a=0$ odredimo parametar a tako da odsječak tog pravca na osi x bude jednak 1.

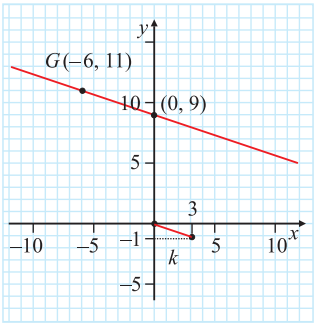
Rješenje: Pravac siječe os x u točki $(1, 0)$. Uvrstimo koordinate točke u jednadžbu pravca.

$(a+1)\cdot 1-2\cdot 0-19+a=0 \Rightarrow a+1-19+a=0 \Rightarrow a=9$

Primjer 3: Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom $G(-6, 11)$, a koeficijent smjera mu je $k=-\frac{1}{3}$?

Nacrtajmo taj pravac i napišimo ga u implicitnom obliku.

Rješenje: Uvrstimo koordinate točke G i koeficijent smjera u jednadžbu $y-y_1=k(x-x_1)$.



$$y-11=-\frac{1}{3}(x+6)$$

$$y-11=-\frac{1}{3}x-2$$

$$y=-\frac{1}{3}x+9$$

$Za\ x=0 \Rightarrow y=9$

Napišimo dobivenu eksplicitnu jednadžbu pravca u implicitnom obliku.

$$y=-\frac{1}{3}x+9 \Big/ \cdot 3 \Rightarrow 3y=-x+27 \Rightarrow x+3y-27=0$$

Primjer 4: Napišimo jednadžbu pravca koji prolazi točkama $S(7, -4)$ i $D(-2, 3)$.

Rješenje: Uvrstimo koordinate točaka u jednadžbu

$$y-y_1=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1).$$

$$y+4=\frac{3+4}{-2-7}(x-7)$$

$$y+4=-\frac{7}{9}(x-7)$$

$$y+4=-\frac{7}{9}x+\frac{49}{9}$$

$$y=-\frac{7}{9}x+\frac{49}{9}-4$$

$$y=-\frac{7}{9}x+\frac{13}{9}$$

Zapišimo dobiveno rješenje u implicitnom obliku:

$$y=-\frac{7}{9}x+\frac{13}{9} \Big/ \cdot 9 \Rightarrow 9y=-7x+13 \Rightarrow 7x+9y-13=0.$$

Primjer 5: Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom $T(-2, 1)$, a okomit je na pravac određen točkama $A(2, 1)$ i $B(-1, -1)$?

Rješenje: Koeficijent smjera pravca određenog točkama A i B je:

$$k_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-1-1}{-1-2} = \frac{2}{3}.$$

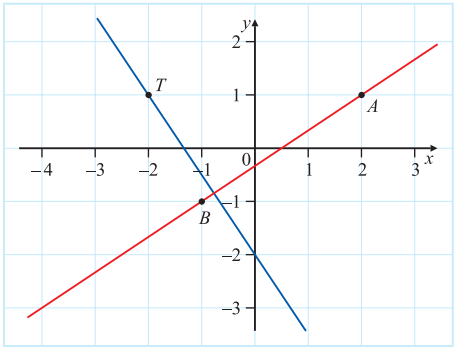
Koeficijent smjera okomitog pravca je $k = -\frac{1}{k_{AB}} = -\frac{3}{2}$.

Uvrštavanjem u formulu za jednadžbu pravca određenog točkom i koeficijentom smjera dobivamo:

$$y - 1 = -\frac{3}{2}(x + 2),$$

tj. $y = -\frac{3}{2}x - 2$ (eksplicitni oblik jednadžbe pravca)

ili $3x + 2y + 4 = 0$ (implicitni oblik jednadžbe pravca).



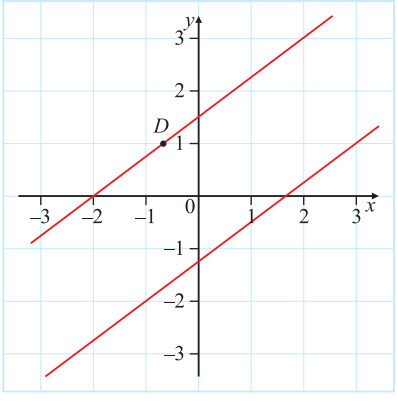
Primjer 6: Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom $D\left(-\frac{2}{3}, 1\right)$, a paralelan je s pravcem $3x - 4y - 5 = 0$?

Rješenje: Iz jednadžbe pravca odredimo koeficijent smjera:

$$y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{3}{4}.$$

Uvrstimo koordinate točke D i koeficijent smjera k u jednadžbu $y - y_1 = k(x - x_1)$.

$$\Rightarrow \quad y - 1 = \frac{3}{4}\left(x + \frac{2}{3}\right) \quad \Rightarrow \quad y = \frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$$



Primjer 7: Odredimo jednadžbu pravca paralelnog s pravcem $2x + 3y - 1 = 0$ koji s pozitivnim dijelovima koordinatnih osi zatvara trokut površine 12.

Rješenje: Koeficijent smjera pravca odredit ćemo iz eksplicitne jednadžbe zadanog pravca.

$$3y = -2x + 1 \,/ : 3 \;\Rightarrow\; y = -\frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \;\Rightarrow\; k = -\frac{2}{3}$$

Zapišimo jednadžbu tog pravca u segmentnom obliku.

$$y = -\frac{2}{3}x + l \,/ \cdot 3 \;\Rightarrow\; 2x + 3y = 3l \,/ : 3l$$

$$\Rightarrow\; \frac{x}{\frac{3l}{2}} + \frac{y}{l} = 1 \;\Rightarrow\; m = \frac{3l}{2},\ n = l$$

Površina trokuta koji pravac zatvara s koordinatnim osima je

$$P = \frac{|m \cdot n|}{2} = \frac{\left|\frac{3l}{2} \cdot l\right|}{2} = 12.$$

$$\frac{3l^2}{2} = 24$$

$$l^2 = 16$$

$$l = 4 \qquad \text{(trokut je u I. kvadrantu)}$$

Eksplicitna jednadžba pravca je $y = -\frac{2}{3}x + 4$, a implicitna $2x + 3y - 12 = 0$.

Primjer 8: Stranice kvadrata leže na pravcima $3x - y + 1 = 0$ i $3x - y + 5 = 0$. Odredimo površinu kvadrata.

Rješenje: Pravci su paralelni s koeficijentom smjera $k = 3$. Odaberimo bilo koju točku jednog pravca i odredimo koliko je udaljena od drugog pravca.

$$x = 1 \;\Rightarrow\; y = 3 \cdot 1 + 1 = 4 \;\Rightarrow\; T(1, 4)$$

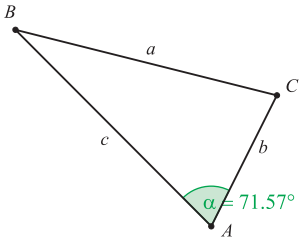
$$d(T, p) = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|3 \cdot 1 - 1 \cdot 4 + 5|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{10}}$$

Površina kvadrata je $P = a^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{10}}\right)^2 = \frac{16}{10} = \frac{8}{5}$.

Primjer 9: Zadan je trokut ΔABC s vrhovima $A(0, 3)$, $B(-3, 6)$ i $C(1, 5)$. Odredimo kut α.

Rješenje: Odredimo koeficijente smjera pravaca na kojima leže stranice b i c.

$$k_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{6 - 3}{-3 - 0} = -1 \qquad k_{AC} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5 - 3}{1 - 0} = 2$$



Kut ćemo izračunati uvrštavanjem dobivenih koeficijenata u formulu:

$$tg\,\alpha = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right| = \left|\frac{2+1}{1-1\cdot 2}\right| = \left|\frac{3}{-1}\right| = 3$$

$\alpha = 71°\,33'\,54'' = 71.57°.$

Primjer 10: Nađimo presjek pravaca $x + y - 1 = 0$ i $x - 2y - 10 = 0$. Nacrtajmo pravce u koordinatnom sustavu.

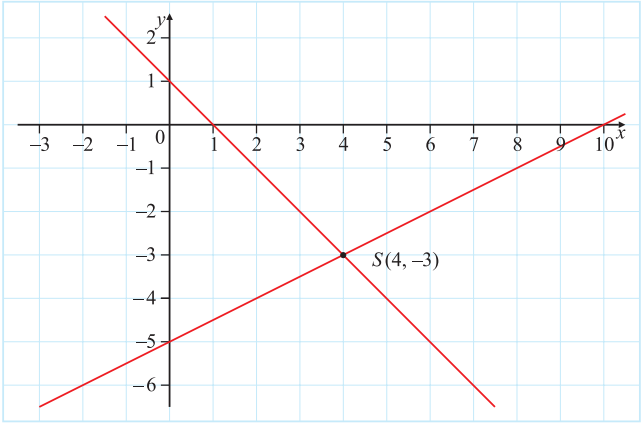
Rješenje: Sjecište pravaca je točka, a odredit ćemo je rješavanjem sustava jednadžbi.

$$\begin{cases} x + y - 1 = 0 \;/\cdot(-1) \\ x - 2y - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -x - y + 1 = 0 \\ x - 2y - 10 = 0 \end{cases} \quad +$$

$-3y - 9 = 0 \;\Rightarrow\; y = -3 \qquad x - 3 - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = 4$

$S(4, -3)$



Grafičko rješenje presjeka pravaca očitamo s koordinatnih osi i potvrdimo račun.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

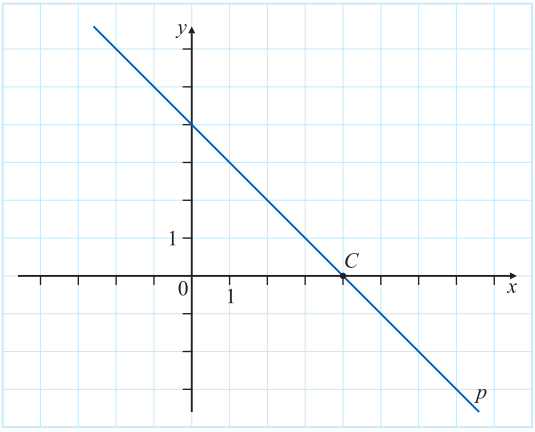
1. (NI 2006.) Zadan je pravac p kojemu je jednadžba $y = \frac{3}{4}x - 2$.

a) Nacrtajte pravac p u koordinatnom sustavu.
b) Odredite udaljenost između točaka u kojima pravac p siječe koordinatne osi.
c) Odredite jednadžbu po volji odabranog pravca q koji u točki $(2, y)$ siječe pravac p.

2. (IK 2006.) Koji od pravaca prolazi ishodištem koordinatnoga sustava?

a) $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ b) $x + y = 1$ c) $2x + 3y = 0$ d) $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

3. (IK 2006.) U koordinatnom sustavu nacrtan je pravac p.



a) Odredite mu jednadžbu.
b) U istom koordinatnom sustavu nacrtajte pravac $y = 2x + 4$.
c) Pravac p i pravac $y = 2x + 4$ sijeku se u točki A. Na grafu označite točku A i napišite njezine koordinate.
d) Odredite koordinate točke B u kojoj pravac $y = 2x + 4$ siječe os apscisa.
e) Izračunajte površinu trokuta ΔABC.

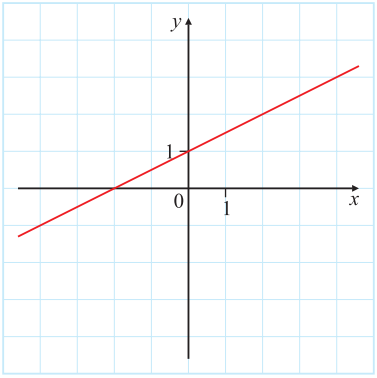
4. (IK 2006.) U koordinatnom sustavu nacrtajte pravac $y = -x + 2$.

5. (NI 2007.) Zadani su pravci $y = -x + 1$ i $y = 3x$.

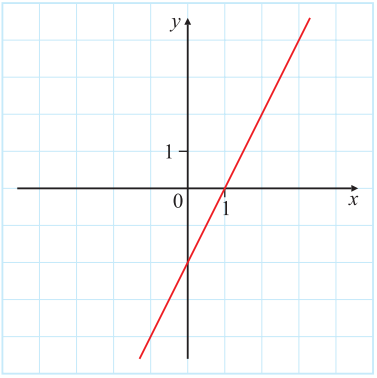
a) U koordinatnom sustavu nacrtajte oba pravca.
b) Koliko rješenja ima sustav jednadžbi $\begin{cases} y = -x + 1 \\ y = 3x \end{cases}$?

6. (NI 2008.) Na kojoj je slici prikazan pravac $y = \frac{1}{2}x - 2$?

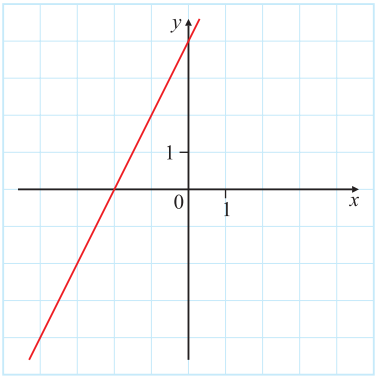
a)



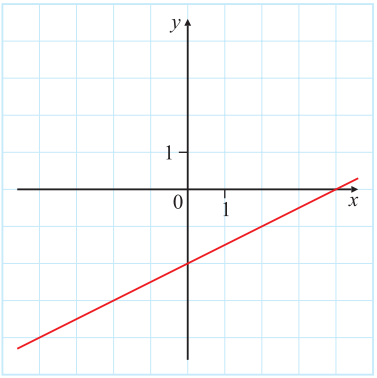
b)



c)



d)



7. (NI 2008.) Zadane su točke $A(-6, -2)$, $B(-2, 1)$ i $C(4, 5)$.

a) Zadane točke ucrtajte u koordinatni sustav.

b) Izračunajte međusobne udaljenosti točaka A, B i C te odredite broj $|AB| + |BC| - |AC|$ zaokružen na tri decimale.

c) Leže li točke A, B, C na istome pravcu?

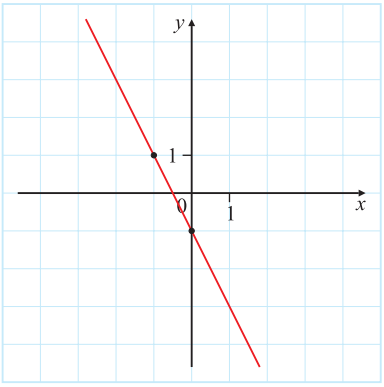
8. (NI 2008.) Zadane su točke $A(-1, 2)$ i $B(3, -1)$.

a) Odredite koordinate polovišta dužine $\overline{AB}$.

b) Odredite koeficijent smjera pravca određenoga točkama A i B.

c) Odredite jednadžbu simetrale dužine $\overline{AB}$.

9. (NI 2008.) Jednadžba pravca koji je usporedan s nacrtanim pravcem i prolazi točkom (0, 7) je:



a) $y = \frac{1}{2}x - 7$

b) $y = -\frac{1}{2}x + 7$

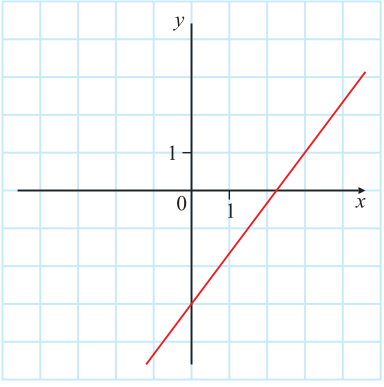
c) $y = 2x - 7$

d) $y = -2x + 7$.

10. (NI 2008.) Ako je $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$, tada je jednako:

a) $y = -\frac{2}{3}x + 2$ b) $y = \frac{2}{3}x - 2$ c) $y = -\frac{3}{2}x + 2$ d) $y = \frac{3}{2}x - 2$.

11. (NI 2009.) Napišite jednadžbu pravca prikazanoga grafom.
Izračunajte površinu trokuta kojega pravac zatvara s koordinatnim osima.



12. (IK 2010.) Zadan je pravac $y = -\frac{1}{2}x + 4$. Odredite udaljenost ishodišta od zadanog pravca.

13. (NI 2009.) Zadan je pravac $y = -\frac{1}{2}x + 4$.

a) Odredite udaljenost ishodišta od zadanog pravca.
b) Odredite pravac koji prolazi točkom (4, 0) i usporedan je sa zadanim pravcem.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Što je nagib pravca ako je $y = kx + l$ jednadžba pravca?

a) y b) k c) x d) l

2. Odredite parametar $k \in \boldsymbol{R}$ takav da točka $(1, 2)$ pripada pravcu $2x - y = k$.

a) $k = 0$ b) $k = 1$ c) $k = 2$ d) $k = 3$

3. Odredite sve parametre $t \in \boldsymbol{R}$ takve da točka $(t, 1)$ ne pripada pravcu $x - y = 1$.

a) $t \neq 0$ b) $t \neq 1$ c) $t \neq 2$ d) $t \neq 3$

4. U jednadžbi pravca $ax - 4y - 20 + a = 0$ odredite parametar a tako da odsječak tog pravca na osi y bude jednak 4.

a) 33 b) 34 c) 35 d) 36

5. Točka $A(x_1, 4)$ pripada pravcu $3x - 2y + 5 = 0$, dok mu točka $B(-3, 8)$ ne pripada. Koeficijent smjera pravca kroz točke A i B je:

a) -1 b) 1 c) 3 d) 5.

6. Opseg četverokuta kojeg određuju pravci $x + 2y - 6 = 0$ i $x + 2y - 3 = 0$ zajedno s koordinatnim osima je:

a) $1.5\left(1+\sqrt{5}\right)$ b) $2.5\left(1+\sqrt{5}\right)$ c) $3.5\left(1+\sqrt{5}\right)$ d) $4.5\left(1+\sqrt{5}\right)$.

7. Udaljenost točke $T(4, 8)$ od sjecišta S dvaju pravca od kojih je jednomu jednadžba $x + y - 5 = 0$, a drugi je određen točkama $A(1, 4)$ i $B(-1, 2)$, iznosi:

a) 3 b) 4 c) 5 d) 6.

8. Površina trokuta kojeg određuju pravac koji prolazi točkama $A(2, -9)$ i $B(-2, -3)$ te koordinatne osi, iznosi:

a) 10 b) 12 c) 14 d) 16.

9. Odredite površinu trokuta kojeg pravac $y = -3x + 2$ zatvara s koordinatnim osima.

a) $\frac{2}{3}$ b) 1.5 c) 2 d) 3

10. Pravac $mx + \frac{m+1}{2}y = m^2 + m$ zatvara s koordinatnim osima jednakokračan pravokutan trokut površine:

a) m b) m^2 c) 1 d) 2.

11. Odredite sve parametre $a \in \boldsymbol{R}$ tako da površina trokuta kojeg pravac $y = -3x + a$ zatvara s koordinatnim osima bude jednaka $\frac{2}{3}$.

a) $a = \pm 2$ b) $a = \pm\frac{1}{2}$ c) $a = \pm 3$ d) $a \in \boldsymbol{R}$

12. Tri vrha paralelograma $ABCD$ su $A(1, 2)$, $B(-5, -3)$ i $C(7, -6)$. Koordinate četvrtog vrha D su:

a) $D(13, -1)$ b) $D(1, -13)$ c) $D(-13, 1)$ d) $D(1, 13)$.

13. Odredite sve parametre $t \in \boldsymbol{R}$ tako da su jednadžbe $-2x + y - 3 = 0$ i $-4x + 2y - t - 1 = 0$ jednadžbe istog pravca.

a) $t \in \boldsymbol{R}$ b) $t \in \langle 5, +\infty \rangle$ c) $t \in \{5\}$ d) $t \in \{3\}$

14. Odredite sve parametre $a \in \boldsymbol{R}$ tako da pravci $y = 2x + a$ i $y = 2x + 3$ budu okomiti.

a) $a \in \boldsymbol{R}$ b) $a = 3$

c) $a = -\frac{1}{3}$ d) Ne postoji takav a.

15. Odredite sve parametre $m \in \boldsymbol{R}$ tako da pravci $3x + y = m$ i $x + my = 2$ budu paralelni.

a) $m = \frac{1}{3}$ b) $m \in \left\{0, \frac{1}{3}\right\}$ c) $m \in \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}$ d) $m = 3$

16. Jednadžba pravca koji prolazi sjecištem pravaca $3x + 2y - 12 = 0$ i $-2x - 2y + 14 = 0$, i koji je okomit na pravac koji prolazi točkama $A(3, 1)$ i $B(-1, 7)$ je:

a) $-2x - 3y + 31 = 0$ b) $2x - 3y + 31 = 0$

c) $-2x + 3y + 31 = 0$ d) $2x + 3y + 31 = 0$.

17. Nađite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $M(-2, 3)$ i koji je paralelan s pravcem koji prolazi točkama $T_2(3, 4)$ i $T_3(-3, -5)$.

a) $3x + 2y + 12 = 0$ b) $3x - 2y + 12 = 0$

c) $-3x + 2y + 12 = 0$ d) $3x + 2y - 12 = 0$

18. Opseg trokuta kojeg određuje pravac zadan točkama $A\left(1, \frac{8}{3}\right)$ i $B\left(2, \frac{4}{3}\right)$ zajedno s koordinatnim osima iznosi:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14.

19. Ako su $A(0, 2)$, $B(4, 0)$ i $C(2, 5)$ vrhovi trokuta ΔABC, tada su koordinate sjecišta visina (ortocentar) tog trokuta:

a) $S\left(\frac{3}{8}, \frac{9}{4}\right)$ b) $S\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{4}\right)$ c) $S\left(\frac{7}{8}, \frac{9}{4}\right)$ d) $S\left(\frac{5}{8}, \frac{9}{4}\right)$.

20. Točke $P_1\left(-\frac{1}{2}, 2\right)$, $P_2(1, 5)$ i $P_3\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$ redom su polovišta stranica $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ i $\overline{CA}$ trokuta ΔABC. Koeficijent smjera pravca na kojem leži težišnica t_b tog trokuta jednak je:

a) $-\frac{2}{7}$ b) $-\frac{3}{7}$ c) $-\frac{4}{7}$ d) $-\frac{5}{7}$.

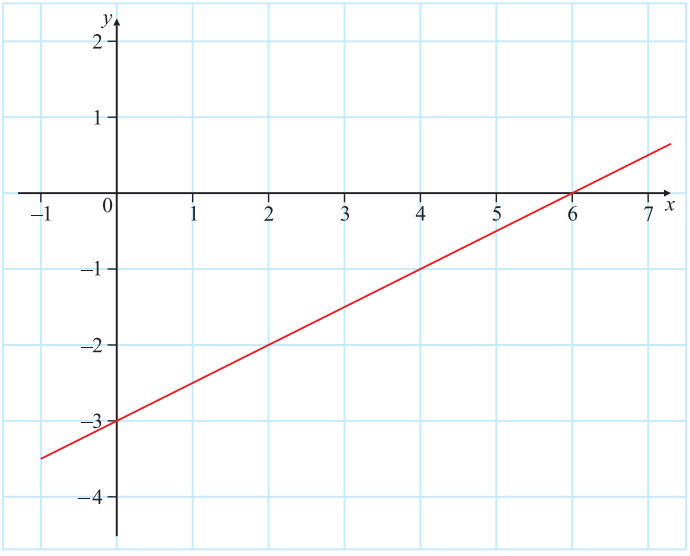
21. Ako pravci $x + y - 9 = 0$, $2x + 5y - 39 = 0$ i $mx + 7y - 3 = 0$ prolaze istom točkom, koliki je m?

a) 39 b) 23 c) 32 d) –23

22. Koja od točaka **ne pripada** pravcu $y = -\frac{1}{2}x + 3$?

a) $(-6, 6)$ b) $\left(1, \frac{5}{2}\right)$ c) $\left(7, -\frac{1}{2}\right)$ d) $(3, 1)$

23. Koja jednadžba pripada pravcu na slici?

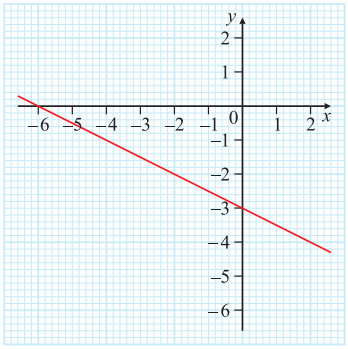


a) $\frac{x}{-3} + \frac{y}{-6} = 1$ b) $y = \frac{1}{2}x - 3$

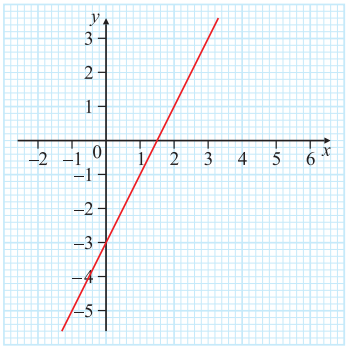
c) $x - 2y + 6 = 0$ d) $y = 2x - 3$

24. Zadana su četiri pravca svojim grafovima i četiri jednadžbe pravaca.

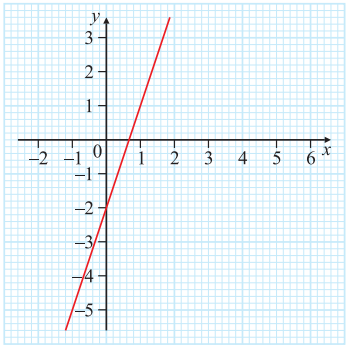
1.



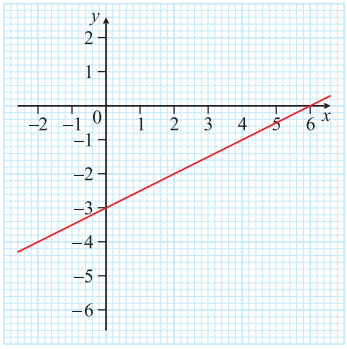
2.



3.



4.



Zaokružite redni broj grafa pravca koji je zadan jednadžbom.

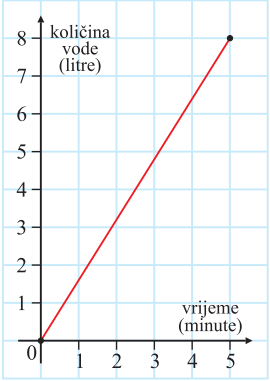
a) $y = \frac{1}{2}x - 3$ graf 1. 2. 3. 4.

b) $y = 2x - 3$ graf 1. 2. 3. 4.

c) $y = -\frac{1}{2}x - 3$ graf 1. 2. 3. 4.

d) $y = 3x - 2$ graf 1. 2. 3. 4.

25. Grafom je prikazano vrijeme punjenja kante vodom.



25.1. Koliko vremena treba da se kanta napuni?

a) 4 minute b) 5 minuta
c) 6 minuta d) 8 minuta

25.2. Koliko vode stane u kantu?

a) 8 L b) 5 L c) 4 L d) 10 L

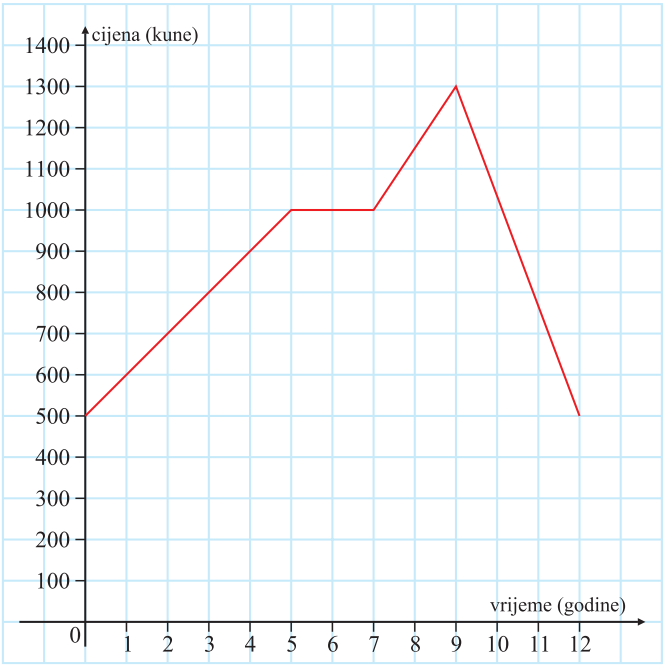
25.3. Koliko je vremena trebalo da u kanti budu 4 litre?

a) 3 minute b) 5 minuta
c) 1.5 minuta d) 2.5 minute

25.4. Koja količina vode je bila u kanti nakon 4 minute punjenja?

a) 4 L b) 3.2 L c) 6.4 L d) 6.2 L

26. Grafom su prikazane vrijednosti ulaganja u neki posao tijekom 12 godina.



26.1. Koliko je iznosilo početno ulaganje?

a) 500 kuna b) 1 300 kuna
c) 1 000 kuna d) 100 kuna

26.2. U prvih pet godina ulaganje je poraslo za:

a) 500 kuna b) 1 000 kuna
c) 1 300 kuna d) 800 kuna.

26.3. Ukupno vrijeme ulaganja je:

a) 5 godina b) 7 godina
c) 9 godina d) 12 godina.

26.4. Ulaganje je bilo najveće:

a) u prvih 5 godina b) između 5. i 7. godine
c) između 7. i 10. godine d) između 10. i 12. godine.

26.5. Ulaganje je počelo opadati:

a) u prvih 5 godina b) između 5. i 7. godine
c) između 7. i 10. godine d) između 9. i 12. godine.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Zadane su tri točke u koordinatnom sustavu $A(-2, 2)$, $B(-2, -3)$ i $C(1, 1)$. Nacrtajte trokut ΔABC u koordinatnom sustavu.

a) Odredite pravac na kojem leži stranica a trokuta.
b) Odredite pravac na kojem leži težišnica t_b trokuta ΔABC.
c) Odredite sva tri kuta trokuta ΔABC.

2. Zadana su tri vrha paralelograma $A(-4, 3)$, $B(-2, -3)$ i $C(2, 1)$. Napišite jednadžbe pravaca koji sadrže preostale dvije stranice paralelograma i koordinate četvrtog vrha.

3. Napišite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $C(4, -3)$ i paralelan je s osi y.

4. Odredite površinu trokuta što ga s koordinatnim osima zatvara pravac $2x - 3y - 18 = 0$.

5. Odredite realan broj m takav da pravac $2mx - (3 - 4m)y + 5 + 6m = 0$ prolazi ishodištem koordinatnog sustava.

6. Odredite realan broj m tako da pravci $(m - 2)x - y + 6 = 0$, $(2m + 1)x + 3y - 4 = 0$ budu paralelni.

7. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $T(5, -2)$ i na koordinatnim osima odsijeca jednake odsječke.

8. Ispitajte pripadaju li točke $A(2, -1)$, $B(-3, 5)$ i $C(-8, 11)$ istom pravcu.

9. Napišite jednadžbu pravca paralelnog pravcu $4x + y - 5 = 0$, a koji prolazi točkom $N(-1, -2)$. Sve prikažite u koordinatnom sustavu.

10. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = |3 - 2x|$.

11. Jednadžba pravca $y = -\frac{1}{5}x$ u implicitnom obliku glasi

_____ .

12. Jednadžba pravca $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$ u implicitnom obliku glasi

_____ .

13. Stranice kvadrata leže na pravcima $3x + 4y - 12 = 0$ i $3x + 4y + 13 = 0$. Odredite površinu kvadrata.

14. Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava, a okomit je na pravac $5x - 6y - 7 = 0$?

15. Odredite površinu trokuta čiji su vrhovi sjecišta pravaca $x - 2y + 6 = 0$, $2x + y + 2 = 0$ i $x = 2$.

16. Odredite koordinate točke na pravcu $x + 2y - 3 = 0$ koja je najbliža točki $D(1, 6)$.

17. Za koji y sve tri točke $A(2, -1)$, $B(3, 4)$ i $C(-3, y)$ leže na istom pravcu?

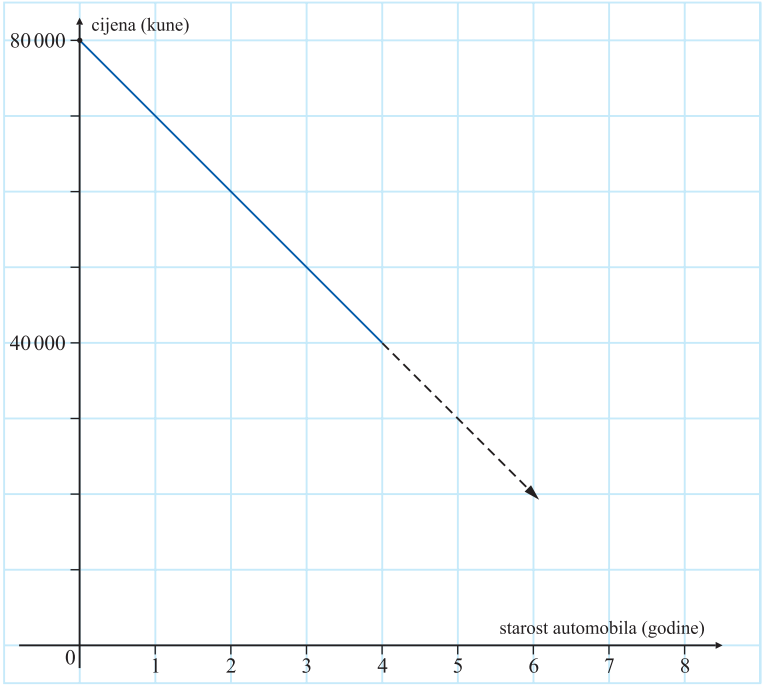
18. Pravac dan jednadžbom $\frac{x}{-2} + \frac{y}{7} = 1$ siječe os x u točki s koordinatama (_____, _____)

19. U jednadžbi pravca $y = ax + b$ veličinu b nazivamo

_____ .

20. Dva usporedna (paralelna) pravca imaju _____ koeficijent smjera.

21. Grafom je prikazano kako vrijednost automobila opada nakon kupnje.

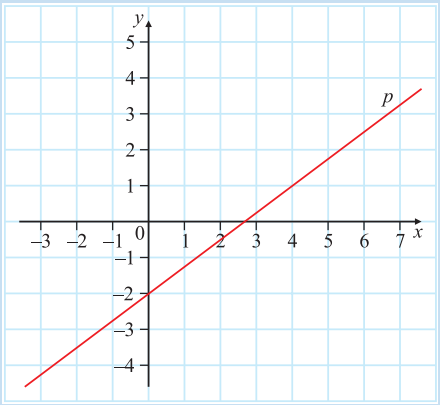


21.1. Koliko je automobil izgubio na vrijednosti nakon četiri godine?
21.2. Koliko je automobil vrijedio nakon 3 godine?
21.3. Kada će automobil imati vrijednost 20 000 kuna?
21.3. Kada će njegova vrijednost biti nula?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

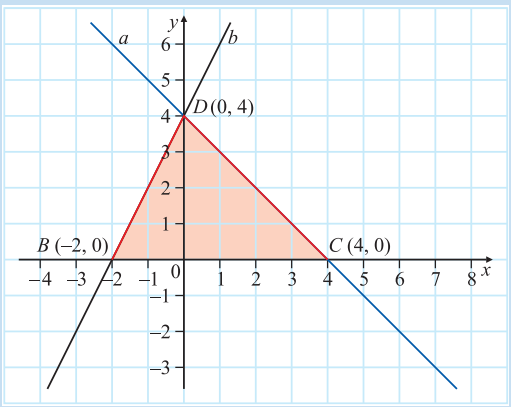
1. a)



b) $\frac{10}{3}$ c) Bilo koji pravac koji prolazi točkom $\left(2, -\frac{1}{2}\right)$, kao $y = -\frac{1}{2}$, $x = 2$, $y = x - \frac{5}{2}$

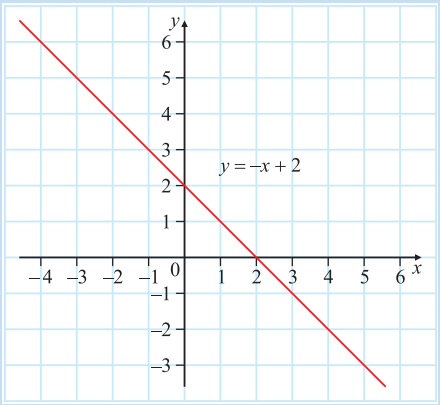
2. c

3. a) $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$ b)

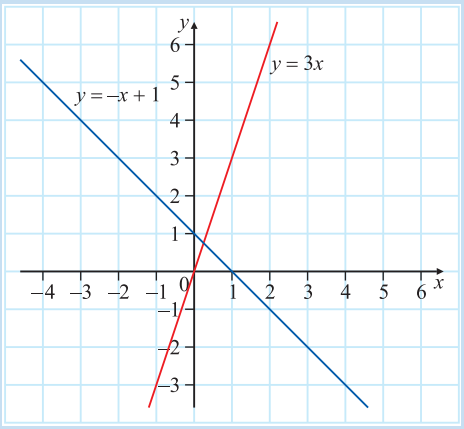


c) $A(0, 4)$ d) $B(-2, 0)$ e) $P = 12$ kvadratnih jedinica

4.



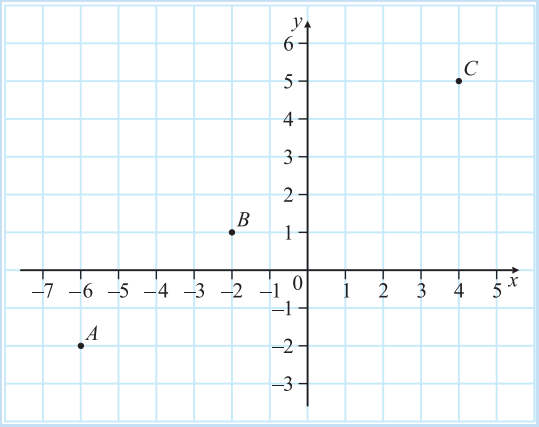
5. a)



b) Jedno.

6. d)

7. a)



b) $|AB| = 5,\ |BC| = 2\sqrt{13},\ |AC| = \sqrt{149},\ |AB| + |BC| - |AC| \approx 0.005$

c) NE

8. a) $P_{\overline{AB}} = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ b) $-\frac{3}{4}$ c) $y = \frac{4}{3}x - \frac{5}{6}$ **9.** d **10.** b

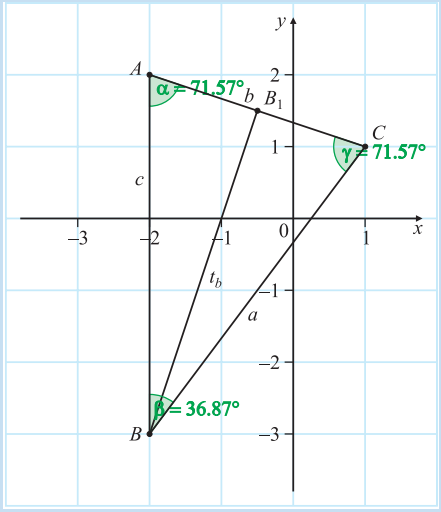
11. a) $y = \frac{4}{3}x - 3$ b) $\frac{27}{8}$ **12.** $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ **13.** a) $\frac{8\sqrt{5}}{5}$ b) $y = -\frac{1}{2}x + 2$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. b	**2.** a	**3.** c	**4.** d	**5.** a	**6.** d	**7.** c	**8.** b	**9.** a	
10. d	**11.** a	**12.** a	**13.** c	**14.** d	**15.** a	**16.** b	**17.** b	**18.** b	
19. d	**20.** a	**21.** d	**22.** d	**23.** b	**24.** a) 4		b) 2	c) 1	d) 3
25. 1. b		2. a	3. d	4. c	**26.** 1. a		2. a	3. d	4. c 5. d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

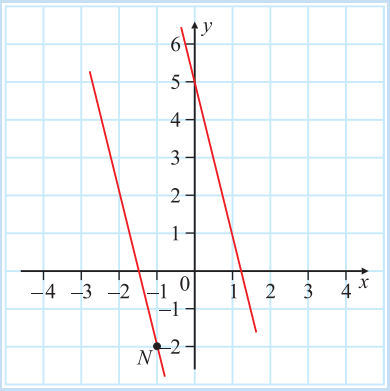
1. a) p_{BC} $4x - 3y - 1 = 0$
b) t_b $3x - y + 3 = 0$
c) $\alpha = 71.57°$, $\beta = 36.87°$, $\gamma = 71.57°$



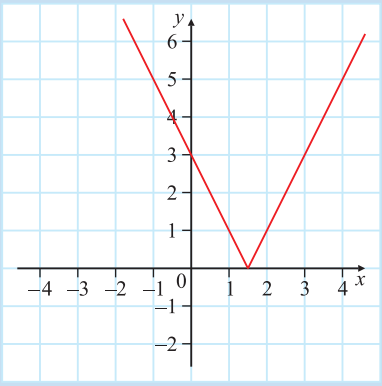
2. $AD \ldots y = x + 7$, $DC \ldots y = -3x + 7$, $D(0, 7)$ **3.** $x = 4$ **4.** $P = 27$

5. $m = -\frac{5}{6}$ **6.** $m = 1$ **7.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{3} = 1$ **8.** Jesu.

9. $y = -4x - 6$



10.



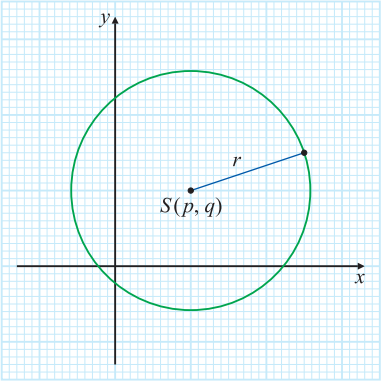
11. $x + 5y = 0$ **12.** $2x - 3y - 6 = 0$ **13.** $P = 25$ **14.** $y = -\frac{6}{5}x$ ili $6x + 5y = 0$ **15.** $P = 20$

16. $D(-1, 2)$ **17.** $y = -26$ **18.** $(-2, 0)$ **19.** odsječak na y-osi **20.** isti.

21. 1. 40 000 kuna. 2. 50 000 kuna. 3. Nakon 6 godina. 4. U osmoj godini starosti.

5.4. Krivulje drugog reda

5.4.1. Kružnica



Kružnica je skup svih točaka u ravnini jednako udaljenih od neke čvrste točke te ravnine.

Jednadžba kružnice sa središtem u točki $S(p, q)$ i polumjerom r

$$(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$$

Ukoliko je središte kružnice u ishodištu koordinatnog sustava $S(0, 0)$, jednadžba kružnice glasi:

$$x^2+y^2=r^2.$$

Međusobni položaj pravca i kružnice:

a) pravac i kružnica sijeku se u dvije točke
b) pravac i kružnica sijeku se u jednoj točki (pravac je tangenta na kružnicu)
c) pravac i kružnica se ne sijeku.

Pravac koji je tangenta kružnice, udaljen je do središta kružnice za polumjer r ($d(S, y=kx+l)=r$).
Iz ove činjenice dobivamo **uvjet dodira pravca** $y=kx+l$ i kružnice sa središtem u ishodištu $x^2+y^2=r^2$:

$$r^2(k^2+1)=l^2.$$

Uvjet dodira pravca $y=kx+l$ s kružnicom $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$

$$r^2(k^2+1)=(q-kp-l)^2$$

Jednadžba tangente u točki $T_1(x_1, y_1)$ kružnice sa središtem u $S(0, 0)$

$$x_1x+y_1y=r^2$$

Jednadžba tangente u točki $T_1(x_1, y_1)$ kružnice sa središtem u $S(p, q)$

$$(x_1-p)(x-p)+(y_1-q)(y-q)=r^2$$

Jednadžbu normale možemo dobiti iz jednadžbe pravca kroz dvije točke (normala prolazi kroz središte kružnice S i diralište tangente T_1) ili iz jednadžbe pravca zadanog točkom i koeficijentom smjera (normala prolazi kroz središte kružnice S i okomita je na tangentu, $k=-\frac{1}{k_t}$).

Ako pravac $y=kx+l$ siječe kružnicu $(x-p)^2+(y-q)^2=r^2$ u točki $T_1(x_1, y_1)$, onda je **kut između tog pravca i kružnice** određen formulom

$$tg\varphi=\left|\frac{k_2-k_1}{1+k_1k_2}\right|,$$

gdje su k_1 i k_2 koeficijenti smjera pravca i tangente na kružnicu u točki presjeka.

Primjer 1: Odredimo jednadžbu kružnice sa središtem $S(-2, 7)$ i polumjerom $r = 4$.

Rješenje: Uvrstimo u jednadžbu kružnice p, q i r:

$$(x + 2)^2 + (y - 7)^2 = 4^2$$

ili nakon kvadriranja:

$$x^2 + y^2 + 4x - 14y + 37 = 0.$$

Primjer 2: Odredimo središte i polumjer kružnice $x^2 + y^2 - 6x + 10y + 18 = 0$.

Rješenje: I Grupiramo članove s varijablom x i članove s varijablom y, a zatim svođenjem na potpuni kvadrat dobivamo:

$$(x^2 - 6x) + (y^2 + 10y) + 18 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + (y^2 + 10y + 5^2 - 5^2) + 18 = 0$$

$$(x^2 - 6x + 9) - 9 + (y^2 + 10y + 25) - 25 + 18 = 0$$

$$(x - 3)^2 + (y + 5)^2 = 16.$$

Središte kružnice je $S(3, -5)$, a polumjer $r = 4$.

Rješenje: II Ukoliko je kružnica zadana jednadžbom oblika

$x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0$

onda vrijedi: $d = -2p$, $e = -2q$, $f = p^2 + q^2 - r^2$.

Lako je odrediti koordinate središta i polumjer kružnice:

$$p = -\frac{d}{2} = -\frac{-6}{2} = 3,$$

$$q = -\frac{e}{2} = -\frac{10}{2} = -5,$$

$$r^2 = p^2 + q^2 - f = 3^2 + (-5)^2 - 18 = 9 + 25 - 18 = 16.$$

Središte kružnice je $S(3, -5)$, a polumjer $r = 4$.

Primjer 3: Odredimo jednadžbu kružnice ako su krajevi jednog njenog promjera točke $A(1, 4)$ i $B(-3, 2)$.

Rješenje: Središte kružnice nalazi se u polovištu dužine $\overline{AB}$, tj.

$$p = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1 + (-3)}{2} = -1$$

$$q = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{4 + 2}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad S(-1, 3).$$

Polumjer kružnice jednak je polovini udaljenosti točaka A i B:

$$r = \frac{1}{2}\left|\overline{AB}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-3-1)^2 + (2-4)^2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{16+4} = \frac{1}{2}\sqrt{20} = \sqrt{5}.$$

Tražena jednadžba kružnice je: $(x + 1)^2 + (y - 3)^2 = 5$.

Primjer 4: Odredimo jednadžbu kružnice koja prolazi točkama $A(1, 2)$, $B(4, 1)$ i $C(9, 6)$.

Rješenje: Kružnica prolazi nekom točkom ako koordinate te točke zadovoljavaju jednadžbu kružnice.

$A(1, 2) \quad \Rightarrow \quad (1-p)^2 + (2-q)^2 = r^2$

$B(4, 1) \quad \Rightarrow \quad (4-p)^2 + (1-q)^2 = r^2$

$C(9, 6) \quad \Rightarrow \quad (9-p)^2 + (6-q)^2 = r^2$

Zadatak se svodi na rješavanje sustava triju jednadžbi s tri nepoznanice.

Nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo sustav:

$p^2 + q^2 - 2p - 4q + 5 = r^2$ *I*

$p^2 + q^2 - 8p - 2q + 17 = r^2$ *II*

$p^2 + q^2 - 18p - 12q + 117 = r^2$. *III*

Oduzimanjem prve od druge jednadžbe dobivamo:

$$3p - q = 6,$$

a oduzimanjem druge od treće:

$$p + q = 10.$$

Tako smo dobili novi sustav dviju jednadžbi s dvije nepoznanice čijim rješavanjem dobivamo da je

$$p = 4 \text{ i } q = 6.$$

Uvrštavanjem tih vrijednosti u prvu jednadžbu (I) određujemo da je polumjer $r = 5$.

Tražena jednadžba kružnice je $(x-4)^2 + (y-6)^2 = 25$ ili, drugačije zapisano, $x^2 + y^2 - 8x - 12y + 27 = 0$.

Primjer 5: Za koju vrijednost parametra $t \in R$ pravac $y = (t+1)x$ dodiruje kružnicu $(x-5)^2 + y^2 = 9$?

a) $t \in R$ b) $t \in \left\{-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$

c) $t \in \left\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right\}$ d) Ne postoji takav $t \in R$.

Rješenje: Pravac $y = (t+1)x$ dodiruje kružnicu ako je on tangenta na kružnicu, tj. ako vrijedi uvjet dodira $r^2(k^2+1) = (q - kp - l)^2$.

Nadalje, $y = (t+1)x \quad \Rightarrow \quad k = t+1, \; l = 0.$

$(x-5)^2 + y^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad S(5, 0), \quad r = 3$

Iz uvjeta dodira dobivamo:

$3^2(k^2+1) = (0 - 5k - 0)^2$

$9k^2 + 9 = 25k^2$

$k_{1,2} = \pm\frac{3}{4}.$

Sada još trebamo odrediti t.

$t + 1 = \frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad t_1 = -\frac{1}{4}$

$t + 1 = -\frac{3}{4} \quad \Rightarrow \quad t_2 = -\frac{7}{4}$

Prema tome, rješenje je $t \in \left\{-\frac{7}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$, odgovor b).

Primjer 6: U kakvom su položaju točke $A(-3, 0)$, $B(5, 0)$ i $C(4, 2)$ u odnosu na kružnicu $(x+1)^2 + (y-2)^2 = 25$?

Rješenje: Imamo li kružnicu $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$, tada za neku točku $T_1(x_1, y_1)$ vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:

a) $(x_1-p)^2 + (y_1-q)^2 = r^2 \Rightarrow$ točka T_1 nalazi se na kružnici

b) $(x_1-p)^2 + (y_1-q)^2 < r^2 \Rightarrow$ točka T_1 nalazi se unutar kružnice

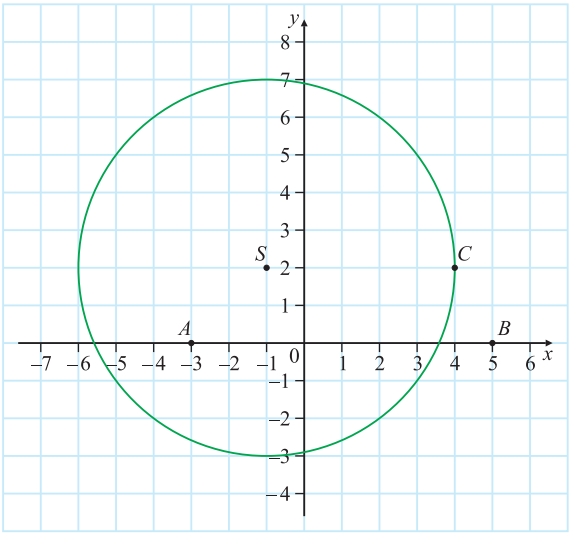
c) $(x_1-p)^2 + (y_1-q)^2 > r^2 \Rightarrow$ točka T_1 nalazi se izvan kružnice.

Uvrstimo koordinate zadanih točaka u jednadžbu kružnice.

$A(-3, 0) \Rightarrow (-3+1)^2 + (0-2)^2 = 4 + 4 = 8 < 25$

$B(5, 0) \Rightarrow (5+1)^2 + (0-2)^2 = 36 + 4 = 40 > 25$

$C(4, 2) \Rightarrow (4+1)^2 + (2-2)^2 = 25 + 0 = 25 = 25$



Točka A je unutar kružnice, točka B izvan kružnice, a točka C leži na kružnici.

Primjer 7: Odredimo koordinate točaka u kojima kružnica $x^2 + y^2 - 6x - 10y + 9 = 0$ siječe koordinatne osi.

Rješenje: Kružnica siječe x-os u točkama s ordinatom 0.

$x^2 + 0^2 - 6x - 10 \cdot 0 + 9 = 0$

$x^2 - 6x + 9 = 0$

$(x-3)^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 3$

Dakle, kružnica dodiruje x-os u točki $T(3, 0)$.

Kružnica siječe y-os u točkama s apscisom 0.

$0^2 + y^2 - 6 \cdot 0 - 10y + 9 = 0$

$y^2 - 10y + 9 = 0$

$$y_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 36}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2}$$

$y_1 = 9, \; y_2 = 1$

Kružnica siječe x-os u točkama $T_1(0, 9)$ i $T_2(0, 1)$.

Primjer 8: Napišimo jednadžbu kružnice koja prolazi točkama $E(3, 0)$ i $F(-1, 2)$, a središte joj leži na pravcu $x - y + 2 = 0$.

Rješenje: Središte kružnice leži na pravcu $y = x + 2$ i vrijedi $S(x, x + 2)$. Udaljenosti točaka E i F od središta S su jednake (to su polumjeri kružnice).

$$\sqrt{(3-x)^2 + (0-x-2)^2} = \sqrt{(-1-x)^2 + (2-x-2)^2}$$

$$9 - 6x + x^2 + x^2 + 4x + 4 = 1 + 2x + x^2 + x^2$$

$$x = 3 \quad \Rightarrow \quad y = 5$$

Tražena jednadžba kružnice je $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 25$.

Primjer 9: Kružnica prolazi točkom $G(-4, 2)$ i dira os apscisa u točki $H(2, 0)$. Središte kružnice je u točki:

a) $S(0, 5)$ b) $S(2, 10)$ c) $S(2, 5)$ d) $S(2, -10)$

Rješenje: Točke G i H zadovoljavaju jednadžbu kružnice $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

Uvrštavanjem njihovih koordinata u jednadžbu kružnice dobivamo sustav:

$$\left.\begin{aligned} (-4-p)^2 + (2-q)^2 &= r^2 \\ (2-p)^2 + q^2 &= r^2 \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad 3p - q + 4 = 0$$

Kružnica dira točku $H(2, 0)$ iz čega vidimo da je $p = 2$.

Uvrštavanjem u rješenje sustava dobivamo $q = 10$.

Središte kružnice je u točki $S(2, 10)$, odgovor b).

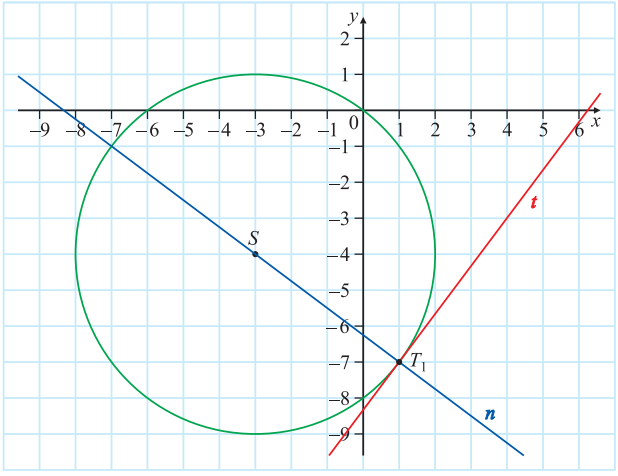
Primjer 10: Odredimo jednadžbu tangente i normale na kružnicu $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$ u točki kružnice $T_1(1, -7)$.

Rješenje: Nađimo najprije središte i polumjer kružnice svođenjem na potpuni kvadrat.

$$(x^2 + 6x + 3^2 - 3^2) + (y^2 + 8y + 4^2 - 4^2) = 0$$

$$(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 25$$

Središte kružnice je $S(-3, -4)$, a polumjer $r = 5$.



Uvrstimo koordinate točke T_1 u formulu za jednadžbu tangente.

$(x_1 + 3)(x + 3) + (y_1 + 4)(y + 4) = 25$

$4(x + 3) - 3(y + 4) = 25$

$4x - 3y - 25 = 0$ ..... jednadžba tražene tangente

Normala kružnice prolazi kroz središte $S(-3, -4)$ i diralište tangente $T_1(1, -7)$. Njenu jednadžbu izračunat ćemo iz formule $y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$ uvrštavanjem koordinata točaka S i T_1.

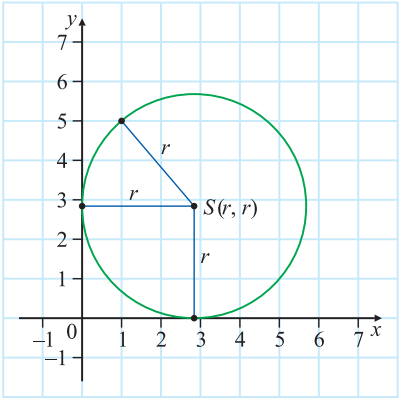
$$y - (-4) = \frac{-7 - (-4)}{1 - (-3)}(x - (-3))$$

$$y + 4 = \frac{-3}{4}(x + 3)$$

$y = \frac{-3}{4}x - \frac{25}{4}$ ..... jednadžba normale u točki T_1

Primjer 11: Odredimo polumjer (na dvije decimale) manje kružnice koja dira obje koordinatne osi i prolazi točkom $T(1, 5)$.

Rješenje: Središte kružnice je $S(r, r)$ jer dira obje koordinatne osi.



Polumjer kružnice je udaljenost točke $T(1, 5)$ od središta.

$$r = d(T, S) = \sqrt{(1 - r)^2 + (5 - r)^2}$$

Nakon kvadriranja i sređivanja dobivamo:

$r^2 - 12r + 26 = 0$

$$r_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{144 - 104}}{2} =$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{40}}{2} = 6 \pm \sqrt{10}.$$

Polumjer manje kružnice je

$r = 6 - \sqrt{10} \approx 6 - 3.16 = 2.84.$

Primjer 12: Odredimo polumjer kružnice koja je koncentrična s kružnicom $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ i dira pravac $y = \frac{4}{3}x - 1$.

Rješenje: Odredimo najprije središte kružnice svođenjem na potpuni kvadrat.

$x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$

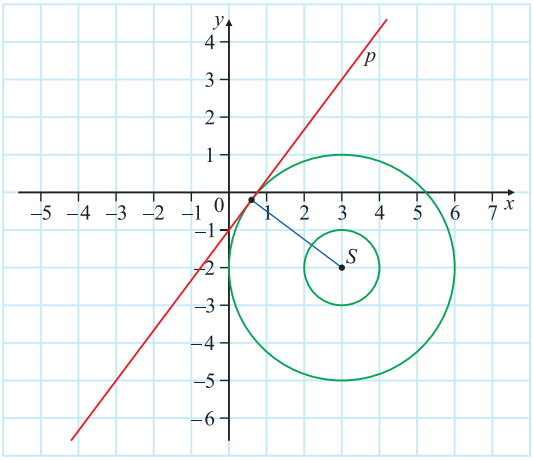
$(x^2 - 6x + 3^2 - 3^2) + (y^2 + 4y + 2^2 - 2^2) = 0$

$(x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad S(3, -2)$

Traženi polumjer jednak je udaljenosti središta S od pravca p.

Udaljenost točke $T_0(x_0, y_0)$ od pravca $Ax + By + C = 0$ računamo po formuli:

$$d(T_0, p) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$



Zapišimo pravac u implicitnom obliku $4x - 3y - 3 = 0$ i uvrstimo u formulu za udaljenost točke od pravca.

$$d(S, p) = \frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-2) - 3|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}} = \frac{|12 + 6 - 3|}{\sqrt{16 + 9}} = \frac{15}{5} = 3$$

Polumjer koncentrične kružnice je $r = 3$.

Primjer 13: Odredimo jednadžbe tangenti na kružnicu $x^2 + y^2 = 25$ paralelnih s pravcem $4x + 3y - 18 = 0$.

Rješenje: Tangente su paralelne s pravcem i imaju isti koeficijent smjera.

$$y = -\frac{4}{3}x + 6 \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{4}{3}$$

Iz uvjeta dodira pravca i kružnice $r^2 (k^2 + 1) = l^2$ odredit ćemo l.

$$25\left(\frac{16}{9} + 1\right) = l^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 = \frac{625}{9} \quad \Rightarrow \quad l = \pm\frac{25}{3}$$

Jednadžbe tangenti su $y = -\frac{4}{3}x + \frac{25}{3}$ i $y = -\frac{4}{3}x - \frac{25}{3}$.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2008.) Skicirajte skup točaka ravnine zadan jednadžbom $x^2 + y^2 + 6x - 8y + 9 = 0$.

2. (IK 2008.) Usporedno s pravcem $x - 2y + 8 = 0$ povučene su tangente na kružnicu $x^2 + (y - 1)^2 = 20$. Odredite njihove jednadžbe.

3. (NI 2008.) Zadana je kružnica $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = 17$.

a) Točka $A(2, y)$, $y > 0$ pripada kružnici. Odredite y.

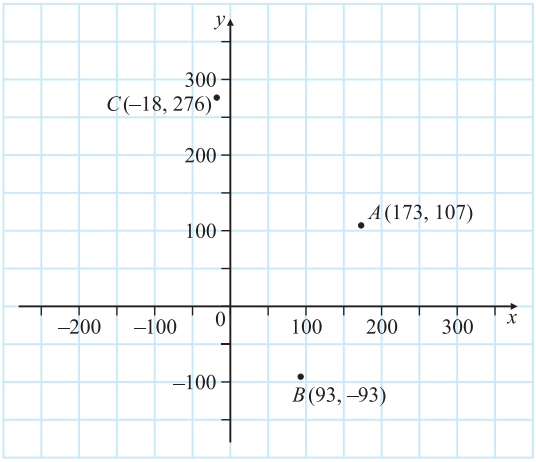
b) Odredite jednadžbu tangente na kružnicu u točki A.

4. (NI 2009.) Kružnica je zadana jednadžbom $(x+1)^2+(y-2)^2=25$.

a) Odredite točku $T(-1, y)$ zadane kružnice za koju je $y > 0$.

b) Odredite jednadžbu tangente u točki $A(2, 6)$.

5. (NI 2009.) U koordinatnome sustavu ucrtane su tri seizmološke stanice A, B i C koje su registrirale potres. Njihove koordinate zadane su u kilometrima. Epicentar potresa bio je na udaljenosti 193 km od stanice A, 137 km od stanice B i 265 km od stanice C. Odredite koordinate epicentra potresa.



6. (IK 2010.) Odredite središte S i polumjer kružnice r zadane jednadžbom $x^2+y^2+6x-8y+9=0$.

a) $S(3, -4)$, $r=4$

b) $S(-3, 4)$, $r=16$

c) $S(-3, 4)$, $r=4$

d) $S(3, -4)$, $r=16$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Jednadžba $x^2+y^2-4x+2y+6=0$ određuje kružnicu:

a) sa središtem $S(2, 1)$ i polumjerom $r=3$

b) sa središtem $S(-2, -1)$ i polumjerom $r=1$

c) sa središtem $S(1, 2)$ i polumjerom $r=2$

d) ne određuje kružnicu.

2. Jednadžba $x^2+y^2-2x+4y+1=0$ određuje kružnicu:

a) ne određuje kružnicu

b) sa središtem $S(1, -2)$ i polumjerom $r=1$

c) sa središtem $S(-1, 2)$ i polumjerom $r=2$

d) sa središtem $S(1, -2)$ i polumjerom $r=2$.

3. Jednadžba kružnice kojoj su točke $A(3, 2)$ i $B(-1, 6)$ krajevi jednog promjera je:

a) $(x-3)^2+(y-2)^2=6$ b) $(x-1)^2+(y-4)^2=8$
c) $(x-3)^2+(y+1)^2=8$ d) $(x-4)^2+(y-1)^2=6$.

4. Napišite jednadžbe tangenti na kružnicu $x^2+y^2=9$ paralelnih s pravcem $y=4$.

a) $y=3, y=-3$ b) Ne postoje takve tangente.
c) $y=9$ d) $y=2, y=-2$

5. Odredite jednadžbe tangenti na kružnicu $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ okomitih na pravac $y=-5$.

a) $y=-\frac{1}{2}$ b) Ne postoje takve tangente.
c) $x=3, x=-1$ d) $x=2, x=-2$

6. Pod kojim se kutom sijeku pravac $y=2x+5$ i kružnica $x^2+y^2-10=0$?

a) 35° b) 45° c) 55° d) 65°

7. Središte kružnice $S(-5, y)$ nalazi se u trećem kvadrantu. Kružnica dodiruje obje koordinatne osi. Kolika je duljina kraćeg luka kružnice između dirališta kružnice i koordinatnih osi?

a) 10π b) $\frac{5\pi}{2}$ c) $\frac{15\pi}{2}$ d) 3π

8. Oko središta kružnice $x^2+y^2-4x-4y-8=0$ opisana je kružnica čiji je polumjer za 1 veći od polumjera prve kružnice. Površina kružnog vijenca određenog tim kružnicama iznosi:

a) 3π b) 4π c) 6π d) 9π

9. Odredite polumjer kružnice koja prolazi točkom $D(1, 4)$, a koncentrična je kružnici $x^2+y^2+6x+2y+5=0$.

a) $\sqrt{41}$ b) $\sqrt{5}$ c) $\sqrt{37}$ d) 5

10. Kolika je udaljenost točke $H(5, 6)$ od kružnice $x^2+y^2-4x-4y+4=0$?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5

11. Iz ishodišta koordinatnog sustava povučene su tangente na kružnicu $x^2+y^2-16x-12y+90=0$. Kolika je udaljenost njihovih dirališta?

a) 2 b) 6 c) 24 d) 5

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite jednadžbu kružnice koja prolazi zadanim točkama:
a) $A(2, 8)$, $B(7, 3)$ i $C(6, 6)$
b) $A(0, 2)$, $B(1, 1)$ i $C(2, -2)$.

2. Odredite jednadžbu kružnice koja prolazi točkama $A(2, 3)$ i $B(5, 2)$, a središte joj leži na osi apscisa.

3. Napišite jednadžbu kružnice sa središtem u točki $S(6, 7)$ ako kružnica dira pravac $5x - 12y - 24 = 0$.

4. Odredite jednadžbu kružnice koja prolazi točkama $A(2, -3)$ i $B(-4, -1)$, a središte joj je na pravcu $x + 3y - 18 = 0$.

5. Odredite jednadžbu kružnice koja prolazi točkom $A(-1, 2)$ i dira obje koordinatne osi.

6. Napišite jednadžbu kružnice koja dodiruje os apscisa u ishodištu koordinatnog sustava i koja siječe os ordinata u točki $T(0, -4)$.

7. Napišite jednadžbu kružnice koja dodiruje os ordinata u točki $T(0, -5)$, a ima polumjer $r = 3$.

8. Kružnica se nalazi u trećem kvadrantu, središte joj je na pravcu $y = \frac{1}{3}x - 2$ i dira obje koordinatne osi. Odredite jednadžbu kružnice.

9. Odredite jednadžbu tangente na kružnicu $x^2 + y^2 = 5$ u njenoj točki $M(1, y < 0)$.

10. Odredite jednadžbu tangente na kružnicu $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$ u diralištu $D(1, -1)$.

11. Odredite jednadžbe tangenti povučenih iz točke $N(2, 7)$ na kružnicu $(x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 20$. Koje su koordinate dirališta? Pod kojim se kutom vidi kružnica iz točke N?

12. U kakvom su položaju točke $D(2, 7)$, $E(-4, 6)$, $F(3, -1)$ i $G(-2, 3)$ u odnosu na kružnicu $(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 25$?

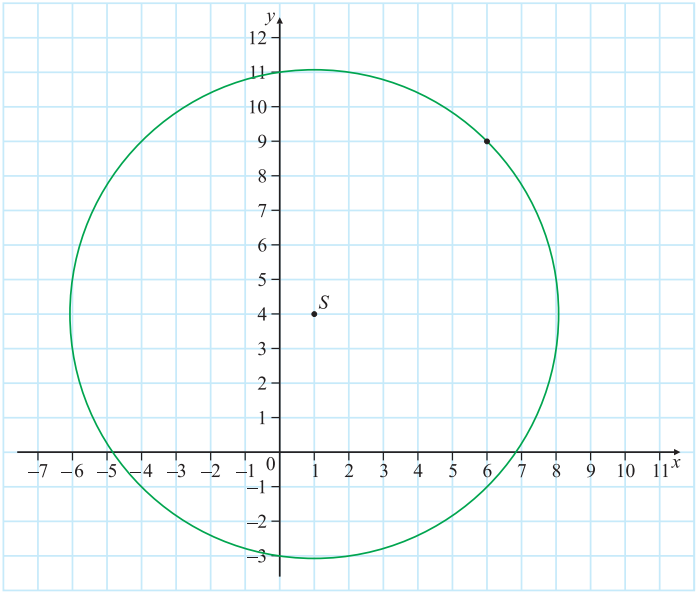
13. Pravac i kružnica mogu se sjeći najviše u _____ točke. Ako se sijeku u jednoj točki, onda taj pravac nazivamo

_____ .

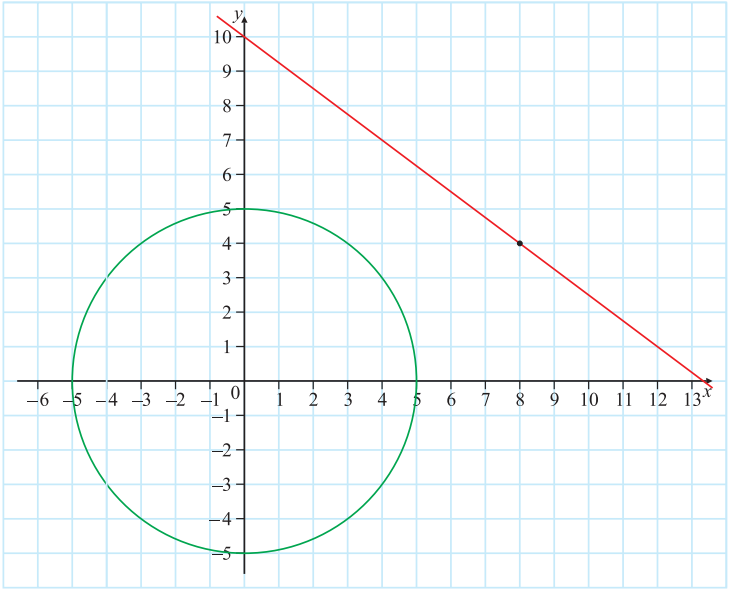
14. Koliki je polumjer kružnice sa središtem $S(4, -4)$ koja dodiruje obje koordinatne osi?

15. Odredite opseg kružnice $(x-5)^2+\left(y+\frac{3}{7}\right)^2=16$.

16. Odredite jednadžbu kružnice sa slike.



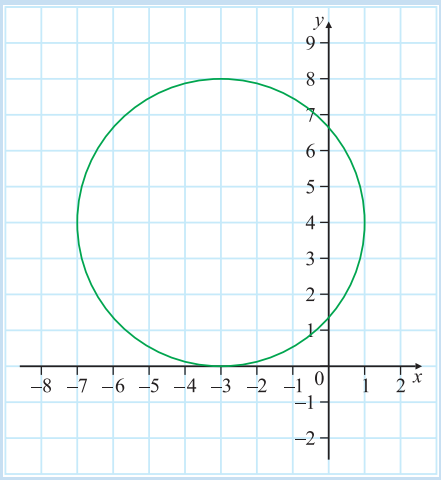
17. Na slici su kružnica i pravac.
a) Odredite jednadžbu kružnice.
b) Odredite jednadžbu pravca.
c) Odredite koordinate točke na kružnici koja je najbliža pravcu.
d) Koliko je pravac udaljen od kružnice?



RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1.



2. $y=\frac{1}{2}x-4,\ \ y=\frac{1}{2}x+6$

3. a) $A(2,\,1)$ b) $x+4y-6=0$

4. a) $T(-1,\,7)$ b) $3x+4y-30=0$

5. (5, 12) **6.** c

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** d **3.** b **4.** a
5. c **6.** b **7.** b **8.** d
9. a **10.** b **11.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. a) $(x-2)^2+(y-3)^2=25$, b) $(x+3)^2+(y+2)^2=25$

2. $\left(x-\frac{8}{3}\right)^2+y^2=\frac{85}{9}$ **3.** $(x-6)^2+(y-7)^2=36$

4. $x^2+y^2-3x-11y-40=0$ **5.** $(x+1)^2+(y-1)^2=1$, $(x+5)^2+(y-5)^2=25$

6. $x^2+(y+2)^2=4$ **7.** $(x+3)^2+(y+5)^2=9$, $(x-3)^2+(y+5)^2=9$

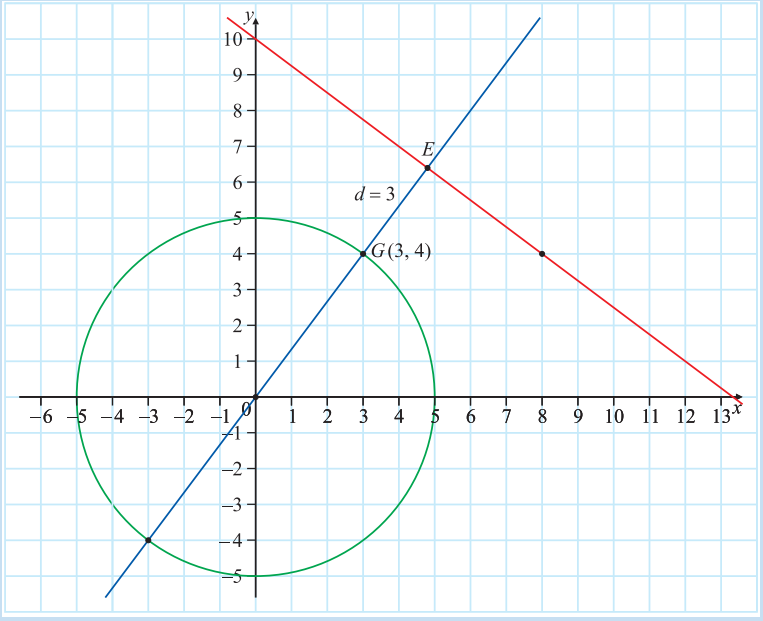
8. $(x+3)^2+(y+3)^2=9$ **9.** $x-2y-5=0$ **10.** $x-2y-3=0$

11. Tangente su $2x-y+3=0$ i $2x+y-11=0$, dirališta $D_1(-2,-1)$ i $D_1(6,-1)$, a $\varphi=53°\,7'\,49''$

12. Točke E i F leže na kružnici, točka G je unutar kružnice, a točka D izvan kružnice.

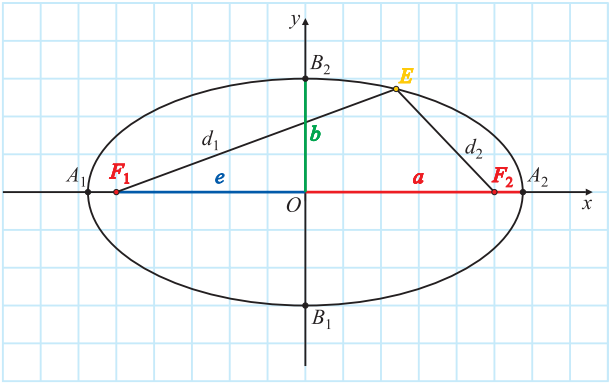
13. dvije točke, tangenta na kružnicu **14.** $r=4$ **15.** $O=8\pi$

16. $(x-1)^2+(y-4)^2=50$ **17.** a) $x^2+y^2=25$ b) $y=-\frac{3}{4}x+10$ c) (3, 4) d) $d=3$



5.4.2. Elipsa

Elipsa je skup svih točaka u ravnini za koje je zbroj udaljenosti od dviju fiksnih točaka (F_1 i F_2) konstantna veličina i iznosi $2a$.



$$d_1 + d_2 = 2a$$

F_1, F_2 ... fokusi (žarišta) elipse

a ... velika poluos elipse

b ... mala poluos elipse

e ... linearni ekscentricitet

Vrhovi (tjemena) elipse su u točkama $(\pm a, 0)$ i $(0, \pm b)$.

Polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ je središte (centar) elipse (središte elipse je u ishodištu, a osi elipse se podudaraju s koordinatnim osima).

Ukoliko je $a > b$ onda su fokusi na osi apscisa.

Osna ili kanonska jednadžba elipse

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jednadžba tangente u točki elipse $D_1(x_1, y_1)$

$$b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$$

Uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2k^2 + b^2 = l^2$$

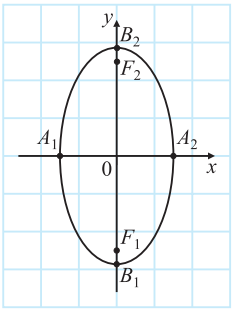
Koordinate dirališta $D\left(\frac{-a^2k}{l}, \frac{b^2}{l}\right)$

Linearni ekscentricitet

$$e = \frac{1}{2}|F_1, F_2|, \text{ odnosno } e = \sqrt{a^2 - b^2}$$

Koordinate fokusa $F_1(-e, 0), F_2(e, 0)$

Numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{e}{a}, \quad 0 \le \varepsilon < 1$



Ako je $a < b$ onda su fokusi na osi ordinata.

Osna ili kanonska jednadžba elipse je

$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ili $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Linearni ekscentricitet $e = \frac{1}{2}|F_1, F_2|$ odnosno

$e = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Koordinate fokusa su $F_1(0, -e)$, $F_2(0, e)$.

Primjer 1: Odredimo veliku i malu poluos elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, linearni i numerički ekscentricitet te koordinate fokusa.

Rješenje: Iz jednadžbe elipse vidi se da je:

$a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$ ... velika poluos

$b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3$ ... mala poluos

Linearni ekscentricitet je $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

$\Rightarrow$ fokusi su: $F_1\left(-\sqrt{7}, 0\right)$, $F_2\left(\sqrt{7}, 0\right)$.

Numerički ekscentricitet je $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$.

Primjer 2: Odredimo veliku i malu poluos elipse $18x^2 + 50y^2 = 450$, linearni ekscentricitet i koordinate fokusa.

Rješenje: Iz osne jednadžbe elipse $18x^2 + 50y^2 = 450$ slijedi:

$18x^2 + 50y^2 = 450 \,/ : 450$

$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad a = 5$

$\Rightarrow \quad b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad b = 3.$

Linearni ekscentricitet je $e = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4.$

Fokusi su $F_1(-4, 0)$, $F_2(4, 0)$.

Primjer 3: Odredimo veliku i malu poluos elipse $25x^2 + 16y^2 - 400 = 0$, linearni ekscentricitet i koordinate fokusa.

Rješenje: Zapišimo jednadžbu u kanonskom obliku.

$25x^2 + 16y^2 - 400 = 400 \,/ : 400$

$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad a = 4$

$\Rightarrow \quad b^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad b = 5$

Uočavamo da je $a < b$. Velika poluos je b i fokusi su na osi ordinata.

Linearni ekscentricitet je $e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 16} = 3.$

Fokusi su $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$.

Primjer 4: Zadana je elipsa $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$. Koja je od točaka na elipsi?

a) $A(-3, 5)$ b) $B(-5, -6)$ c) $C(-6, 0)$
d) $D(6, 5)$ e) $E(2, 2)$

Rješenje: Uvrštavanjem koordinata točaka u jednadžbu elipse $25x^2 + 36y^2 = 900$ dobiva se:

$A(-3, 5) \Rightarrow 25 \cdot 9 + 36 \cdot 25 > 900$
$\Rightarrow$ točka A je izvan elipse

$B(-5, -6) \Rightarrow 25 \cdot 25 + 36 \cdot 36 > 900$
$\Rightarrow$ točka B je izvan elipse

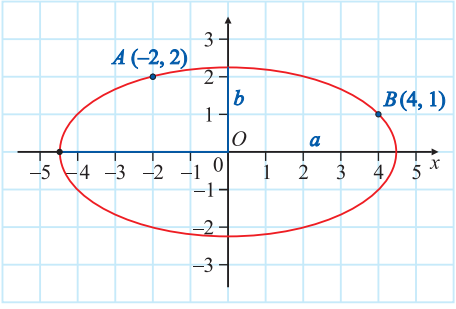
$C(-6, 0) \Rightarrow 25 \cdot 36 + 36 \cdot 0 = 900$
$\Rightarrow$ **točka C je na elipsi**

$D(6, 5) \Rightarrow 25 \cdot 36 + 36 \cdot 25 > 900$
$\Rightarrow$ točka D je izvan elipse

$E(2, 2) \Rightarrow 25 \cdot 4 + 36 \cdot 4 < 900$
$\Rightarrow$ točka E je unutar elipse.

Primjer 5: Odredimo jednadžbu elipse koja prolazi točkama $A(-2, 2)$ i $B(4, -1)$.

Rješenje: Točke $A(-2, 2)$ i $B(4, -1)$ pripadaju elipsi te njihove koordinate zadovoljavaju jednadžbu elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$.



Uvrštavanjem koordinata u jednadžbu dobivamo sustav:

$$\begin{cases} 4b^2 + 4a^2 = a^2b^2 \\ 16b^2 + a^2 = a^2b^2. \end{cases}$$

Rješavanjem ovog sustava dobije se $a^2 = 4b^2$.
Uvrštavanjem u jednu od jednadžbi sustava (prvu) slijedi:

$4b^2 + 4 \cdot 4b^2 = 4b^2 \cdot b^2$

$20b^2 = 4b^4 \,/ : 4b^2$

$b^2 = 5.$

Iz $a^2 = 4b^2$ slijedi $a^2 = 20$.

Jednadžba elipse je: $5x^2 + 20y^2 = 100 \,/ : 5$

$x^2 + 4y^2 = 20.$

Primjer 6: Napišimo jednadžbu elipse ako je velika poluos $a = 2$, a numerički ekscentricitet $\varepsilon = \sqrt{\frac{5}{6}}$.

Rješenje: Uvrstimo u formulu za numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{e}{a}$ zadane vrijednosti.

$$\frac{e}{2} = \sqrt{\frac{5}{6}} \Big/ {}^2$$

$$e^2 = \frac{10}{3} \quad \Rightarrow \quad e = \sqrt{\frac{10}{3}}$$

Iz formule za linearni ekscentricitet $e = \sqrt{a^2 - b^2}$ slijedi:

$$\sqrt{2^2 - b^2} = \sqrt{\frac{10}{3}} \Big/ {}^2$$

$$b^2 = 4 - \frac{10}{3} = \frac{12 - 10}{3} = \frac{2}{3}.$$

Jednadžba elipse je:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{\frac{2}{3}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{4} + \frac{3y^2}{2} = 1 \Big/ \cdot 4 \quad \Rightarrow \quad x^2 + 6y^2 = 4.$$

Primjer 7: Odredimo jednadžbu tangente elipse $x^2 + 4y^2 - 25 = 0$ u točki $D(-3, 2)$.

Rješenje: Odredimo veliku i malu poluos iz jednadžbe elipse.

$$x^2 + 4y^2 = 25 \Big/ : 25$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{\frac{25}{4}} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25, \quad b^2 = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \quad a = 5, \quad b = \frac{5}{2}$$

Jednadžba tangente u točki elipse je:

$$b^2 x_1 x + a^2 y_1 y = a^2 b^2$$

$$\frac{25}{4}(-3)x + 25 \cdot 2y = 25 \Big/ \cdot \frac{25}{4}$$

$$3x - 8y + 25 = 0.$$

Primjer 8: Odredimo jednadžbe tangenti na elipsu $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$ koje su paralelne s pravcem $-4x + 5y - 7 = 0$.

Rješenje: Odredimo malu i veliku poluos elipse.

$$9x^2 + 25y^2 = 225 \Big/ : 225$$

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 25, \ b^2 = 9$$

$$\Rightarrow \quad a = 5, \quad b = 3$$

Tangenta i zadani pravac imaju isti koeficijent smjera jer su paralelni.

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{7}{5} \quad \Rightarrow \quad k = \frac{4}{5}$$

Uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ je $a^2k^2 + b^2 = l^2$.

$$25\left(\frac{4}{5}\right)^2 + 9 = l^2$$

$$l^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad l = \pm 5$$

Jednadžbe tangenti su: $y = \frac{4}{5}x + 5$ i $y = \frac{4}{5}x - 5$.

Primjer 9: Izračunajmo površinu trokuta kojeg s koordinatnim osima zatvara normala na elipsu $4x^2 + 9y^2 = 900$ u njenoj točki $D(-9, y < 0)$. (Prisjetimo se, normala je pravac koji prolazi središtem krivulje i diralištem tangente.)

Rješenje: Odredimo poluosi elipse.

$$4x^2 + 9y^2 = 900 \,/ : 900$$

$$\frac{x^2}{225} + \frac{y^2}{100} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 225,\ a = 15 \text{ i } b^2 = 100,\ b = 10$$

Izračunajmo ordinatu točke D.

$$4(-9)^2 + 9y^2 = 900 \quad \Rightarrow \quad y^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad y = \pm 8 \quad \Rightarrow \quad D(-9, -8)$$

Tangenta u točki $D_1(x_1, y_1)$ je $b^2x_1x + a^2y_1y = a^2b^2$.

$$100(-9)x + 225(-8)y = 22\,500$$

$$-900x - 1\,800y = 22\,500 \,/ : 300$$

$$y = -\frac{1}{2}x - \frac{25}{2}$$

Koeficijent smjera normale je $k_n = -\frac{1}{-\frac{1}{2}} = 2$, a normala prolazi točkom $D(-9, -8)$.

Njena jednadžba je $y + 8 = 2(x + 9) \quad \Rightarrow \quad y = 2x + 10$.
Normala presijeca koordinatne osi u točkama $(0, 10)$ i $(-5, 0)$.

Površina trokuta je $P = \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$.

Središte elipse ne mora biti u ishodištu koordinatnog sustava. Ako je središte u $S(p, q)$, a osi su paralelne s koordinatnim osima, tada jednadžba elipse glasi

$$\frac{(x-p)^2}{a^2} + \frac{(y-q)^2}{b^2} = 1$$

ili u raspisanom obliku

$$Ax^2 + By^2 + Cx + Dy^2 + E = 0.$$

Primjer 10: Pomaknimo elipsu $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ tako da joj središte bude u $S(5,-3)$.

Rješenje: Očito je da će njena jednadžba glasiti

$\frac{(x-5)^2}{9}+\frac{(y+3)^2}{4}=1$, a fokusi će biti na pravcu paralelnom s osi x i do njihovih koordinata dolazimo istim pomakom (vektorom) kojim smo došli do novog središta.

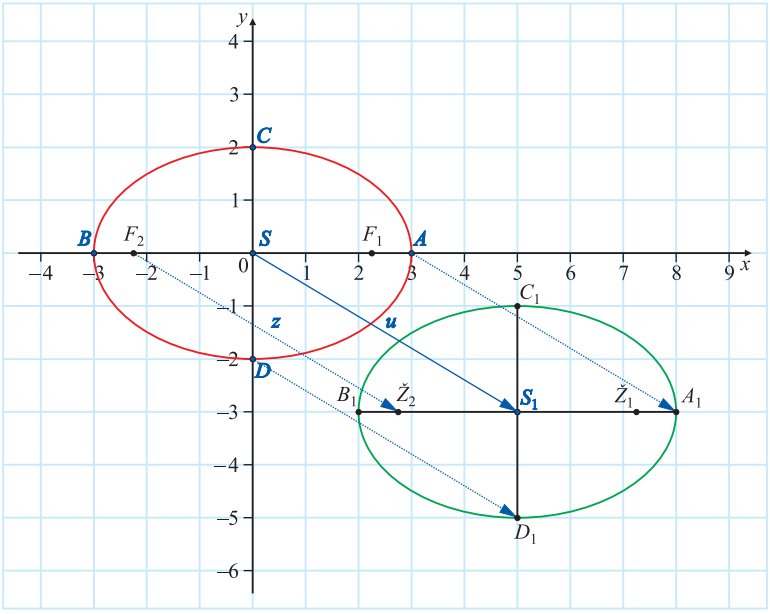
$\overrightarrow{SS_1}=(5-0)\vec{i}+(-3-0)\vec{j}=5\vec{i}-3\vec{j}$

$\overrightarrow{SS_1}=\overrightarrow{F_2\check{Z}_2} \Rightarrow \overrightarrow{F_2\check{Z}_2}=(x-(-2))\vec{i}+(y-0)\vec{j} \Rightarrow$

$x+2=5 \Rightarrow x=3$ i $y=-3$

$\check{Z}_2(3,-3)$

Sličnim načinom razmišljanja dolazimo i do ostalih podataka.



Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2008.) Skup točaka ravnine zadan je jednadžbom $9x^2 + 36y^2 - 225 = 0$.

a) Odredite duljinu velike poluosi.

b) Skicirajte zadani skup točaka.

2. (NI 2009.) Odredite fokuse elipse zadane jednadžbom $3x^2 + 8y^2 = 120$.

a) $F_1(-4, 0), F_2(4, 0)$ b) $F_1(-5, 0), F_2(5, 0)$

c) $F_1(0, -5), F_2(0, 5)$ d) $F_1(0, -4), F_2(0, 4)$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Zadana je elipsa $\frac{x^2}{48}+\frac{y^2}{36}=1$. Koja od točaka je na elipsi?

a) $A(-2, 5)$ b) $B(-5, -6)$ c) $C(-6, 0)$ d) $D(-6, -3)$

2. Ako je jedan fokus elipse $F_1\left(-2\sqrt{3}, 0\right)$ i $\varepsilon=\frac{\sqrt{3}}{3}$, tada je jednadžba elipse:

a) $3x^2+4y^2=9$ b) $3x^2+4y^2=144$
c) $4x^2+3y^2=9$ d) $2x^2+3y^2=72$.

3. Tangenta na elipsu $x^2+9y^2=9$ u točki s ordinatom 1, okomita je na pravac:

a) $y=-x$ b) $y=0$ c) $y=1-x$ d) $y=-1$.

4. Za koju vrijednost parametra $t \in \boldsymbol{R}$ pravac $y=tx$ siječe elipsu $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$ u dvije točke?

a) $t \in \{-5, 5\}$ b) $t \in \{-1, 1\}$
c) $t \in \boldsymbol{R}$ d) Ne postoji takav $t \in \boldsymbol{R}$.

5. Odredite parametar $a \in \boldsymbol{R}$ takav da pravac $x=a$ niti siječe niti dodiruje elipsu $10x^2+y^2=10$.

a) $a \in \boldsymbol{R}$ b) $a \in \langle -10, 10\rangle$
c) $a \in \langle -\infty, -1\rangle \cup \langle 1, +\infty\rangle$ d) $a \in \langle -1, 1\rangle$

6. Odredite jednadžbe tangenti na elipsu $4x^2+y^2=4$ okomitih na pravac $x=0$.

a) $y=2x,\ y=-2x$ b) $y=4,\ y=-4$
c) $y=2,\ y=-2$ d) $y=0$

7. Za koju je vrijednost parametra $k \in \boldsymbol{R}$ pravac $y=k$ tangenta na elipsu $x^2+4y^2=4$?

a) $k \in \{-1, 1\}$ b) $k \in \{-4, 4\}$ c) $k \in \{-2, 2\}$ d) $k=\frac{1}{4}$

8. Ako je pravac $x+y+4=0$ tangenta elipse $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, onda je a^2+b^2 jednako:

a) 2 b) 4 c) 8 d) 16.

9. Pravac $y=2x-14$ dodiruje elipsu $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ čiji je linearni ekscentricitet $e=2$. Koliko iznosi mala poluos elipse b?

a) 2 b) 3 c) 6 d) 8

10. Na elipsu $4x^2 + 3y^2 = 12$ povučena je tangenta u točki $T\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\right)$. Odredite površinu trokuta koji tangenta zatvara s koordinatnim osima.

a) $2\sqrt{3}$ b) $4\sqrt{6}$ c) $6\sqrt{6}$ d) $12\sqrt{6}$

11. Fokusi elipse nalaze se:

a) na elipsi b) izvan elipse c) unutar elipse d) bilo gdje.

12. Udaljenost jednog tjemena na maloj osi elipse do jednog fokusa je:

a) a b) b c) e d) $2a$.

13. Kut koji zatvaraju spojnice jednog fokusa elipse $x^2 + 4y^2 = 8$ s tjemenima elipse na osi y jednak je:

a) 30° b) 45° c) 75° d) 60°.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite veliku i malu poluos elipse $2x^2 + 3y^2 = 24$, linearni ekscentricitet i fokuse te skicirajte skup točaka zadan tom jednadžbom.

2. Odredite veliku i malu poluos elipse $5x^2 + 4y^2 - 180 = 0$, linearni ekscentricitet i fokuse te skicirajte skup točaka zadan tom jednadžbom.

3. Odredite jednadžbu elipse kojoj je $F_1(0, -5)$ i $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

4. Odredite jednadžbu elipse kojoj je $F_1(-4, 0)$ i $b = 3$.

5. Kakav je položaj točaka $E(3, 3)$ i $F(4, 3)$ prema elipsi $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$?

6. Odredite jednadžbu tangente elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ u točki elipse $D(2, -3)$.

7. Odredite jednadžbu tangente elipse $4x^2 + 25y^2 = 100$ u točki elipse $D\left(x < 0, \frac{8}{5}\right)$.

8. Nađite one točke na elipsi $\frac{x^2}{30} + \frac{y^2}{24} = 1$ koje su od male poluosi udaljene za 5.

9. Udaljenost između fokusa elipse jednaka je udaljenosti između tjemena na velikoj i maloj poluosi. Koliki je numerički ekscentricitet te elipse?

10. Iz točke $T(4, 3)$ povučene su tangente na elipsu $9x^2 + 16y^2 = 144$. Odredite udaljenost među diralištima.

11. Odredite jednadžbe tangenti na elipsu $3x^2 + 4y^2 = 48$ koje su paralelne s pravcem $x - 2y + 12 = 0$.

12. Odredite jednadžbe tangenti na elipsu $x^2 + 2y^2 = 4$ koje su okomite na pravac $x + 2y - 1 = 0$.

13. Izračunajte površinu trokuta kojeg s koordinatnim osima zatvara tangenta na elipsu $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{25} = 1$ u njenoj točki $M(x > 0, 3)$.

14. Izračunajte površinu kvadrata upisanog u elipsu $5x^2 + 3y^2 = 75$, tako da su mu dva vrha u vrhovima male osi, a preostala dva vrha na velikoj osi.

15. Napišite jednadžbu elipse kojoj je upisan jednakostraničan trokut površine $P = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ kojemu su dva vrha na osi x, a treći vrh na osi y.

16. Fokusi elipse su $F_1(4, 2)$, $F_2(4, -2)$ i ona prolazi ishodištem. Odredite jednadžbu elipse.

17. Središte elipse je $(5, 0)$ i elipsa dodiruje os ordinata. Odredite jednadžbu elipse, ako je $\varepsilon = 0.8$.

18. Što je velika os elipse? _____

_____ .

19. Što je linearni ekscentricitet? _____

_____ .

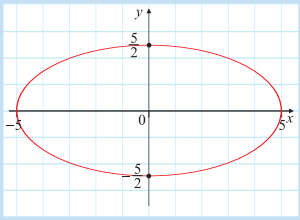
20. Odredite malu poluos elipse $4x^2 + 9y^2 = 36$.

21. Johannes Kepler otkrio je da je Zemljina orbita elipsa sa Suncem u jednom žarištu. Velika poluos duga je oko 149 597 871 km i numerički joj je ekscentricitet $\frac{1}{60}$.

a) Koja je najveća, odnosno najmanja udaljenost Zemlje od Sunca?
b) Koliko je od Sunca udaljen drugi fokus?
c) Kako glasi jednadžba elipse (orbite)?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a) $a = 5$ b) 

2. b)

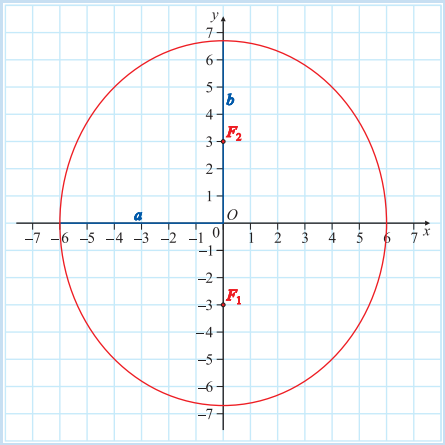
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

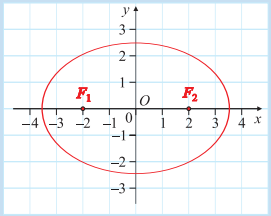
1. d **2.** d **3.** b **4.** c **5.** c **6.** c **7.** a **8.** d **9.** c **10.** a **11.** c **12.** a **13.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $a = 2\sqrt{3}$, $b = 2\sqrt{2}$, $e = 2$, $F_1(-2, 0)$, $F_2(2, 0)$

2. $a = 6$, $b = 3\sqrt{5}$, $e = 3$, $F_1(0, -3)$, $F_2(0, 3)$





3. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{125} = 1$ **4.** $9x^2 + 25y^2 = 225$ **5.** Točka E je unutar elipse, a točka F izvan elipse.

6. $x - 2y - 8 = 0$ **7.** $D\left(-3, \frac{8}{5}\right)$, $3x - 10y + 25 = 0$ **8.** $T(\pm 5, \pm 2)$

9. $\varepsilon = \frac{\sqrt{10}}{5}$ **10.** $d = 5$ **11.** $x - 2y + 8 = 0$, $x - 2y - 8 = 0$

12. $y = 2x + 3\sqrt{2}$, $y = 2x - 3\sqrt{2}$ **13.** $M(8, 3)$, $P = \frac{625}{12}$

14. $P = 30$ **15.** $\frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{9} = 1$ **16.** $\frac{(x-4)^2}{20} + \frac{(y-2)^2}{16} = 1$ **17.** $\frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

18. Velika os elipse je zbroj udaljenosti svake točke elipse do fokusa, tj. $d_1 + d_2 = 2a$.

19. Linearni ekscentricitet je polovina udaljenosti između fokusa, tj. $e = \frac{1}{2}|F_1, F_2|$. **20.** 2

21. a) Najmanja udaljenost je kad je Zemlja u tjemenu velike osi bližem fokusu u kojem se nalazi Sunce ($a - c$), a najveća kada se Zemlja nalazi u tjemenu velike osi daljem od fokusa u kojem se nalazi Sunce ($a + c$).

$e = 2\,493\,298$ km, $a - c = 149\,597\,871 - 2\,493\,298 = 147\,104\,573$ km

$a + c = 149\,597\,871 + 2\,493\,298 = 152\,091\,169$ km

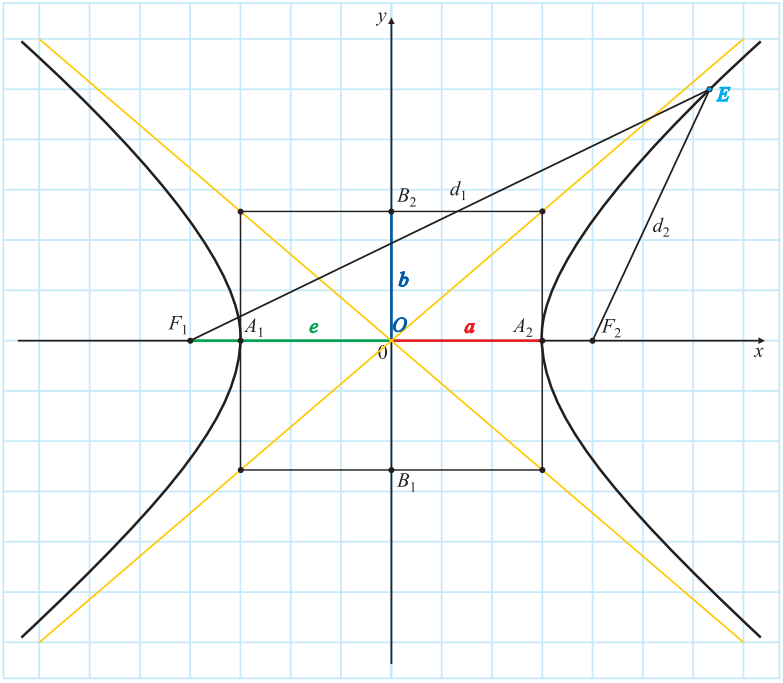
b) Udaljenost fokusa je $2e = 4\,986\,596$, no ako uračunamo da je polumjer Sunca oko 1 400 000 km, udaljenost površine Sunca do drugog fokusa je 3 586 596 km.

c) $\frac{x^2}{149\,597\,871} + \frac{y^2}{149\,577\,092} = 1$

5.4.3. Hiperbola

Hiperbola je skup svih točaka u ravnini za koje je apsolutna vrijednost razlike udaljenosti od dviju fiksnih točaka F_1 i F_2 konstantna veličina i iznosi $2a$.

$|d_1 - d_2| = 2a$



F_1, F_2 ... fokusi (žarišta) hiperbole

a ... realna poluos hiperbole

b ... imaginarna poluos hiperbole

e ... linearni ekscentricitet

Vrhovi (tjemena) hiperbole su u točkama $A_1(-a, 0)$ i $A_2(a, 0)$.

Polovište O dužine $\overline{F_1F_2}$ je središte (centar) hiperbole (središte hiperbole je u ishodištu, a osi se podudaraju s koordinatnim osima).

Osna ili kanonska jednadžba hiperbole

$$b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2 \quad \text{ili} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Jednadžba tangente u točki hiperbole $D_1(x_1, y_1)$

$$b^2x_1x - a^2y_1y = a^2b^2$$

Uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$a^2k^2 - b^2 = l^2$$

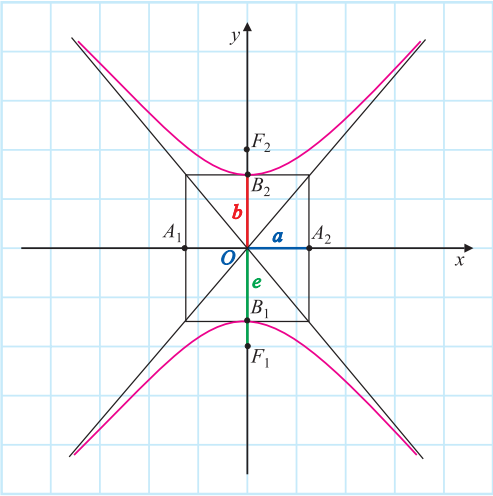
Koordinate dirališta $\quad D\left(\frac{-a^2k}{l}, -\frac{b^2}{l}\right)$

Linearni ekscentricitet $\quad e = \frac{1}{2}|F_1, F_2| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Koordinate fokusa $F_1(-e, 0), F_2(e, 0).$

Numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{e}{a}, \quad \varepsilon > 1$

Asimptote hiperbole $y = \pm \frac{b}{a} x$



Ako je jednadžba hiperbole $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$

onda je a njena imaginarna poluos, a b realna poluos.

Fokusi su na realnoj poluosi b (na osi ordinata): $F_1(0, -e), F_2(0, e).$

Primjer 1: Odredimo poluosi hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 36,$ linearni i numerički ekscentricitet, koordinate fokusa i jednadžbe asimptota.

Rješenje: Zapišimo jednadžbu hiperbole drugačije

$$9x^2 - 16y^2 = 36 \,/ : 36$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 4 \quad \Rightarrow \quad a = 2 \text{ i } b^2 = \frac{9}{4} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{3}{2}$$

Linearni ekscentricitet je $e = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2},$

a numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{e}{a} = \frac{\frac{5}{2}}{2} = \frac{5}{4}.$

Fokusi su $F_1\left(-\frac{5}{2}, 0\right), \; F_2\left(\frac{5}{2}, 0\right),$ a asimptote

$$y = \pm \frac{b}{a} x \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{\frac{3}{2}}{2} x \quad \Rightarrow \quad y = \pm \frac{3}{4} x.$$

Primjer 2: Napišimo jednadžbu hiperbole ako je realna poluos $a = 3$ i numerički ekscentricitet $\varepsilon = \frac{5}{3}.$

Rješenje: Iz formule za numerički ekscentricitet slijedi:

$$\frac{e}{3} = \frac{5}{3} \quad \Rightarrow \quad e = 5.$$

Nadalje, $e^2 = a^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad 5^2 = 3^2 + b^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 16, \; b = 4.$

Jednadžba hiperbole je $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1.$

Primjer 3: Odredimo jednadžbu hiperbole koja prolazi točkom $H\left(1, \sqrt{3}\right)$ i ima asimptote $y = \pm 3x$. Središte hiperbole je u ishodištu, a fokusi su na osi apscisa.

Rješenje: Uvrstimo koordinate točke $H\left(1, \sqrt{3}\right)$ u jednadžbu hiperbole.

$$\frac{1}{a^2} - \frac{3}{b^2} = 1 \,/ \cdot a^2 b^2$$

$$b^2 - 3a^2 = a^2 b^2$$

Iz jednadžbi asimptota $y = \pm \frac{b}{a} x$ dobivamo

$$\pm \frac{b}{a} x = \pm 3x \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = 3 \quad \Rightarrow b = 3a.$$

Uvrštavanjem u $b^2 - 3a^2 = a^2 b^2$ imamo

$$(3a)^2 - 3a^2 = a^2 (3a)^2$$

$$6a^2 = 9a^4 \,/ : 3a^2$$

$$a^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow \quad b^2 = 9a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 9 \cdot \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad b^2 = 6.$$

Jednadžba hiperbole je $\frac{x^2}{\frac{2}{3}} - \frac{y^2}{6} = 1$ ili $9x^2 - y^2 = 6$.

Primjer 4: Odredimo jednadžbu hiperbole koja prolazi točkom $P(2, 3)$, a njezina asimptota s pozitivnim dijelom x-osi zatvara kut $60°$. Središte hiperbole je u ishodištu, a fokusi su na osi apscisa.

Rješenje: Uvrstimo koordinate točke $P(2, 3)$ u jednadžbu hiperbole.

$$\frac{4}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \,/ \cdot a^2 b^2$$

$$4b^2 - 9a^2 = a^2 b^2$$

Koeficijent smjera asimptote je $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{b}{a}$.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg} 60° = \frac{b}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{b}{a} = \sqrt{3} \,/^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 3a^2$$

Uvrštavanjem u $4b^2 - 9a^2 = a^2 b^2$ imamo:

$$4 \cdot 3a^2 - 9a^2 = a^2 \cdot 3a^2$$

$$3a^2 = 3a^4 \,/ : 3a^2$$

$$a^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad b^2 = 3.$$

Jednadžba hiperbole je $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{3} = 1$ ili $3x^2 - y^2 = 3$.

Primjer 5: Izračunajmo udaljenost fokusa hiperbole $\frac{x^2}{12} - \frac{y^2}{16} = 1$ od njene asimptote.

Rješenje: Odredimo poluosi hiperbole i linearni ekscentricitet.

$$a^2 = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{3}$$

$$b^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad b = 4$$

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{12 + 16} = \sqrt{28} = 2\sqrt{7}$$

Fokusi su $F_1\left(-2\sqrt{7}, 0\right)$, $F_2\left(2\sqrt{7}, 0\right)$.

Asimptota je $y = \frac{b}{a}x \Rightarrow \quad y = \frac{4}{2\sqrt{3}}x \quad \Rightarrow \quad y = \frac{2}{\sqrt{3}}x$

$$\Rightarrow \quad 2x - \sqrt{3}y = 0.$$

Udaljenost fokusa $F_2\left(2\sqrt{7}, 0\right)$ od asimptote $2x - \sqrt{3}y = 0$ je

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{\left|2 \cdot 2\sqrt{7} - 0 \cdot \sqrt{3} + 0\right|}{\sqrt{2^2 + \left(-\sqrt{3}\right)^2}} =$$

$$= \frac{\left|4\sqrt{7}\right|}{\sqrt{4+3}} = \frac{4\sqrt{7}}{\sqrt{7}} = 4.$$

Primjer 6: Odredimo jednadžbe tangenti na hiperbolu $x^2 - 4y^2 = 20$ koje su okomite na pravac $4x + 3y - 7 = 0$.

Rješenje: Iz jednadžbe pravca odredimo koeficijent smjera pravca.

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{7}{3} \quad \Rightarrow \quad k = -\frac{4}{3}$$

Tangenta je okomita na zadani pravac pa je koeficijent smjera tangente:

$$k_1 = -\frac{1}{k} = -\frac{1}{-\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}.$$

Iz jednadžbe hiperbole odredimo poluosi.

$$\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1 \Rightarrow \quad a^2 = 20 \quad \Rightarrow \quad a = 2\sqrt{5}$$

$$\Rightarrow \quad b^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad b = \sqrt{5}$$

Iz uvjeta dodira pravca i hiperbole slijedi:

$$20\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 5 = l^2 \quad \Rightarrow \quad l^2 = 20 \cdot \frac{9}{16} - 5 = \frac{45}{4} - 5 = \frac{45-20}{4} = \frac{25}{4}$$

$$\Rightarrow \quad l = \pm\frac{5}{2}.$$

Jednadžbe tangenti su $y = \frac{3}{4}x + \frac{5}{2}$ i $y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{2}$.

Primjer 7: Odredimo jednadžbe tangenti povučenih iz točke $P(0, 3)$ na hiperbolu $x^2 - y^2 = 9$.

Rješenje: Odredimo poluosi hiperbole.

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1 \quad \Rightarrow \quad a^2 = b^2 = 9 \quad \Rightarrow \quad a = b = 3$$

Uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i hiperbole $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ je $a^2k^2 - b^2 = l^2$.

Tangente prolaze točkom $P(0, 3) \Rightarrow 3 = k \cdot 0 + l \Rightarrow l = 3$.

Iz uvjeta dodira slijedi:

$9k^2 - 9 = 3^2 \quad \Rightarrow \quad 9k^2 = 18 \quad \Rightarrow \quad k^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad k = \pm\sqrt{2}.$

Jednadžbe tangenti su $y = \sqrt{2}x + 3$ i $y = -\sqrt{2}x + 3$.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (NI 2008.) Asimptota hiperbole je pravac $y = 2x$. Na hiperboli je točka (5, 8). Jednadžba hiperbole je:

a) $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{36} = 1$ c) $\frac{x^2}{6} - \frac{y^2}{3} = 1$ d) $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{6} = 1$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Napišite jednadžbu hiperbole kojoj su fokusi na osi apscisa i međusobno su udaljeni 10, a udaljenost između tjemena je 8.

a) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ b) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ c) $\frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{16} = 1$ d) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

2. Odredite jednadžbu hiperbole kojoj je jedan fokus $F(-5, 0)$, a asimptote su $y = \pm 2x$.

a) $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ b) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ c) $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{20} = 1$ d) $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$

3. Odredite jednadžbe tangenti na hiperbolu $x^2 - 4y^2 = 20$, paralelnih s pravcem $y = 0$.

a) Ne postoje takve tangente. b) $y = 1, \quad y = -1$
c) $y = x, \quad y = -x$ d) $y = x + 1, \quad y = -x + 1$

4. Za koju vrijednost parametra $t \in \boldsymbol{R}$ pravac $y = tx$ siječe hiperbolu $\frac{x^2}{20} - \frac{y^2}{5} = 1$ u dvije točke?

a) $t \in \boldsymbol{R}$ b) Ne postoji takav $t \in \boldsymbol{R}$.
c) $t = \frac{1}{2}$ d) $t \in \left\langle -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\rangle$

5. Površina trokuta kojeg zatvaraju asimptote hiperbole $x^2 - y^2 = 1$ i pravac $y = 3$ iznosi:

a) 3 b) 12 c) 9 d) 24.

6. Koliki kut zatvaraju asimptota hiperbole $3x^2 - y^2 = 3$ koja prolazi prvim kvadrantom i tangenta na tu hiperbolu u točki $A(2, 3)$?

a) 15° 40' b) 6° 5' c) 12° 14' d) 3° 26'

7. Kolika je udaljenost fokusa hiperbole $x^2 - 4y^2 = 9$ od njene asimptote?

a) 1.2 b) 1.3 c) 1.4 d) 1.5

8. Zaokružite točnu tvrdnju za hiperbolu $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

a) $a > e$ b) $b > e$ c) $a = e$ d) $a < e$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite jednadžbu hiperbole ako je zadano:

a) $a = 7$ i $e = \sqrt{65}$

b) $b = 3$ i $e = \sqrt{17}$.

2. Odredite jednadžbu hiperbole kojoj su asimptote $y = \pm\frac{3}{4}x$, a udaljenost između fokusa 10.

3. Provjerite leži li točka $E\left(4, -3\sqrt{3}\right)$ na hiperboli $9x^2 - 4y^2 = 36$.

4. Odredite koordinate točke $A\left(x < 0, \frac{3}{2}\right)$ ako je ona na hiperboli $x^2 - 4y^2 = 16$.

5. Odredimo poluosi hiperbole $9x^2 - 8y^2 = 144$, linearni i numerički ekscentricitet, koordinate fokusa i jednadžbe asimptota.

6. Kolika je udaljenost točaka u kojima pravac $y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$ siječe hiperbolu $\frac{x^2}{2} - y^2 = 1$?

7. Odredite jednadžbu tangente hiperbole $x^2 - 2y^2 = 2$ u točki $D(2, y > 0)$.

8. Odredite jednadžbu tangente hiperbole $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{4} = 1$ u točki $D(x > 0, 2)$.

9. Odredite jednadžbe tangenti povučenih iz točke $P(-3, 5)$ na hiperbolu $3x^2 - y^2 = 3$.

10. Što je asimptota? _____

_____

11. Kolika je realna os hiperbole $2x^2 - 9y^2 = 18$?

12. Kolika je površina trokuta što ga zatvaraju tangenta u točki hiperbole $D\left(\frac{25}{3}, 4\right)$ i asimptote hiperbole $9x^2 - 25y^2 = 225$?

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. b

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** c **3.** a **4.** d **5.** c **6.** d **7.** d **8.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. a) $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$ b) $\frac{x^2}{8}-\frac{y^2}{9}=1$ **2.** $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ **3.** Da. **4.** $A\left(-5, \frac{3}{2}\right)$

5. $a=4$, $b=3\sqrt{2}$, $e=\sqrt{34}$, $F\left(\pm\sqrt{34}, 0\right)$, $\varepsilon=\frac{\sqrt{34}}{4}$, $y=\pm\frac{3\sqrt{2}}{4}x$ **6.** $d=10$

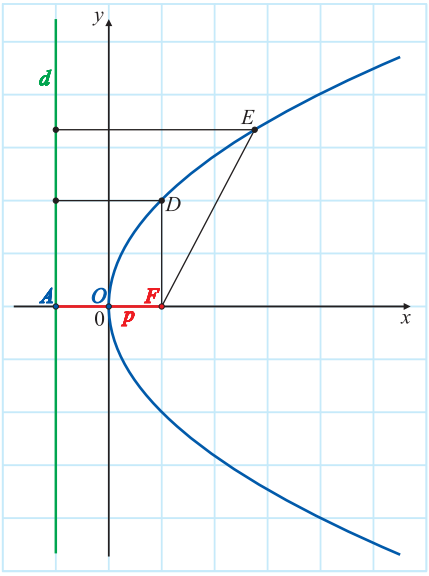
7. $D(2, 1)$, $x-y-1=0$ **8.** $D(4, 2)$, $x-y-2=0$ **9.** $2x-y+1=0$, $7x+4y+1=0$

10. Asimptota je pravac koji prolazi ishodištem koordinatnog sustava, a hiperbola mu se približava u beskonačnosti.

11. 6 **12.** 15

5.4.4. Parabola

Parabola je skup svih točaka u ravnini koje su jednako udaljene od neke čvrste točke (fokusa F) i od čvrstog pravca (ravnalice d), $\overline{OA} = \overline{OF} = \frac{p}{2}$.



Jednadžba parabole s tjemenom u ishodištu

$$y^2 = 2px$$

Pravac d je ravnalica ili direktrisa, $x = -\frac{p}{2}$.

Udaljenost p od fokusa do ravnalice je poluparametar parabole, $p = |AF|$.

Točka F je fokus ili žarište parabole, $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$.

Jednadžba tangente u točki parabole $D_1(x_1, y_1)$

$$y_1 y = p(x + x_1)$$

Uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i parabole $y^2 = 2px$

$$p = 2kl$$

Koordinate dirališta su $D\left(\frac{l}{k}, 2l\right)$.

Primjer 1: Odredimo koordinate fokusa i jednadžbu ravnalice parabole $y^2 = 20x$.

Rješenje: Iz jednadžbe parabole $y^2 = 2px$ slijedi:

$2px = 20x \quad \Rightarrow \quad 2p = 20 \quad \Rightarrow \quad p = 10.$

Fokus je $F\left(\frac{p}{2}, 0\right) = (5, 0)$.

Ravnalica je $x = -\frac{10}{2} \quad \Rightarrow \quad x = -5.$

Primjer 2: Odredimo jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 12x$ koja s pozitivnim dijelom osi apscisa zatvara kut 60°.

Rješenje: Koeficijent smjera tangente $k = \operatorname{tg} 60° \quad \Rightarrow \quad k = \sqrt{3}$.

$2px = 12x \quad \Rightarrow \quad 2p = 12 \quad \Rightarrow \quad p = 6.$

Iz uvjeta dodira pravca $y = kx + l$ i parabole $y^2 = 12x$ slijedi:

$p = 2kl \quad \Rightarrow \quad 6 = 2\sqrt{3}l \quad \Rightarrow \quad l = \frac{3}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad l = \sqrt{3}.$

Jednadžba tangente je $y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}$.

Primjer 3: Odredimo udaljenost pravca $y = -\frac{4}{3}x + 6$ od tjemena parabole $y = x^2 - 4x + 14$.

Rješenje: Zapišimo jednadžbu pravca u implicitnom obliku
$4x + 3y - 18 = 0$.
Odredimo tjeme parabole.

$$T\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{4 \cdot 1 \cdot 14 - 4^2}{4}\right) = (2, 10)$$

Udaljenost tjemena od pravca

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|4 \cdot 2 + 3 \cdot 10 - 18|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{|8 + 30 - 18|}{\sqrt{25}} = \frac{20}{5} = 4.$$

Ako je tjeme parabole u $V(x_0, y_0)$, a os simetrije paralelna s apscisom, tada jednadžba parabole glasi

$$(y - y_0)^2 = 2p(x - x_0)$$

ili u raspisanom obliku $Ax + By^2 + Cx + Dy + E = 0$.

Primjer 4: Pomaknimo parabolu $y^2 = 4x$ tako da joj tjeme bude u $V_1(5, -3)$.

Rješenje: Očito je da će njena jednadžba glasiti $(y + 3)^2 = 4(x - 5)$, a fokus će biti na pravcu paralelnom s osi x i do njegovih koordinata dolazimo istim pomakom (vektorom) kojim smo došli do novog tjemena.

$$\overrightarrow{VV_1} = (5 - 0)\vec{i} + (-3 - 0)\vec{j} = 5\vec{i} - 3\vec{j}$$

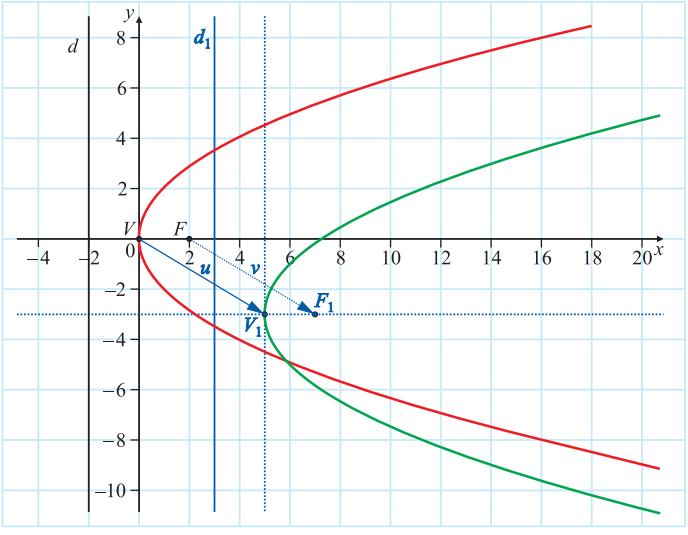
$$\overrightarrow{VV_1} = \overrightarrow{FF_1} \Rightarrow \overrightarrow{FF_1} = (x - (-2))\vec{i} + (y - 0)\vec{j} \Rightarrow$$

$$x + 2 = 5 \Rightarrow x = 3$$

$$y = -3$$

$$F_1(3, -3)$$

Ravnalica je pomaknuta za 5 jedinica udesno i njena jednadžba je $x = 3$.



Primjer 5: Odredimo jednadžbu parabole ako je tjeme $V(2, 3)$, a ravnalica $x = 0$.

Rješenje: Udaljenost tjemena i ravnalice je $\frac{p}{2} = 2 \Rightarrow p = 4$, te do jednadžbe dolazimo vrlo jednostavno: $(y-3)^2 = 8(x-2)$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Kako glasi jednadžba parabole kojoj je udaljenost fokusa i tjemena 6?

a) $y^2 = 6x$ b) $y^2 = 24x$ c) $y^2 = 12x$ d) $y^2 = 48x$

2. Odredite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 8x$, okomite na pravac $y = 2$.

a) $x = 0$
b) $x = 2$
c) $y = -\frac{1}{2}$
d) Ne postoji takva tangenta.

3. Odredite parametar $m \in \boldsymbol{R}$, takav da pravac $x = m$ ne siječe niti dodiruje parabolu $y^2 = 4x$.

a) $m \in \boldsymbol{R}$
b) Ne postoji takav $m \in \boldsymbol{R}$.
c) $m \in \langle -\infty, 0]$
d) $m \in \langle -\infty, 0\rangle$

4. Jednadžba tangente na parabolu $y^2 = 12x$ koja je paralelna s pravcem $x - y + 5 = 0$ glasi:

a) $-x + y - 2 = 0$
b) $x - y + 3 = 0$
c) $x - y - 1 = 0$
d) $-x + y - 4 = 0$.

5. Pravac $x - 2y + 8 = 0$ je tangenta parabole $y^2 = 8x$. Kolika je udaljenost između dirališta i fokusa parabole?

a) 2 b) 4 c) 6 d) 10

6. U parabolu $y^2 = 4x$ upisan je jednakostraničan trokut s jednim vrhom u ishodištu koordinatnog sustava. Kolika je stranica tog trokuta?

a) $8\sqrt{3}$ b) 8 c) $4\sqrt{3}$ d) 4

7. Ravnalica je pravac koji:

a) siječe parabolu u dvije točke
b) dodiruje parabolu u jednoj točki,
c) ne dodiruje parabolu
d) siječe parabolu u četiri točke.

8. Parabola:

a) ima dva fokusa
b) nema fokusa
c) ima jedan fokus
d) ima tri fokusa.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite koordinate fokusa i jednadžbu ravnalice parabole $y^2 = 18x$.

2. Koja se od točaka $E(2, 4)$, $F(3, 1)$ nalazi na paraboli $y^2 = 8x$?

3. Odredite najmanju udaljenost parabole $y^2 = 12x$ i pravca $x - y + 7 = 0$.

4. Tangenta na parabolu $y^2 = 12x$ paralelna je s pravcem $-x + y = 5$. Odredite koordinate dirališta tangente i parabole.

5. Odredite površinu trokuta kojeg s koordinatnim osima zatvara tangenta na parabolu $y^2 = 6x$ povučena u točki parabole $D(6, 6)$.

6. Odredite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 8x$ koja s pozitivnim dijelom osi apscisa zatvara kut 60°.

7. Odredite jednadžbu tangente na parabolu $y^2 = 4x$ u njenoj točki $B(9, 6)$.

8. Napišite jednadžbe tangenti na parabolu $y^2 = 24x$ povučene iz točke $G(3, 9)$.

9. Odredite koordinate fokusa parabole $y^2 = -4x$.

10. Kolika je udaljenost ravnalice i fokusa parabole $y^2 = -9x$?

11. Parabolična antena ima presjek širine 12 m i dubine je 2 m. Gdje bi trebao biti namješten prijemnik kako bi prijem bio najkvalitetniji?

RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. b **2.** a **3.** d **4.** b **5.** d **6.** a **7.** c **8.** c

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $F\left(\frac{9}{2}, 0\right)$, $x = -\frac{9}{2}$ **2.** Točka $E(2, 4)$ je na paraboli, a $F(3, 1)$ nije. **3.** $d = 2\sqrt{2}$

4. $D(3, 6)$ **5.** $P = 9$ **6.** $y = \sqrt{3}x + \frac{2\sqrt{3}}{3}$ **7.** $x - 3y + 9 = 0$

8. $x - y + 6 = 0$, $2x - y + 3 = 0$ **9.** $F(-1, 0)$ **10.** 4.5

11. Prijemnik bi trebao biti postavljen u fokus. Smjestit ćemo tjeme parabole u ishodište i pronaći ćemo koordinate fokusa. Jednadžba parabole je $y^2 = 2px$. Iz zadanih podataka vidimo da parabola prolazi kroz točku $(2, 6) \Rightarrow p = \frac{9}{2}$ i jednadžba parabole je $y^2 = 18x$. Fokus je $F\left(\frac{9}{4}, 0\right)$.

5.4.5. Krivulje drugog reda – dodatak

Primjer 1: Odredimo kakvi su skupovi točaka zadani sljedećim jednadžbama:
a) $x^2+y^2-6x+4y+8=0$
b) $2x^2+y^2-6x+4y+1=0$
c) $y^2-5x+4y+8=0$
d) $x^2+y^2-6x+4y+13=0$.

Rješenje: a) $x^2-6x+y^2+4y+8=0$
$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+8=0$
$(x-3)^2+(y+2)^2=5$
Kružnica sa središtem $S(3,-2)$ polumjera $\sqrt{5}$.

b) $2x^2-6x+y^2+4y+1=0$
$2\left(x^2-3x\right)+\left(y+2\right)^2-4+1=0$
$2\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right]+\left(y+2\right)^2-3=0$
$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{9}{2}+\left(y+2\right)^2=3$
$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y+2\right)^2=\frac{15}{2}\,/:\frac{15}{2}$
$$\frac{\left(x-\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{15}{4}}+\frac{(y+2)^2}{\frac{15}{2}}=1$$
Elipsa sa središtem $S\left(\frac{3}{2},-2\right)$, $a=\frac{\sqrt{15}}{2}$, $b=\sqrt{\frac{15}{2}}$.
$b>a \quad\Rightarrow\quad$ Fokusi su na pravcu $y=2$.

c) $y^2+4y-5x+8=0$
$\left(y+2\right)^2-4-5x+8=0$
$\left(y+2\right)^2=5x-4$
$\left(y+2\right)^2=5\left(x-\frac{4}{5}\right)$
Parabola s tjemenom $V\left(\frac{4}{5},-2\right)$.

d) $x^2-6x+y^2+4y+13=0$
$(x-3)^2-9+(y+2)^2-4+13=0$
$(x-3)^2+(y+2)^2=0$
Točka $(3,-2)$.

Primjer 2: Fokusi elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$ i hiperbole $9x^2 - 16y^2 = 144$ vrhovi su romba. Odredimo površinu tog romba.

Rješenje: Odredimo fokuse elipse $25x^2 + 16y^2 = 400$.

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$$

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 16 \\ b^2 &= 25 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

Fokusi elipse su na osi ordinata.

$e = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25-16} = 3$

$F_1(0, -3)$ i $F_2(0, 3)$

$d(F_1, F_2) = 6$

Odredimo fokuse hiperbole.

$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$$

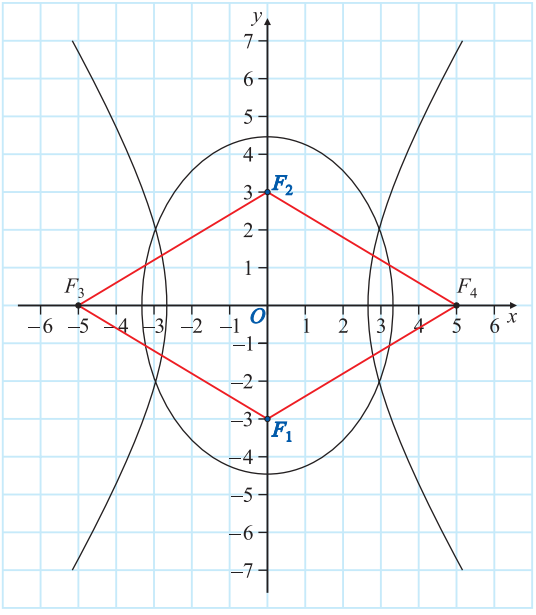
$$\left.\begin{aligned} a^2 &= 16 \\ b^2 &= 9 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} a &= 4 \\ b &= 3 \end{aligned}$$

$e = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{16+9} = 5$

$F_3(-5, 0)$ i $F_4(5, 0)$

$d(F_3, F_4) = 10$

Površina romba $P = \dfrac{10 \cdot 6}{2} = 30.$



ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Jednadžbom $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y + 20 = 0$ zadana je:

a) elipsa b) kružnica c) hiperbola d) točka.

2. Dva su pravca istovremeno tangente na parabolu $y^2 = 3x$ i normale na kružnicu $x^2 - 2x + y^2 - 4y = 4$. Zbroj njihovih koeficijenata smjerova iznosi:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Fokusi elipse $16x^2 - 25y^2 = 400$ točke su u kojima kružnica sa središtem u ishodištu siječe os x.

a) Kako glasi jednadžba kružnice?
b) Koliki je opseg kružnice?

2. Kružnica $x^2 + y^2 = 16$ prolazi kroz fokuse (na osi x) i kroz tjemena male osi elipse. Kako glasi jednadžba elipse?

3. Zadana je hiperbola $x^2 - y^2 = 8$. Odredite jednadžbu elipse koja prolazi točkom $K(4, 6)$, a fokusi su joj u fokusima hiperbole.

4. Zadana je elipsa $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$. Hiperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ima fokuse u tjemenima elipse, a tjemena u njenim fokusima. Koliki je šiljasti kut koji asimptota hiperbole u prvom kvadrantu zatvara s osi apscisa?

5. Odredite jednadžbu hiperbole kojoj se fokusi nalaze u tjemenima elipse $\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1$, a prolazi kroz fokuse dane elipse.

6. Ravnalica parabole s vrhom u ishodištu je pravac $x = 6$. Kako glasi jednadžba elipse čiji je lijevi fokus, fokus parabole, a velika poluos je tri puta veća od male poluosi?

7. Odredite jednadžbe zajedničkih tangenti elipse $\frac{x^2}{45} + \frac{y^2}{20} = 1$ i parabole $y^2 = \frac{20}{3}x$.

8. Napišite jednadžbe zajedničkih tangenti krivulja $4x^2 + 5y^2 = 20$ i $5x^2 + 4y^2 = 20$.

9. Napišite jednadžbe zajedničkih tangenti krivulja $3x^2 - 4y^2 = 12$ i $2x^2 + 2y^2 = 1$.

RJEŠENJA

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** b

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

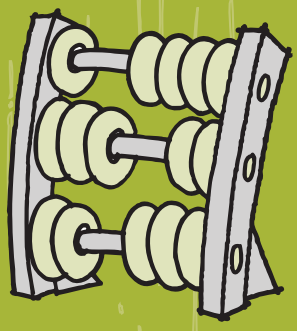
1. a) $x^2 + y^2 = 9$ b) $O = 6\pi$ **2.** $\frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{16} = 1$ **3.** $3x^2 + 4y^2 = 192$

4. $\alpha = 36° 52'$ **5.** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{144} = 1$ **6.** $2x^2 + 18y^2 = 81$

7. $x + 3y + 15 = 0$, $x - 3y + 15 = 0$

8. $x + y + 3 = 0$, $x + y - 3 = 0$, $x - y + 3 = 0$, $x - y - 3 = 0$

9. $x - y + 1 = 0$, $x - y - 1 = 0$, $x + y - 1 = 0$, $x + y + 1 = 0$



6. DERIVACIJE

6.1. Derivacije funkcija

Derivacija funkcije f u točki x_0 je broj $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ ako ovaj limes postoji. Derivaciju označavamo sa $f'(x_0)$. Ako derivacija postoji u svakoj točki nekog intervala, kažemo da je funkcija derivabilna (diferencijabilna) na tom intervalu.

Derivaciju još označavamo simbolima y', $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df(x)}{dx}$, D_y, $Df(x)$.

Iz definicije se izvode pravila za deriviranje zbroja, razlike, umnoška, kvocijenta i kompozicije funkcija, te derivacije elementarnih funkcija.

$$(f \pm g)' = f' \pm g' \qquad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \qquad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$c' = 0 \qquad (a^x)' = a^x \ln a \qquad (\sin x)' = \cos x$$

$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1},\ n \neq 0 \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x} \qquad (\cos x)' = -\sin x$$

$$(e^x)' = e^x \qquad (\log x)' = \frac{\log e}{x} \qquad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Primjer 1: Derivirajmo funkciju $f(x) = 2x^3 - \dfrac{4}{x} + 5\sqrt{x} + 6$.

Rješenje: Koristimo pravilo za deriviranje zbroja funkcija.

$$f'(x) = \left(2x^3\right)' - \left(\frac{4}{x}\right)' + \left(5\sqrt{x}\right)' + (6)'$$

Iz pravila za derivaciju umnoška, dolazimo do pravila za derivaciju umnoška i konstante $(c \cdot f)' = c \cdot (f)'$ i koristeći ovo pravilo pojednostavljujemo zadane derivacije.

$$f'(x) = 2\left(x^3\right)' - 4\left(\frac{1}{x}\right)' + 5\left(\sqrt{x}\right)'$$

Potenciju deriviramo po pravilu $\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$, $n \neq 0$, tako da preostale funkcije prvo prikažemo u obliku potencije baze x, a zatim ih deriviramo.

$$f'(x) = 2\left(x^3\right)' - 4\left(x^{-1}\right)' + 5\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^{3-1} - 4 \cdot (-1)x^{-1-1} + 5 \cdot \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x) = 2 \cdot 3x^2 - 4 \cdot (-1)x^{-2} + 5 \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = 6x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 6x^2 + \frac{4}{x^2} + \frac{5\sqrt{x}}{2x}$$

Primjer 2: Derivirajmo funkciju $f(x)=\dfrac{3x^3-2x^2+x}{\sqrt{x}}$.

Rješenje: Kako bismo što jednostavnije derivirali ovu funkciju, napišimo je pomoću potencija.

$$f(x)=\frac{3x^3}{x^{\frac{1}{2}}}-\frac{2x^2}{x^{\frac{1}{2}}}+\frac{x}{x^{\frac{1}{2}}}=3x^{3-\frac{1}{2}}-2x^{2-\frac{1}{2}}+x^{1-\frac{1}{2}}=$$

$$=3x^{\frac{5}{2}}-2x^{\frac{3}{2}}+x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x)=\left(3x^{\frac{5}{2}}\right)'-\left(2x^{\frac{3}{2}}\right)'+\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$f'(x)=3\cdot\frac{5}{2}x^{\frac{5}{2}-1}-2\cdot\frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}+\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}$$

$$f'(x)=\frac{15}{2}x^{\frac{3}{2}}-3x^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

Ili pomoću korijena:

$$f'(x)=\frac{15}{2}\sqrt{x^3}-3\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}=$$

$$=\frac{15x^2-6x+1}{2\sqrt{x}}\cdot\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}\left(15x^2-6x+1\right)}{2x}.$$

Primjer 3: Odredimo derivacije sljedećih funkcija:

a) $f(x)=x\cos x$ b) $g(x)=\dfrac{3x-4}{2x+1}$.

Rješenje: a) Koristeći pravilo za derivaciju umnoška derivirat ćemo funkciju $f(x)$.

$$f'(x)=(x)'\cos x+x(\cos x)'$$

$$f'(x)=\cos x+x(-\sin x)$$

$$f'(x)=\cos x-x\sin x$$

b) Za funkciju $g(x)$ koristit ćemo pravilo za derivaciju kvocijenta.

$$g'(x)=\frac{(3x-4)'(2x+1)-(3x-4)(2x+1)'}{(2x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{3(2x+1)-(3x-4)\cdot 2}{(2x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{\cancel{6x}+3\cancel{-6x}+8}{(2x+1)^2}$$

$$g'(x)=\frac{11}{(2x+1)^2}$$

Primjer 4: Izračunajmo vrijednost $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$ funkcije $f(x)=\frac{\sin x - tgx}{\cos x}$.

Rješenje: Prvo ćemo odrediti derivaciju funkcije.

$$f(x)=\frac{(\sin x-\operatorname{tg}x)'\cdot\cos x-(\sin x-\operatorname{tg}x)(\cos x)'}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\left(\cos x-\frac{1}{\cos^2 x}\right)\cdot\cos x-(\sin x-\operatorname{tg}x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x-\frac{1}{\cos x}+\sin^2 x-\frac{\sin^2 x}{\cos x}}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x-\frac{1+\sin^2 x}{\cos x}}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{1-\frac{1+\sin^2 x}{\cos x}}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\frac{\cos x-1-\sin^2 x}{\cos x}}{(\cos x)^2}$$

$$f'(x)=\frac{\cos x-1-\sin^2 x}{(\cos x)^3}$$

Sada ćemo izračunati vrijednost $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos\frac{\pi}{3}-1-\sin^2\frac{\pi}{3}}{\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3}=\frac{\frac{1}{2}-1-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^3}=$$

$$=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{3}{4}}{\frac{1}{8}}=\frac{-\frac{5}{4}}{\frac{1}{8}}=-10.$$

Neke funkcije imaju derivaciju u svakoj točki nekog intervala, tako da su i njihove derivacije funkcije na tom intervalu, pa možemo promatrati derivaciju njihovih derivacija. Tu derivaciju nazivamo **druga derivacija funkcije** $\left(f'(x)\right)'=f''(x)$. Ako je i ta derivacija funkcija na zadanom intervalu, možemo promatrati i njenu derivaciju $\left(\left(f''(x)\right)'=f'''(x)\right)$ i tako dalje. Tako dobivamo **derivacije višeg reda**.

Primjer 5: Odredimo sve derivacije funkcije $f(x) = x^4 - 1$.

Rješenje: Deriviramo redom.

$$f'(x) = \left(x^4 - 1\right)' = 4x^3$$

$$f''(x) = \left(4x^3\right)' = 4 \cdot 3x^2 = 12x^2$$

$$f'''(x) = \left(12x^2\right)' = 12 \cdot 2x = 24x$$

$$f^{(4)}(x) = (24x)' = 24$$

$$f^{(5)}(x) = 0$$

Sve sljedeće derivacije također su jednake 0.

Primjer 6: Odredimo prve dvije derivacije funkcije $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Rješenje:

$$f'(x) = \frac{1' \cdot (1-x) - 1 \cdot (1-x)'}{(1-x)^2} = \frac{-(-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{(1-x)^2}$$

$$f''(x) = \frac{-\left[(1-x)^2\right]'}{(1-x)^4} = -\frac{\left(1-2x+x^2\right)'}{(1-x)^4} =$$

$$= -\frac{-2+2x}{(1-x)^4} = \frac{2\cancel{(1-x)}}{(1-x)^{\cancel{4}}} = \frac{2}{(1-x)^3}$$

Ako je funkcija h kompozicija derivabilnih funkcija, $h(x) = g\left(f(x)\right)$, tada derivaciju funkcije h dobivamo $h'(x) = g'\left(f(x)\right) \cdot f'(x)$. Ovu formulu nazivamo **pravilo o ulančanom deriviranju**, a možemo je zapisati i ovako

$$h'(x) = g'(u) \cdot f'(x), \quad u = f(x).$$

Primjer 7: Odredimo derivaciju funkcije $f(x) = \sin(x^2)$.

Rješenje: Primijenimo li formulu o ulančanom deriviranju vidimo da je $u = x^2$ te zapisujemo $f(x) = \sin(u)$.

Započinjemo deriviranje.

$$f'(x) = (\sin u)' \cdot u' = \cos u \cdot \left(x^2\right)' = \cos u \cdot 2x$$

Vratimo x^2 umjesto u (funkcija je zadana u varijabli x).

$$f'(x) = 2x \cdot \cos\left(x^2\right)$$

Primjer 8: Derivirajmo funkciju $f(x)=\dfrac{\sqrt{x+1}}{(1-x)^2}$.

Rješenje: Prvo ćemo brojnik zapisati u obliku potencije $f(x)=\dfrac{(x+1)^{\frac{1}{2}}}{(1-x)^2}$.

Naša funkcija je racionalna pa ćemo prvo derivirati kvocijent.

$$f'(x)=\frac{\left[(x+1)^{\frac{1}{2}}\right]'\cdot(1-x)^2-(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot\left[(1-x)^2\right]'}{(1-x)^4}$$

Sada imamo dvije složene funkcije u brojniku koje moramo derivirati, te ćemo uvesti dvije zamjene: $u=x+1$ i $v=1-x$, ali samo na mjestima gdje trebamo derivirati.

$$f'(x)=\frac{\left[(u)^{\frac{1}{2}}\right]'\cdot(1-x)^2-(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot(v^2)'}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{\left[\frac{1}{2}(u)^{-\frac{1}{2}}\cdot u'\right]\cdot(1-x)^2-(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2v\cdot v'}{(1-x)^4}$$

Sada možemo vratiti zamjene.

$$f'(x)=\frac{\left[\frac{1}{2}(x+1)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x+1)'\right]\cdot(1-x)^2-(x+1)^{\frac{1}{2}}\cdot 2(1-x)\cdot(1-x)'}{(1-x)^4}$$

Ovim je postupak deriviranja završen, ali moramo srediti funkciju.

$$f'(x)=\frac{\left[\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\cdot 1\right]\cdot(1-x)^2-\sqrt{x+1}\cdot 2(1-x)\cdot(-1)}{(1-x)^4}=$$

$$=\frac{\frac{(1-x)^2}{2\sqrt{x+1}}+2\sqrt{x+1}\cdot(1-x)}{(1-x)^4}$$

$$f'(x)=\frac{\cancel{(1-x)}\left[(1-x)+4\sqrt{x+1}^2\right]}{\frac{2\sqrt{x+1}}{(1-x)^{4\cancel{3}}}}=\frac{1-x+4x+4}{2(1-x)^3\sqrt{x+1}}=$$

$$=\frac{3x+5}{2(1-x)^3\sqrt{x+1}}.$$

Primjer 9: Odredimo vrijednost $f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)$ za $f(x)=\operatorname{tg}^2(\pi-3x)+5$.

Rješenje: Funkcija f složena je od triju funkcija, te ćemo uvesti zamjene $u=\pi-3x,\ v=\operatorname{tg}(\pi-3x)$.

$$f'(x)=\left(v^2+5\right)'=2v\cdot v'=2\cdot\operatorname{tg}u\cdot\left(\operatorname{tg}u\right)'\cdot u'=$$

$$=2\cdot\operatorname{tg}(\pi-3x)\cdot\frac{1}{\cos^2 u}\cdot(\pi-3x)'=$$

$$=\frac{2\cdot\operatorname{tg}(\pi-3x)}{\cos^2(\pi-3x)}\cdot(-3)=\frac{-6\operatorname{tg}(\pi-3x)}{\cos^2(\pi-3x)}$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{-6\operatorname{tg}\left(\pi-3\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}{\cos^2\left(\pi-3\cdot\frac{2\pi}{3}\right)}=\frac{-6\operatorname{tg}(-\pi)}{\cos^2(-\pi)}=\frac{0}{1}=0$$

Ako su $y=f(x)$ i $x=g(y)$ međusobno inverzne funkcije, onda vrijedi $f'(x)=\frac{1}{g'(y)}$. Derivaciju inverzne funkcije možemo naći i tako da prvo odredimo inverznu funkciju, a nakon toga deriviramo.

Primjer 10: Odredimo derivaciju logaritamske funkcije baze e ako znamo da je $\left(e^x\right)'=e^x$.

Rješenje: $y=f(x)=\ln x,\quad x=g(y)=e^y$

$$f'(x)=\frac{1}{g'(y)}=\frac{1}{\left(e^y\right)'}=\frac{1}{e^y}=\frac{1}{x}\quad\Rightarrow\quad(\ln x)'=\frac{1}{x}$$

Primjer 11: Odredimo derivaciju složene funkcije $f(x)=\ln\frac{1}{e^{2x}-1}$.

Rješenje: Ovu funkciju možemo pojednostaviti koristeći pravila logaritmiranja.

$$f(x)=\ln\frac{1}{e^{2x}-1}=\ln 1-\ln\left(e^{2x}-1\right)=-\ln\left(e^{2x}-1\right)$$

Funkcija je i dalje složena, ali ipak nešto jednostavnija. Uvodimo zamjene $t=2x,\quad u=e^t,\quad v=u-1$.

$$f'(x)=\left(-\ln v\right)'=-\frac{1}{v}\cdot v'=-\frac{1}{e^{2x}-1}\cdot(u-1)'=$$

$$=\frac{1}{1-e^{2x}}\cdot u'=\frac{1}{1-e^{2x}}\cdot\left(e^t\right)'=$$

$$=\frac{1}{1-e^{2x}}\cdot e^t\cdot t'=\frac{1}{1-e^{2x}}\cdot e^{2x}\cdot(2x)'=\frac{2e^{2x}}{1-e^{2x}}$$

Primjer 12: Derivirajmo funkciju $f(x)=\log_{\frac{1}{3}}\frac{1}{x^2}$.

Rješenje: Pojednostavimo funkciju

$$f(x)=\log_{(3^{-1})}x^{-2}=\frac{-2}{-1}\log_3 x=2\log_3 x.$$

Od složene funkcije dobili smo jednostavnu, koju deriviramo po pravilu $\left(\log_b x\right)'=\frac{1}{x\ln b}$.

$$f'(x)=\left(2\log_3 x\right)'=\frac{2}{x\ln 3}.$$

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2009.) Zadana je funkcija $f(x)=\frac{1}{5}\left(x^3+2x^2-15x\right)$. Odredite derivaciju funkcije.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Ako je $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x}+1}$, odredite $f'(4)$.

a) $\frac{1}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{1}{9}$ d) $\frac{2}{9}$

2. Ako je $f(x)=\frac{\sin x}{x}$, tada je $f'(x)$ jednako:

a) $\frac{x\cos x-\sin x}{x^2}$ b) $\cos x$

c) $\frac{\sin x-x\cos x}{x^2}$ d) $\frac{\cos x-\sin x}{x}$.

3. Vrijednost $f'(2)$ za funkciju $f(x)=\frac{1}{x}$ je:

a) 4 b) – 4 c) $\frac{1}{4}$ d) $-\frac{1}{4}$.

4. Izračunajte vrijednost $f'(-2)$ ako je funkcija $f(x)=x^3-3x$.

a) 2 b) –15 c) 9 d) –9

5. Treća derivacija funkcije $f(x)=\frac{1}{3}x^3+2x^2-\frac{1}{4}x+5$ je:

a) 0 b) $2x+4$ c) 2 d) $\frac{1}{3}$.

6. Derivacija funkcije $10x(1-x)^9$ jednaka je:

a) $90(1-x)^8$ b) $90x(1-x)^8$

c) $-90x(1-x)^8$ d) $10(1-x)^8(1-10x)$.

7. Ako je $f(x)=\dfrac{\sin(2\pi x)}{g(x)}$ i $g(x)\neq 0$, tada je $f'(x)$ jednako:

a) $\dfrac{\cos(2\pi x)}{g'(x)}$

b) $\dfrac{2\pi g(x)\cos(2\pi x)-\sin(2\pi x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

c) $\dfrac{2\pi g(x)\sin(2\pi x)-\cos(2\pi x)g'(x)}{\left[g(x)\right]^2}$

d) $\dfrac{2\pi g(x)\left(\cos(2\pi x)-\sin(2\pi x)g'(x)\right)}{\left[g(x)\right]^2}$.

8. Derivacija funkcije $f(x)=\sqrt{3x-2}$ je:

a) $3\sqrt{3x-2}$ b) $\dfrac{3\sqrt{3x-2}}{2(3x-2)}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt{3x-2}}$ d) $-2\sqrt{3x-2}$.

9. Derivacija funkcije $f(x)=\dfrac{\ln(2x)}{2x}$ je:

a) $\dfrac{\ln(2x)}{2x^2}$ b) $\dfrac{1-2\ln(2x)}{4x^2}$ c) $\dfrac{1-\ln(2x)}{2x^2}$ d) $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

10. Derivacija funkcije $f(x)=\dfrac{\sin(3x)}{2e^x-x}$ je:

a) $\dfrac{3(2e^x-x)\cos(3x)-(2e^x-1)\sin(3x)}{4e^{2x}-4xe^x+x^2}$

b) $\dfrac{3\cos(3x)}{2e^x-1}$

c) $\dfrac{(2e^x-1)\sin(3x)-3(2e^x-x)\cos(3x)}{4e^{2x}-4xe^x+x^2}$

d) $\dfrac{(2e^x-1)\sin(3x)-3(2e^x-x)\cos(3x)}{2e^x-x}$.

11. Ako je $f(x)=\ln(x^2)$, koliko je $f'(-1)$?

a) -2 b) -1 c) 0 d) 1

12. Neka su $f(x)=e^{x^2}$ i $g(x)=\sin(x^2)$ realne funkcije. Ako je $h(x)=f(x)g(x)$, tada je $h'(x)$ jednako:

a) $e^{2x}\sin(2x)$ b) $4xe^{x^2}x\cos(x^2)$

c) $2xe^{x^2}$ d) $2xe^{x^2}\left(\sin(x^2)+\cos(x^2)\right)$.

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Ako je $f(x)=\dfrac{x^3}{\sin x}$, odredite $f'(x)$.

2. Za $f(x)=\dfrac{\cos x}{2x+2}$ izračunajte $f'(\pi)$.

3. Derivirajte funkciju $f(x)=x\ln x$.

4. Odredite prve tri derivacije funkcije $f(x)=2\sin x$.

5. Derivirajte funkcije $f(x)=\sqrt[3]{x}$, $g(x)=x^2\sin x$, $h(x)=\dfrac{1+x}{1-x}$.

6. Odredite derivaciju funkcije $f(x)=(3x^2-5x)^5$.

7. Izračunajte $f'\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)$ ako je $f(x)=\sin^2(3x)$.

8. Zadane su funkcije $f(x)=x^2+1$ i $g(x)=\ln x$.

a) Odredite $g(f(x))$.

b) Odredite derivaciju funkcije $g(f(x))$.

9. Ako je $g(x)=\ln(\operatorname{tg}(x))$, izračunajte $g'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$.

10. Ako je $f(x)=xe^{3x}$, izračunajte $f'(0)$.

11. Zadana je funkcija $f(x)=x^3-3x^2+4$.

a) Odredite derivaciju funkcije.

b) Riješite jednadžbu $f'(x)=0$.

c) Odredite na kojim intervalima je $f'(x)$ pozitivna, a na kojima negativna.

d) Izračunajte vrijednost $f'(2)$, $f'(-1)$.

e) Odredite drugu derivaciju funkcije.

12. Zadana je funkcija $f(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2(x+1)$.

a) Riješite jednadžbu $f(x) = 0$.
b) Odredite derivaciju funkcije.
c) Izračunajte vrijednost derivacije funkcije u rješenjima jednadžbe $f(x) = 0$.
d) Riješite jednadžbu $f'(x) = 0$.
e) Odredite drugu derivaciju funkcije.
f) Izračunajte vrijednost druge derivacije u nultočkama prve derivacije.

13. Izračunajte vrijednost $f'(1)$, ako je $f(x) = 2\sin(3x) - \frac{3}{2}$.

RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. $f'(x) = \frac{1}{5}(3x^2 + 4x - 15)$

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. d **2.** a **3.** d **4.** c **5.** c **6.** d
7. b **8.** b **9.** c **10.** a **11.** a **12.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. $f'(x) = \frac{3x^2\sin x - x^3\cos x}{\sin^2 x}$ **2.** $\frac{2}{(2\pi+2)^2}$ **3.** $\ln x + 1$

4. $f'(x) = 2\cos x,\ f''(x) = -2\sin x,\ f'''(x) = -2\cos x$

5. $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}},\ g'(x) = 2x\sin x + x^2\cos x,\ h'(x) = \frac{2}{(1-x)^2}$

6. $f'(x) = 5(6x-5)(3x^2-5x)^4$ **7.** 0

8. a) $g(f(x)) = \ln(x^2+1)$ b) $g'(f(x)) = \frac{2x}{x^2+1}$ **9.** $g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$ **10.** $f'(0) = 1$

11. a) $f'(x) = 3x^2 - 6x$
b) $x_1 = 0,\ x_2 = 2$
c) Pozitivna je na $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, a negativna na $\langle 0, 2\rangle$
d) $f'(2) = 0,\ f'(-1) = 9$, e) $f''(x) = 6x - 6$

12. a) $x_1 = -1,\ x_2 = 2$
b) $f'(x) = -\frac{3x}{2}(x-2)$
c) $f'(2) = 0,\ f'(-1) = -\frac{9}{2}$
d) $x_1 = 0,\ x_2 = 2$
e) $f''(x) = -3x + 3$
f) $f''(0) = 3,\ f''(2) = -3$

13. $f'(1) = 6\cos 3$

6.2. Primjena derivacija

Geometrijsko značenje derivacije funkcije f u točki x_0 je koeficijent smjera tangente na graf funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$. **Koeficijent smjera** tangente je $k = \operatorname{tg}\alpha = f'(x_0)$. **Jednadžba tangente** na graf funkcije u zadanoj točki je

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Primjer 1: Odredimo jednadžbu tangente i normale na graf funkcije f u njenoj točki $(3, f(3))$.

a) $f(x) = x^2$ b) $f(x) = x^2 + 2$

Rješenje: Vidimo da će derivacija obiju funkcija biti ista, $f'(x) = 2x$, pa će i vrijednost derivacija u točki biti ista: $f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$.

a) Izračunajmo vrijednost $f(3) = 3^2 = 9$.

Dobili smo točku (3, 9), a znamo da je koeficijent smjera tangente $k = f'(3) = 6$. Sada možemo zapisati jednadžbu tangente u točki (3, 9).

$y - 9 = 6(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 6x - 18 + 9$

$y = 6x - 9$

Normala je okomita na tangentu,

te je njen koeficijent smjera $-\dfrac{1}{f'(x_0)}$,

a prolazi istom točkom $(x_0, f(x_0)) = (3, 9)$.

Njena jednadžba je:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)$$

$$y - 9 = -\frac{1}{6}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2} + 9$$

$$y = -\frac{1}{6}x + \frac{19}{2}.$$

b) Računamo $f(3) = 3^2 + 2 = 11$, $(x_0, f(x_0)) = (3, 11)$ i dalje postupamo kao i u primjeru a). Koeficijenti smjera tangente i normale su također kao u primjeru a).

Jednadžba tangente je:

$y - 11 = 6(x - 3) \quad \Rightarrow \quad y = 6x - 18 + 11 \quad \Rightarrow \quad y = 6x - 7.$

Jednadžba normale je:

$$y - 11 = -\frac{1}{6}(x - 3) \Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{1}{2} + 11$$

$$\Rightarrow y = -\frac{1}{6}x + \frac{23}{2}.$$

Primjer 2: Odredimo jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=\frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)$ koja je:

a) usporedna s pravcem $y=-x+3$, ako je $0\le x_0\le\frac{\pi}{3}$

b) okomita na pravac $y=-x+3$, ako je $0\le x_0\le\frac{\pi}{3}$.

Rješenje: a) Koeficijent smjera tangente jednak je derivaciji funkcije u točki x_0, znači $f'(x_0)=-1$.

Nađimo derivaciju tražene funkcije.

$$\left[\frac{1}{5}\sin\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)\right]'=-1$$

$$\frac{1}{5}\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)'=-1$$

$$\frac{1}{5}\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)\cdot 5=-1$$

$$\cos\left(5x-\frac{\pi}{3}\right)=-1$$

Riješimo jednadžbu $\cos\left(5x_0-\frac{\pi}{3}\right)=-1$.

$$5x_0-\frac{\pi}{3}=\pi+2k\pi$$

$$5x_0=\frac{4\pi}{3}+2k\pi$$

$$x_0=\frac{4\pi}{15}+\frac{2k\pi}{5},\ k\in\mathbf{Z}$$

Iz uvjeta $0\le x_0\le\frac{\pi}{3}$, slijedi $x_0=\frac{4\pi}{15}$. Vrijednost funkcije u x_0 je $f\left(\frac{4\pi}{15}\right)=\frac{1}{5}\sin\left(\cancel{5}\cdot\frac{4\pi}{\cancel{15}^{3}}-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{5}\sin(\pi)=0$, pa točka ima koordinate $\left(\frac{4\pi}{15},0\right)$.

Jednadžba tangente usporedne s danim pravcem u dobivenoj točki je:

$$y-0=-1\left(x-\frac{4\pi}{15}\right)\quad\Rightarrow\quad y=-x+\frac{4\pi}{15}.$$

b) Slijedeći Primjer 1. i znajući da je koeficijent smjera tangente $k = -\frac{1}{-1} = 1$, zaključujemo $f'(x_0) = 1$.

Riješimo jednadžbu $\cos\left(5x_0 - \frac{\pi}{3}\right) = 1$.

$$5x_0 - \frac{\pi}{3} = 0 + 2k\pi$$

$$5x_0 = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$$

$$x_0 = \frac{\pi}{15} + \frac{2k\pi}{5},\ k \in \mathbf{Z}$$

Iz uvjeta $0 \le x_0 \le \frac{\pi}{3}$ izračunamo $x_0 = \frac{\pi}{15}$.

Vrijednost funkcije u x_0 je:

$$f\left(\frac{\pi}{15}\right) = \frac{1}{5}\sin\left(5 \cdot \frac{\pi}{15^{3}} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{5}\sin(0) = 0.$$

Jednadžba tangente okomite na pravac $y = -x + 3$ u točki $\left(\frac{\pi}{15}, 0\right)$ je $y - 0 = x - \frac{\pi}{15} \quad \Rightarrow \quad y = x - \frac{\pi}{15}$.

Primjer 3: Odredimo u kojoj točki pravac $y = -x + 2$ dodiruje funkciju $f(x) = e^{1-x}$.

Rješenje: Zadani pravac je tangenta funkcije f u točki $\left(x_0, f(x_0)\right)$, tako da je koeficijent smjera zadanog pravca jednak derivaciji funkcije f u točki x_0.

$$f'(x_0) = -1$$

$$\left(e^{1-x}\right)' = -1$$

$$e^{1-x} \cdot (1-x)' = -1$$

$$e^{1-x} \cdot (-1) = -1 / : (-1)$$

$$e^{1-x} = 1$$

$$e^{1-x} = e^0 \quad \Rightarrow \quad 1 - x = 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 = 1$$

Izračunajmo vrijednost funkcije $f(1) = e^{1-1} = e^0 = 1$.

Točka dodira pravca i tangente je (1, 1).

Koristeći derivacije možemo odrediti kut pod kojim se sijeku grafovi funkcija. Taj kut jednak je kutu između tangenti u sjecištu grafova dviju funkcija.

Primjer 4: Odredimo kut između grafova funkcija $f(x) = -x^2 - 2x - 3$ i $g(x) = x^2 - 4x - 3$.

Rješenje: Odredimo sjecište ovih dviju funkcija.

$$f(x) = g(x)$$
$$-x^2 - 2x - 3 = x^2 - 4x - 3$$
$$-2x^2 + 2x = 0$$
$$2x(-x+1) = 0$$
$$x_1 = 0, \quad x_2 = 1$$

Ove dvije parabole sijeku se u dvije točke. Da bismo odredili kut između dvaju pravaca, dovoljno je znati koeficijente smjerova tih pravaca. Derivirat ćemo naše funkcije.

$$f'(x) = \left(-x^2 - 2x - 3\right)' \qquad g'(x) = \left(x^2 - 4x - 3\right)'$$
$$f'(x) = -2x - 2 \qquad g'(x) = 2x - 4$$

Izračunat ćemo vrijednosti derivacija u točki s apscisom 0.

$$f'(0) = -2 \qquad g'(0) = -4$$
$$k_1 = -2 \qquad k_2 = -4$$

Kut između ovih dviju tangenti računat ćemo po formuli

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-4 - (-2)}{1 + (-2)(-4)}\right| \quad \Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \left|\frac{-2}{1+8}\right|$$

$$\Rightarrow \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{2}{9} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 12°31'44"$$

Dakle, kut između ovih dviju parabola iznosi $12°31'44"$.

Sada ćemo izračunati vrijednosti derivacija u točki s apscisom 1.

$$f'(1) = -2 - 2 = -4 \qquad g'(1) = 2 - 4 = -2$$
$$k_1 = -4 \qquad k_2 = -2$$

Vidimo da su koeficijenti smjerova jednaki kao i za prvu točku i zaključujemo da se tangente u obje točke sijeku pod kutom od $12°31'44"$.

ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

1. Jednadžba normale krivulje zadane jednadžbom $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ u točki s apscisom $x = 4$ je:

a) $y = -\frac{1}{6}x + \frac{50}{3}$ b) $y = 6x - 18$

c) $y = 6x - 8$ d) $y = 6x + 40$.

2. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x) = x^2 + 2x$ u točki $(1, 3)$.

a) $x - 4y + 11 = 0$ b) $4x + y = 7$ c) $y = 4x$ d) $4x - y = 1$

3. Jednadžba tangente na graf $y = 2x^4 - 4x^3$ u točki za koju je $x = 2$ je:

a) $y = -\frac{1}{16}$ b) $y = -\frac{1}{16}(x - 2)$

c) $y = (8x^3 - 12x^2)(x - 2)$ d) $y = 16(x - 2)$.

4. Tangenta na graf funkcije $f : R \to R,\ f(x) = xe^{-ax},\ a > 0$ u jednoj točki je vodoravna. Apscisa te točke je:

a) ae b) $\frac{1}{ae}$ c) $\frac{1}{a}$ d) 0.

5. Odredite jednadžbu normale na graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x}$ za $x = 2$.

a) $x + 4y - 4 = 0$ b) $2x - 8y - 15 = 0$

c) $4x + y - 4 = 0$ d) $8x - 2y - 15 = 0$

6. Tangenta na krivulju $y = 2x^3 + 3x - 3$ usporedna s pravcem $y = -2x + 3$ ima jednadžbu:

a) $y = -2x$ b) $y = -2x - 3$

c) $y = -2x + \frac{3}{2}$ d) Nema takve tangente.

7. Kut između krivulje $y = \frac{2 - x}{4 - x}$ i pravca $y = 2x - 4$ iznosi:

a) 30° b) 45° c) 60° d) 90°.

8. Jednadžba normale krivulje $y = x \sin x$ u točki s apscisom π je:

a) $y = -(x - \pi)\pi$ b) $y = (x - \pi)\pi$

c) $y = -\frac{1}{\pi}(x - \pi)$ d) $y = \frac{1}{\pi}(x - \pi)$.

9. Funkcija $f(x) = \frac{1}{ax + b}$ ima tangentu $y = -x - 1$ koja je dodiruje u točki $(-2, 1)$. Kolika je vrijednost b?

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Intervali monotonosti

Neka je funkcija f derivabilna na intervalu $\langle a,b\rangle$.

Funkcija f raste na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x)\geq 0$ za svaki x iz intervala $\langle a,b\rangle$.

Funkcija f pada na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako i samo ako je $f'(x)\leq 0$ za svaki x iz intervala $\langle a,b\rangle$.

Točku u kojoj je $f'(x)=0$ nazivamo **stacionarna** točka.

Područje definicije funkcije (domena) je stacionarnim točkama podijeljeno na intervale rasta ili pada funkcije (**intervali monotonosti**).

Primjer 5: Odredimo intervale monotonosti funkcije $f(x) = -3x^2 + 3x - 3$.

Rješenje: Funkcija f je parabola, s negativnim vodećim koeficijentom, znači da je svojim otvorom okrenuta prema dolje (☹).
Ova funkcija raste do tjemena, a od tjemena pada. Znajući svojstva derivacija, ne moramo ništa znati o kvadratnoj funkciji da bismo odredili njene intervale monotonosti.

Odredimo derivaciju funkcije.
$f'(x)=-6x+3$

Izjednačimo je s nulom kako bismo našli stacionarnu točku.
$-6x+3=0 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{1}{2}.$

Provjerimo predznak derivacije na intervalu
$x<\frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad f'(0)=3>0.$

Zaključujemo da na tom intervalu funkcija raste, a za
$x>\frac{1}{2} \Rightarrow \quad f'(1)=-3<0$, znači da funkcija pada.

Intervale rasta i pada možemo preglednije zapisati u tablicu tijeka funkcije.

x	$-\infty$	↗	$\frac{1}{2}$	↗	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$-$	stacionarna točka	$+$	$+$
$f(x)$	$-\infty$	↗	$-\frac{9}{4}$	↘	$-\infty$

Primjer 6: Odredimo intervale rasta funkcije $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$.

Rješenje: Derivirajmo funkciju $f'(x)=3x^2-6x+3$ i riješimo jednadžbu $f'(x)=0$.

$3x^2 - 6x + 3 = 0 : 3$
$x^2 - 2x + 1 = 0$
$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1$
Stacionarna točka je $x = 1$. Znamo da je $(x-1)^2 \geq 0$ za svaki x iz domene.

x	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	stacionarna točka	+	+
$f(x)$	$-\infty$	↗	1	↗	$+\infty$

Funkcija raste na cijelom području definicije.

Ekstremi funkcije

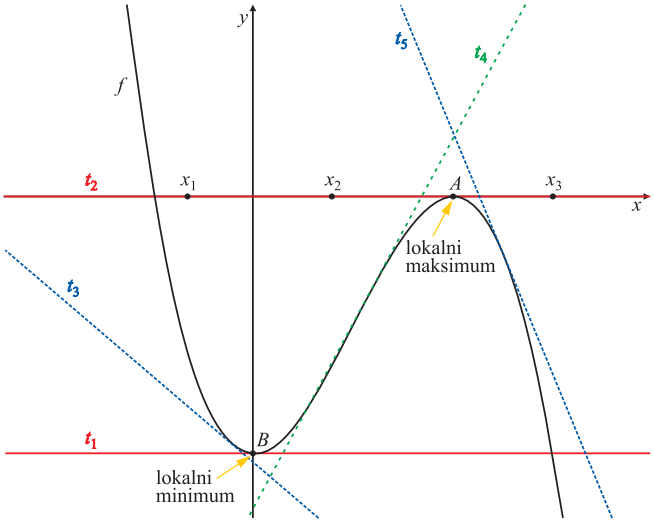
Funkcija f ima u $x_0 \in \langle a,b \rangle$ **lokalni minimum**, ako vrijedi $f(x_0) \leq f(x)$ za svaki $x \in \langle a,b \rangle$.

Funkcija f ima u $x_0 \in \langle a,b \rangle$ **lokalni maksimum**, ako vrijedi $f(x_0) \geq f(x)$ za svaki $x \in \langle a,b \rangle$.

Minimum i maksimum jednom riječju nazivamo ekstremi funkcije f.
Nužan uvjet za postojanje ekstrema: ako je x_0 lokalni ekstrem funkcije f i ako funkcija f ima derivaciju u toj točki, tada je $f'(x) = 0$. Tangenta na graf funkcije u točki $(x_0, f(x_0))$ usporedna je s osi x.

Primjer 7: Na donjoj slici je graf funkcije f. Vidimo da funkcija na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ postiže lokalni minimum u točki B, a na intervalu $\langle x_2, x_3 \rangle$ postiže lokalni maksimum u točki A. Tangenta na f u točki B paralelna je s osi x, a tangenta u točki A je upravo os x, znači da je vrijednost derivacije u x_A i x_B jednaka nuli.

Sa slike vidimo da funkcija na intervalu $\langle -\infty, x_B \rangle$ pada, a sve tangente na tom intervalu, uključujući i tangentu t_3, imaju negativne koeficijente smjerova (derivacija funkcije na tom intervalu je negativna).



Na intervalu $\langle x_B, x_A \rangle$ funkcija raste, a koeficijenti smjerova tangenti na tom intervalu su pozitivni, kao i tangenta t_4 (derivacija funkcije na tom intervalu je pozitivna).

Funkcija ponovo pada na intervalu $\langle x_A, +\infty \rangle$, a tangente na tom intervalu imaju negativne koeficijente smjerova, kao i tangenta t_5.

Ako derivacija pri prolazu kroz stacionarnu točku mijenja predznak od negativnog na pozitivni, onda je stacionarna točka lokalni minimum, a ako mijenja predznak od pozitivnog na negativni, onda je stacionarna točka lokalni maksimum.

Primjer 8: Odredimo ekstreme funkcije $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$, ako postoje.

Rješenje: Domena funkcije je $D(f) = \boldsymbol{R}^+$. Odredimo derivaciju funkcije.

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Domena derivacije jednaka je domeni funkcije $D(f') = \boldsymbol{R}^+$.
Nultočka derivacije je $1 - \ln x = 0 \quad \Rightarrow \quad \ln x = 1 \quad \Rightarrow \quad x = e$.

Odredimo predznake derivacije lijevo i desno od stacionarne točke $(e, 0)$.
Uzmimo proizvoljne točke e^{-1} i e^2, $e^{-1} < e < e^2$ i izračunajmo $f'(e^{-1})$ i $f'(e^2)$.

$$f'(e^{-1}) = \frac{1 - \ln e^{-1}}{(e^{-1})^2} = \frac{2}{e^{-2}} = 2e^2 > 0$$

$$f'(e^2) = \frac{1 - \ln e^2}{(e^2)^2} = \frac{-1}{e^4} < 0$$

Derivacija funkcije lijevo od stacionarne točke je pozitivna, a desno negativna, znači da je stacionarna točka maksimum, $f(e) = \dfrac{\ln e}{e} = \dfrac{1}{e}$ i vrijednost tog maksimuma je $\dfrac{1}{e}$.

Za određivanje karaktera ekstrema možemo koristiti i drugu derivaciju funkcije.

Ako je druga derivacija u stacionarnoj točki pozitivna $f''(x) > 0$, tada je stacionarna točka minimum.

Ako je druga derivacija u stacionarnoj točki negativna $f''(x) < 0$, tada je stacionarna točka maksimum.

Ako je druga derivacija u stacionarnoj točki jednaka nuli $f''(x) = 0$, tada karakter stacionarne točke pronalazimo pomoću prve derivacije u točkama lijevo i desno od stacionarne točke.

Primjer 9: Odredimo ekstreme funkcije $f(x)=\frac{\ln x}{x}$ koristeći drugu derivaciju.

Rješenje: Iz primjera 8. znamo da je $f'(x)=\frac{1-\ln x}{x^2}$. Odredimo drugu derivaciju.

$$f''(x)=\frac{-\frac{1}{x}\cdot x^2-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=\frac{-x-(1-\ln x)\cdot 2x}{x^4}=$$

$$=\frac{-x\left(1+2(1-\ln x)\right)}{x^4}=-\frac{3-2\ln x}{x^3}$$

Odredimo vrijednost druge derivacije u stacionarnoj točki $f''(e)=-\frac{3-2\ln e}{e^3}=-\frac{1}{e^3}<0$. Vidimo da je stacionarna točka maksimum funkcije.

Primjer 10: Odredimo ekstreme funkcije $f(x)=4x^3-x^4$.

Rješenje: Prva derivacija funkcije je $f'(x)=12x^2-4x^3$. Odredimo stacionarne točke.

$12x^2-4x^3=0 \quad\Rightarrow\quad 4x^2(3-x)=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0,\ x_2=3$

Odredimo drugu derivaciju funkcije i izračunajmo vrijednosti u stacionarnim točkama.

$f''(x)=24x-12x^2$

$f''(3)=72-108=-36<0 \Rightarrow$ za $x_0=3$ funkcija ima maksimum $f(3)=27$

$f''(0)=0 \Rightarrow$ za $x_0=0$ ćemo izračunati vrijednosti prve derivacije lijevo i desno od 0

$f'(-1)=12+4=16>0,\ \ f'(1)=12-4=8>0$

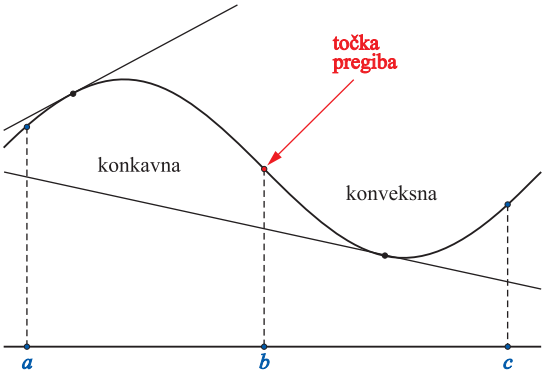
Vrijednost prve derivacije lijevo i desno od $x_0=0$ je pozitivna, te zaključujemo da $x_0=0$ nije ekstrem.

Intervali konveksnosti i konkavnosti

Funkcija f je **konveksna** na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako je njezin graf iznad tangente u proizvoljnoj točki tog intervala. Funkcija f je **konkavna** na intervalu $\langle a,b\rangle$ ako je njezin graf ispod tangente u proizvoljnoj točki tog intervala. Točku u kojoj funkcija prelazi iz konveksne u konkavnu ili obrnuto nazivamo **točkom pregiba** ili **infleksije**.

Na slici je prikazana funkcija koja je na intervalu $\langle a,b\rangle$ konkavna, a na intervalu $\langle b,\ c\rangle$ konveksna. Na prijelazu između konkavnosti u konveksnost nalazi se točka pregiba.

Određivanje intervala konveksnosti i konkavnosti istražujemo pomoću druge derivacije funkcije. Moguća točka pregiba je rješenje jednadžbe $f''(x)=0$ na domeni funkcije. Ako je $f''(x)>0$ funkcija f je konveksna na intervalu $\langle a,b\rangle$, a za $f''(x)<0$ funkcija f je konkavna na intervalu $\langle a,b\rangle$.



Primjer 11: Odredimo tijek funkcije $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x^2-9}$ i intervale konveksnosti i konkavnosti.

Rješenje: Domena funkcije je $D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{\pm 3\}$. Nultočke funkcije su –2 i 2. Odredimo prvu derivaciju funkcije.

$$f'(x)=\frac{-2x\left(x^2-9\right)-2x\left(4-x^2\right)}{\left(x^2-9\right)^2}=$$

$$=\frac{-2x\left(x^2-9+4-x^2\right)}{\left(x^2-9\right)^2}=\frac{10x}{\left(x^2-9\right)^2}.$$

Stacionarne točke dobivamo rješavanjem jednadžbe $f'(x)=0$.

$$\frac{10x}{\left(x^2-9\right)^2}=0 \quad \Rightarrow \quad x=0$$

Vidimo da je $f'(x)>0$ za sve pozitivne vrijednosti x, a $f'(x)<0$ za sve negativne vrijednosti x. Zaključujemo da će u $x=0$ biti minimum funkcije.

Odredimo drugu derivaciju.

$$f''(x)=\frac{10\left(x^2-9\right)^2-10x\cdot 2\left(x^2-9\right)\cdot 2x}{\left(x^2-9\right)^4}=$$

$$=\frac{10\cancel{\left(x^2-9\right)}\left[x^2-9-4x^2\right]}{\left(x^2-9\right)^{\cancel{4}3}}=$$

$$=\frac{10\left(-3x^2-9\right)}{\left(x^2-9\right)^3}=\frac{-30\left(x^2+3\right)}{\left(x^2-9\right)^3}$$

Druga derivacija će biti negativna ako je nazivnik pozitivan, a pozitivna ako je nazivnik negativan. Moguće točke pregiba dobivamo rješavanjem jednadžbe $f''(x)=0$, no budući da ova jednadžba nema rješenja u skupu $\boldsymbol{R}$, znači da funkcija nema točke pregiba.

Napišimo tablicu tijeka funkcije.

x	$-\infty$	-3	↗	0	↗	3	↗	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	nije definirano	$-$	stacionarna točka	$+$	nije definirano	$+$	$+$
$f(x)$	↘	nije definirano	↘	minimum $-\frac{4}{9}$	↗	nije definirano	↗	

x	$-\infty$	-3	↗	0	↗	3	↗	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	nije definirano	$+$	$+$	$+$	nije definirano	$-$	$-$
$f(x)$	konkavna		konveksna				konkavna	

Iz tablice vidimo da funkcija pada na intervalu $\langle -\infty, -3\rangle \cup \langle -3, 0\rangle$, a raste na intervalu $\langle 0, 3\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

Točka $\left(0, -\frac{4}{9}\right)$ je minimum funkcije. Konkavna je na intervalima $\langle -\infty, -3\rangle$ i $\langle 3, +\infty\rangle$, a konveksna na intervalu $\langle -3, 3\rangle$. Za $x = -3$ i $x = 3$ funkcija nije definirana.

Postupak za crtanje grafa funkcije

1. Ispitivanje funkcije f
- odredimo domenu funkcije
- odredimo nultočke funkcije $f(x) = 0$
- ispitamo svojstva parnosti, neparnosti, periodičnosti
- izračunamo (po potrebi) vrijednost funkcije u nekoliko točaka

2. Ispitivanje funkcije f'
- odredimo derivaciju funkcije
- odredimo stacionarne točke $f'(x) = 0$
- odredimo intervale pada i rasta funkcije
- odredimo karakter i vrijednost ekstrema

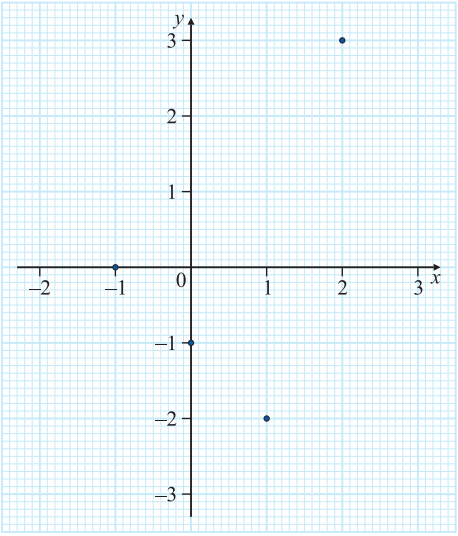
3. Ispitivanje funkcije f''
- odredimo drugu derivaciju funkcije
- riješimo jednadžbu $f''(x) = 0$
- odredimo intervale konveksnosti i konkavnosti
- odredimo točke pregiba ako postoje

Primjer 12: Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = x^3 - 2x - 1$.

Rješenje: 1. Ispitivanje funkcije f

Domena $D(f) = \boldsymbol{R}$.

Jednadžbu trećeg stupnja ne znamo riješiti, ali ako malo bolje pogledamo, možemo pogoditi jednu nultočku
$f(-1) = (-1)^3 - 2(-1) - 1 = -1 + 2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1, 0)$.
Funkcija nije ni parna, ni neparna, ni periodična.
Izračunajmo vrijednost nekoliko točaka.
$f(0) = -1,\ f(1) = -2,\ f(2) = 3,\ f(-2) = -5$
Ucrtajmo sve (ili bar neke) točke u koordinatni sustav.

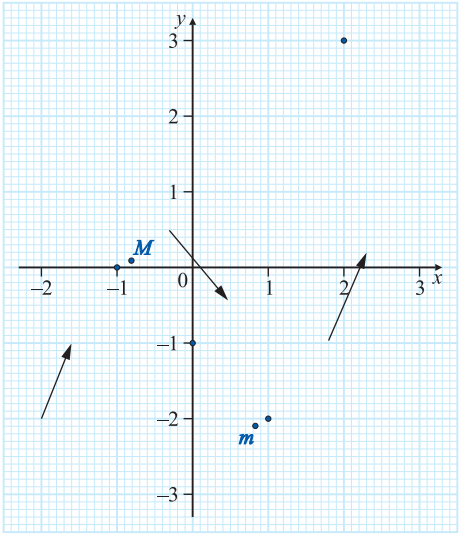


2. Ispitivanje funkcije f' $\qquad f'(x) = 3x^2 - 2$

$3x^2 = 2 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{\frac{2}{3}} \approx \pm 0.816$ stacionarne točke

x	$-\infty$	$-\sqrt{\frac{2}{3}}$	↗	$\sqrt{\frac{2}{3}}$	$+\infty$
$f'(x)$	+	stacionarna točka	–	stacionarna točka	+
$f(x)$	↗	$\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 1$	↘	$-\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{3}} - 1$	↗
		točka maksimuma		točka minimuma	

Ucrtajmo sve točke u koordinatni sustav. Točku maksimuma označili smo s M, a točku minimuma s m.

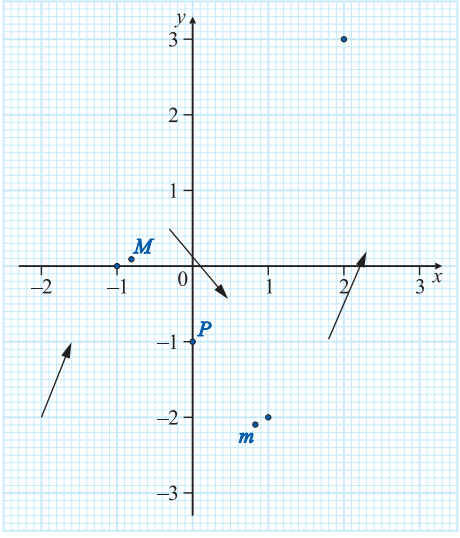


3. Ispitivanje funkcije f'' $\qquad f''(x) = 6x$

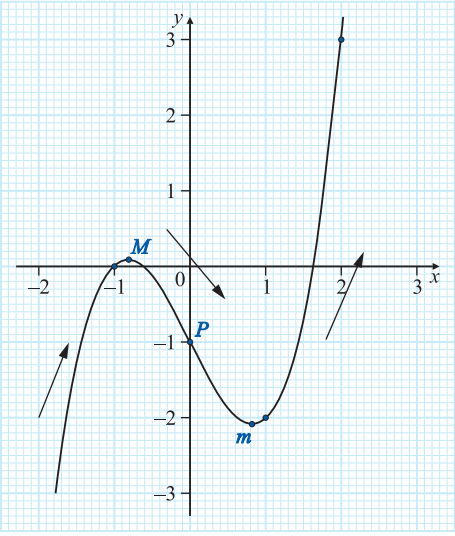
$6x = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$ moguća točka pregiba

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	točka pregiba	$+$
$f(x)$	konkavna	-1	konveksna

Ucrtajmo točku pregiba (P) u koordinatni sustav.



Sada možemo nacrtati graf funkcije. Vidimo da funkcija raste do točke maksimuma M, nakon toga pada i negdje desno od točke M siječe x os (nultočka koju ne znamo izračunati). U točki P je pregib, gdje funkcija iz konkavnosti prelazi u konveksnost, no funkcija i dalje pada do točke minimuma m i nakon toga počinje rasti, tako da desno od apscise točke minimuma siječe x os. Kako bismo što preciznije nacrtali graf, odredit ćemo interval u kojem se nalaze nepoznate nultočke. Već smo ranije izračunali $f(2) = 3$ i $f(1) = -2$, pa zaključujemo da je nultočka je u intervalu $\langle 1, 2 \rangle$. Funkcija postiže maksimum za $x = -\sqrt{\frac{2}{3}}$, a točka pregiba je $P(0, 1)$, te istim načinom zaključujemo da je nultočka u intervalu $\left\langle -\sqrt{\frac{2}{3}}, 0 \right\rangle$.



Primjer 13: Nacrtajmo graf funkcije $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$.

Rješenje: 1. Ispitivanje funkcije f

Domena $D(f) = R \setminus \{\pm 1\}$ – pravci kroz točke u kojima funkcija ne postoji $x = 1$ i $x = -1$ su vertikalne asimptote.

Nultočaka nema.

Funkcija je parna. $f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 - 1} = \frac{1}{x^2 - 1} = f(x)$

Odredimo neke vrijednosti funkcije.

$f(0) = -1, \quad f(2) = \frac{1}{3}, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{4}{3}, \quad f(3) = \frac{1}{8}$

2. Ispitivanje funkcije f' $\qquad f'(x) = -\dfrac{2x}{\left(x^2-1\right)^2}$

$$-\frac{2x}{\left(x^2-1\right)^2} = 0 \Rightarrow -2x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ stacionarna točka}$$

x	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$
$f'(x)$	+	+	nije definirano	+	stacionarna točka	−	nije definirano	−	−
$f(x)$	↗	↗	nije definirano	↗	maksimum -1	↘	nije definirano	↘	↘

3. Ispitivanje funkcije f''

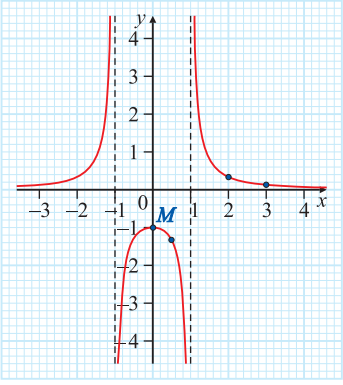
$$f''(x) = \frac{-2\left(x^2-1\right)^2 + 2x \cdot 2\left(x^2-1\right) \cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^4} =$$

$$= \frac{2\left(x^2-1\right)\left[-\left(x^2-1\right)+4x^2\right]}{\left(x^2-1\right)^{\cancel{4}\,3}} = \frac{2\left(3x^2+1\right)}{\left(x^2-1\right)^3}$$

Druga derivacija nema nultočaka, nema ni točaka pregiba.

x	$-\infty$	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	$+\infty$
$f''(x)$	+	+	nije definirano	−	−	−	nije definirano	+	+
$f(x)$	konveksna		nije definirano	konkavna			nije definirano	konveksna	

S obzirom na to da je funkcija parna, dovoljno je nacrtati funkciju za pozitivne x i odrediti simetriju s obzirom na y-os.



Vidimo da su sve vrijednosti funkcije desno od 1 pozitivne, a u tom intervalu funkcija pada i konveksna je. Zaključujemo da je taj dio grafa funkcije u prvom kvadrantu, što automatski znači da je onaj dio grafa funkcije koji se nalazi na intervalu $\langle -\infty, -1\rangle$ u trećem kvadrantu.

Dio grafa funkcije između asimptota ima oblik sužene parabole koja je svojim otvorom okrenuta prema dolje, a maksimum je u točki $M(0, -1)$.

Primjer 14: Nacrtajmo graf funkcije $f(x)=\dfrac{x^3}{1-x^2}$.

Rješenje: 1. Ispitivanje funkcije f

Domena $D(f)=\boldsymbol{R}\setminus\{\pm 1\}\rightarrow$ vertikalne asimptote su $x=1$ i $x=-1$

Nultočka $x_0=0,\ f(0)=0$

Funkcija je neparna $f(-x)=\dfrac{(-x)^3}{1-(-x)^2}=-\dfrac{x^3}{1-x^2}=-f(x)$

Neke vrijednosti funkcije $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{6},\ f(2)=-\dfrac{8}{3}$,

$$f(3)=-\frac{27}{8}$$

2. Ispitivanje funkcije f'

$$f'(x)=\frac{3x^2(1-x^2)-x^3\cdot(-2x)}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2\left[3(1-x^2)+2x^2\right]}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}$$

$$\frac{x^2(3-x^2)}{(1-x^2)^2}=0 \quad\Rightarrow\quad x_1=0,\ x_{2,3}=\pm\sqrt{3}\rightarrow \text{stacionarne točke}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	↗	-1	↗	0	↗	1	↗	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	stacionarna točka	$+$	nije definirano	$+$	stacionarna točka	$-$	nije definirano	$-$	stacionarna točka	$-$
$f(x)$	↗	minimum $\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↗	nije definirano	↗	maksimum -1	↘	nije definirano	↘	maksimum $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$	↘

3. Ispitivanje funkcije f''

$$f''(x)=\frac{\left(6x-4x^3\right)\left(1-x^2\right)^2-\left(3x^2-x^4\right)\cdot 2\left(1-x^2\right)\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^4}=$$

$$=\frac{2x\cancel{(1-x^2)}\left[\left(3-2x^2\right)\left(1-x^2\right)+2\left(3x^2-x^4\right)\right]}{\left(1-x^2\right)^{\cancel{4}3}}=\frac{2x\left(3+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}$$

$$\frac{2x\left(3+x^2\right)}{\left(1-x^2\right)^3}=0\ \Rightarrow\ x=0\rightarrow \text{moguća točka pregiba}$$

x	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$\nearrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$\sqrt{3}$	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	$+$	$+$	nije definirano	$-$	točka pregiba	$+$	nije definirano	$-$	$-$	$-$
$f(x)$	konveksna			nije definirano	konkavna	0	konveksna	nije definirano	konkavna		

Kako bismo što preciznije nacrtali graf funkcije, trebamo još odrediti ima li funkcija horizontalne i kose asimptote. Horizontalnu asimptotu određujemo pomoću limesa funkcije f.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}}{\cancel{x^3}\left(\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^3}}_{\to 0}-\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}$$

Limes ne postoji, znači nema horizontalne asimptote.

Kose asimptote određujemo također pomoću limesa. Pravac $y = ax + b$ je kosa asimptota ako je

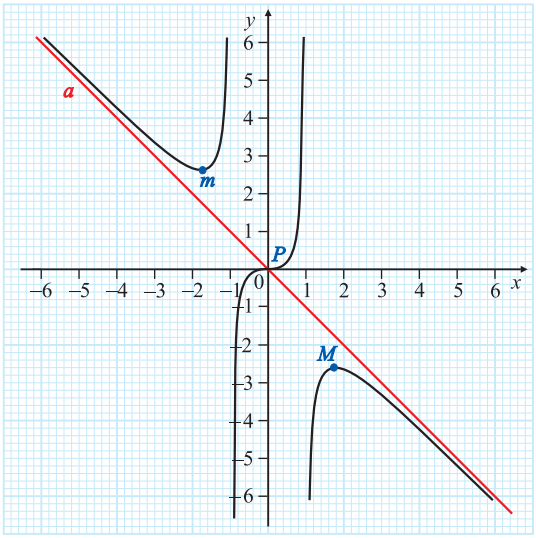
$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x},\quad b=\lim_{x\to\infty}\left(f(x)-ax\right).$$

Ukoliko ovi limesi ne postoje, funkcija nema kose asimptote. Ako je koeficijent a nula i postoji $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$, funkcija ima horizontalnu asimptotu $y = b$.

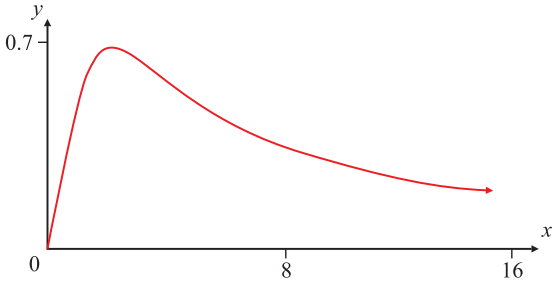
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^3}{1-x^2}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{1-x^2}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}-1\right)}=\frac{1}{-1}=-1\quad\Rightarrow\quad a=-1$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{1-x^2}+x\right)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\cancel{x^3}+x-\cancel{x^3}}{1-x^2}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}\right)}{\cancel{x^2}\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0}-1\right)}=\frac{0}{-1}=0\quad\Rightarrow\quad b=0$$

Jednadžba kose asimptote je $y = -x$ $y=-x$. Sada lakše možemo nacrtati graf u intervalima lijevo od točke minimuma i desno od točke maksimuma jer se u tim dijelovima graf funkcije približava asimptoti funkcije.



Primjer 15: Sredstvo za opuštanje ubrizgano je u mišić, odakle se širi u krvotok. Koncentracija y (mg/L), sredstva u krvotoku modelirana je jednadžbom $y = \frac{3x}{5+x^2}$, $x \geq 0$, gdje je x broj sati nakon što je injekcija dana. Graf ove jednadžbe prikazan je na slici.



a) Odredimo točan broj sati od ubrizgavanja kada je koncentracija sredstva za opuštanje mišića najveća. Također izračunajmo točnu vrijednost te koncentracije.

b) Sredstvo je učinkovito kada je koncentracija najmanje 0.4 mg/L. Odredimo točno vrijeme koje je potrebno da sredstvo postane učinkovito.

Rješenje: a) Kako bismo odredili najveću vrijednost funkcije, derivirat ćemo je.

$$y' = \frac{3\left(5+x^2\right)-3x\cdot 2x}{\left(5+x^2\right)^2} = \frac{15+3x^2-6x^2}{\left(5+x^2\right)^2} = \frac{15-3x^2}{\left(5+x^2\right)^2}$$

Moguća stacionarna točka je rješenje jednadžbe

$$y' = 0 \Rightarrow \frac{15 - 3x^2}{\left(5 + x^2\right)^2} = 0 \Rightarrow 15 - 3x^2 = 0 \Rightarrow 3(5 - x^2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5} \quad (x \geq 0) \quad \Rightarrow \quad x = \sqrt{5},$$

a vrijednost $y = \frac{3\sqrt{5}}{5 + \sqrt{5}^2} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$.

Sa slike vidimo da se radi o maksimumu. Najveća koncentracija od $\frac{3\sqrt{5}}{10} \approx 0.67$ mg/L je nakon $\sqrt{5} \approx 2.24$ sati, odnosno 2 sata i 14 minuta.

b) Uvjet možemo zapisati $\frac{3x}{5 + x^2} = 0.4$.

$$3x = 0.4\left(5 + x^2\right)$$

$$3x - \frac{2}{5}\left(5 + x^2\right) = 0$$

$$3x - 2 - \frac{2}{5}x^2 = 0$$

$$-2x^2 + 15x - 10 = 0$$

Rješenje jednadžbe je $x_1 = \frac{15 - \sqrt{145}}{4}$, $x_2 = \frac{15 + \sqrt{145}}{4}$.

Sredstvo postaje učinkovito nakon $\frac{15 - \sqrt{145}}{4} \approx 0.74$ sati, odnosno 44 minute.

Zadaci koji su se dosad pojavljivali na nacionalnim ispitima

1. (IK 2009.) Zadana je funkcija $f(x) = \frac{1}{5}\left(x^3 + 2x^2 - 15x\right)$.

a) Odredite nultočke te funkcije.
b) Odredite derivaciju funkcije $f'(x)$.
c) Odredite interval (intervale) na kojima funkcija raste.
d) Odredite lokalne ekstreme te funkcije.
e) Nacrtajte graf te funkcije rabeći rezultate prethodnih podzadataka.

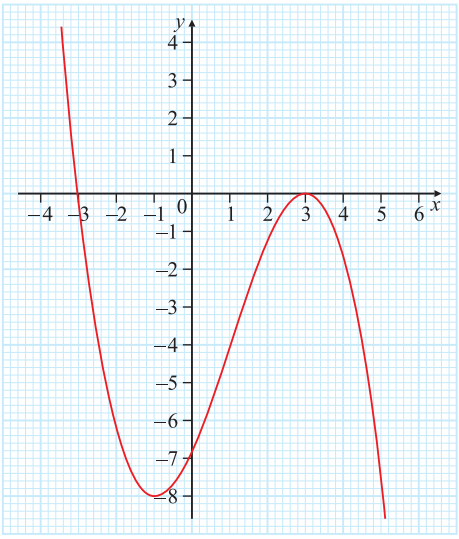
ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

10. Za funkciju zadanu jednadžbom $f(x) = -x^3 - x^2 + 2x + 2$ interval rasta funkcije je:

a) $\left\langle -\infty, \frac{-1 - \sqrt{7}}{3} \right\rangle$ b) $\left\langle \frac{-1 - \sqrt{7}}{3}, \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} \right\rangle$

c) $\left\langle \frac{-1 + \sqrt{7}}{3}, +\infty \right\rangle$ d) $\left\langle -1, \sqrt{2} \right\rangle$.

11. Za graf funkcije $f(x)$ prikazan na slici, $f'(x)$ je negativna za:



a) $-1 < x < 3$
b) $-1 \le x \le 3$
c) $x \le -1$ ili $x \ge 3$
d) $x < -1$ ili $x > 3$.

12. Odredite interval pada funkcije $f(x) = \dfrac{x-1}{2-x}$.

a) $\langle -\infty, 2\rangle$ b) $\langle 2, +\infty\rangle$
c) Funkcija raste na cijeloj domeni. d) $\langle 1, 2\rangle$

13. Odredite interval rasta funkcije $f(x) = -2\cos\left(\dfrac{1}{5}\pi x\right)$ na intervalu $[0, 10]$.

a) $\left\langle 0, \dfrac{5}{2}\right\rangle$ b) $\left\langle \dfrac{5}{2}, 5\right\rangle$ c) $\langle 0, 5\rangle$ d) $\langle 5, 10\rangle$

14. Stacionarna točka funkcije $f(x) = 3\log(2x-5)$ je:

a) (3, 0) b) ne postoji c) $\left(\dfrac{15}{2}, 3\right)$ d) (0, 0).

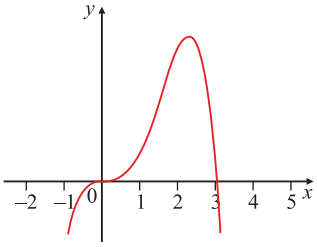
15. Na kojem intervalu funkcija $f(x) = x^3 - 9x^2 + 15x - 7$ pada?

a) $\langle -\infty, 1\rangle$ b) $\langle 1, 5\rangle$
c) $\langle 5, +\infty\rangle$ d) $\langle -\infty, 1\rangle \cup \langle 5, +\infty\rangle$

16. Koja od sljedećih funkcija ima ekstrem?

a) $f(x) = 2x - 3$ b) $f(x) = \log_2(2x-1) + 1$
c) $f(x) = 2x^3 - x$ d) $f(x) = e^{3x} - 2$

17. Dana je slika grafa derivabilne funkcije $f(x)$. Moguće vrijednosti derivacije funkcije $f(x)$ su:



a) $f'(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$

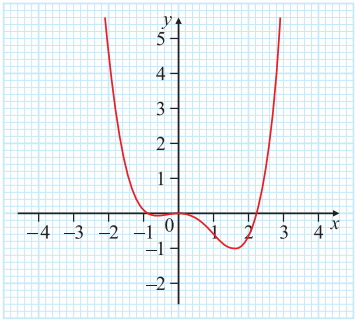
b) $f'(x) > 0$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 0, 2\rangle$

c) $f'(x) > 0$ za $x \in \langle 2, +\infty\rangle$

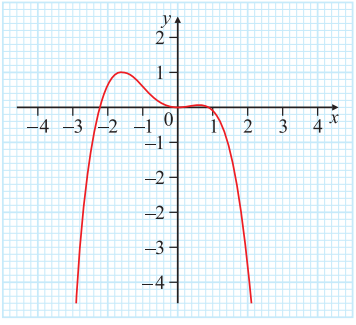
d) $f'(x) < 0$ za $x \in \langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 3, +\infty\rangle$.

18. Koji je od zadanih grafova graf funkcije $f(x) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2$?

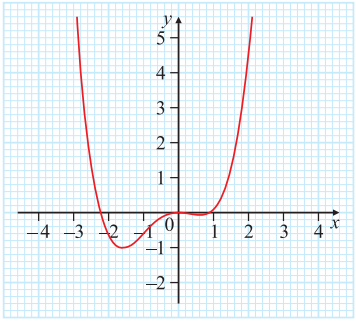
a)



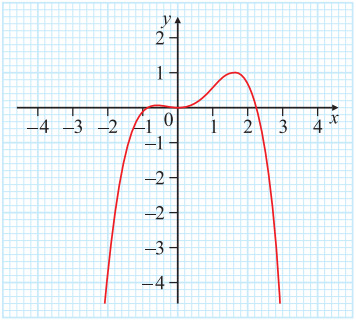
b)



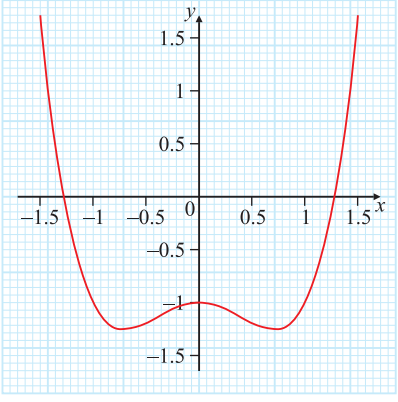
c)



d)



19. Koja je od zadanih jednadžbi jednadžba funkcije prikazane na slici?



a) $f(x) = x^4 + x^2 + 1$

b) $f(x) = x^4 + x^2 - 1$

c) $f(x) = x^4 - x^2 + 1$

d) $f(x) = x^4 - x^2 - 1$

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

1. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=(x-1)\left(\sqrt[3]{x^{10}}+1\right)$ u točki s apscisom 1.

2. Napišite jednadžbu tangente i normale na graf funkcije $f(x)=x^3-3x$ u točki $A(-2, y_0)$.

3. Pravac $y=4x-1$ je tangenta krivulje $y=4x^4+c$. Odredite vrijednost varijable c.

4. Odredite točku (točke) na grafu funkcije $f(x)=x^2$ u kojoj je tangenta na graf paralelna s pravcem $2x+y+3=0$.

5. Odredite jednadžbu tangente na funkciju $f(x)=\sqrt{x}+5x^2$ u točki $x=4$.

6. Odredite kut između funkcija $f(x)=e^{2x}-2$ i $g(x)=e^x$.

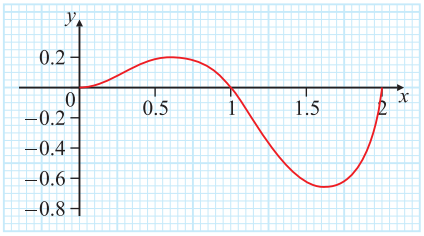
7. Odredite kut između grafa funkcije $f(x)=e^{\frac{x}{2}}+1$ i njene normale u točki presjeka funkcije s y-osi.

8. Zadana je funkcija $f(x)=x^3e^{-2x}$.

a) Odredite $f'(x)$.
b) Odredite jednadžbu tangente u točki s apscisom 1.
c) Odredite jednadžbu tangente u točki (0, 0).
d) Odredite zajedničku točku ovih tangenata.
e) Pod kojim kutom se ove dvije tangente sijeku.

9. Parabola $y=ax^2+bx+c$ siječe os ordinatu u točki (0, 4), a tangenta $y=-2x+5$ je dodiruje u točki (1, 3). Kako glasi jednadžba parabole?

10. Na slici je graf derivacije funkcije $f(x)$.



a) Na kojem intervalu funkcija $f(x)$ raste?
b) Na kojem intervalu funkcija $f(x)$ pada?
c) Koja je od veličina $f(0.25)$ i $f(1)$ veća?

11. Odredite intervale rasta funkcije $f(x)=2-\frac{4}{x+1}$.

12. Zadana je funkcija $f(x) = (x + 1)^2(x - 2) - 1$.

a) Odredite derivaciju funkcije.
b) Odredite stacionarne točke.
c) Odredite intervale monotonosti funkcije.

13. Odredite intervale monotonosti za funkciju $f(x) = \ln x - x^2$.

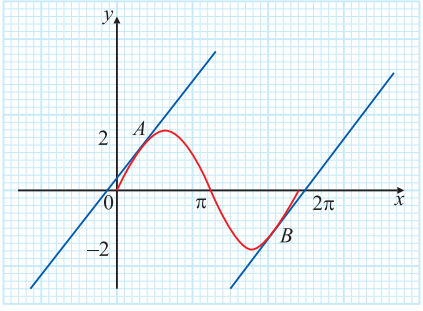
14. Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{4x-6}{4x^2-6x+1}$.

a) Odredite domenu funkcije.
b) Odredite nultočke funkcije (ako postoje).
c) Odredite derivaciju funkcije.
d) Odredite stacionarne točke (ako postoje).
e) Odredite tijek funkcije.

15. Zadana je funkcija $f(x) = (x - 1)^2(x - 2) + 1$.

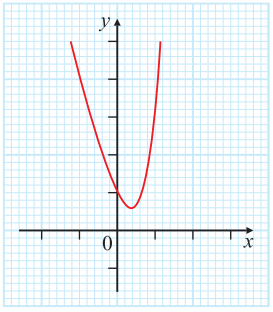
a) Ako je $f'(x) = (x-1)(ux+v)$, gdje su u i v konstante, odredite vrijednosti tih konstanti.
b) Točke ekstrema su $(a, 1)$ i $\left(b, \dfrac{23}{27}\right)$. Odredite vrijednosti a i b.
c) Za koje vrijednosti parametra p jednadžba $f(x) = p$ ima samo jedno rješenje.

16. Grafom je dana funkcija $f : [0, 2\pi] \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = 2\sin x$. U točkama A i B konstruirane su tangente.



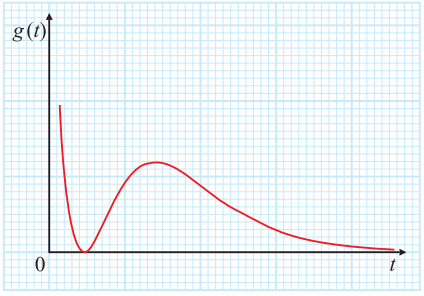
a) Odredite $f'(x)$.
b) Odredite maksimalnu i minimalnu vrijednost od $|f'(x)|$.
c) Odredite jednadžbu tangente na krivulju u točki $A\left(\dfrac{\pi}{3}, y\right)$.
d) Odredite apscisu točke B.

17. Na slici je prikazan graf funkcije $f(x) = e^{2x} - 4x$.



a) Izračunajte koordinate stacionarne točke.
b) Izračunajte kut između grafa funkcije i osi y.
c) Odredite apscisu točke presjeka funkcije i pravca $y + 4x - 5 = 0$.

18. Zadana je funkcija $f : [0, +\infty\rangle \to R,\ f(t) = 2e^{-t}$.



a) Odredite sliku ($\mathrm{Im} f$) zadane funkcije.
b) Odredite inverznu funkciju funkcije f.
c) Neka je $g : [0, +\infty\rangle \to \boldsymbol{R},\ g(t) = (t-1)^2\, 2e^{-t}$. Dio grafa prikazan je na slici. Pravilo deriviranja ove funkcije dano je u obliku $g'(t) = (-t^2 + bt + c)e^{-t}$. Odredite točnu vrijednost b i c.
d) Funkcija g ima stacionarne točke $(1, p)$ i (m, n). Odredite vrijednosti p, m i n.
e) Za funkciju $h : [0, +\infty\rangle \to \boldsymbol{R},\ h(t) = 2g(t) - 5$ odredite koordinate stacionarnih točaka.
f) Funkcija $k : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R},\ k(t) = (t^2 + at + 10)e^{-t}$, gdje je a realna konstanta ima derivaciju $k'(t) = (-t^2 + (2-a)t + (a-10))e^{-t}$. Odredite vrijednost konstante a ako graf funkcije k ima točno jednu stacionarnu točku.
g) Kolika bi bila vrijednost konstante a ako je $k'(t) < 0$ za svaki $t \in \boldsymbol{R}$.

19. Zadana je funkcija $f(x) = \dfrac{9}{x+1} + \dfrac{4}{11-x}$.

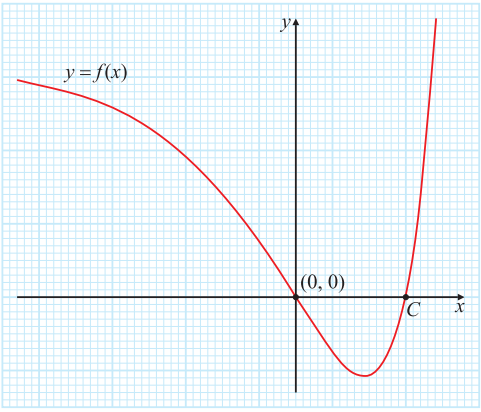
a) Odredite derivaciju funkcije $f(x)$.
b) Odredite minimum te funkcije.

20. Nacrtajte graf funkcije: a) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + x^2 + \frac{5}{2}x - 3$

b) $f(x) = -\frac{1}{2}(x-1)(x+2)(3-x)$.

21. Nacrtajte graf funkcije: a) $f(x) = \frac{x-5}{x^2-1}$ b) $f(x) = \frac{x^2}{x^3-1}$.

22. Graf funkcije $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, $f(x) = e^{2x} - 4e^x + 3$ prikazan je na slici.



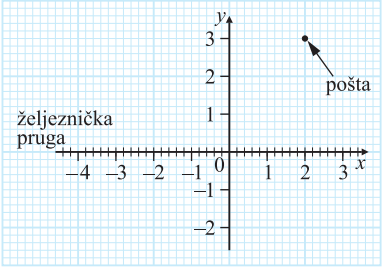
a) Graf funkcije prolazi ishodištem i točkom $(c, 0)$. Odredite vrijednost veličine c.
b) Odredite koordinate točke pregiba funkcije f.
c) Neka je g funkcija čiji graf je simetričan grafu funkcije f s obzirom na y-os. Nacrtajte graf funkcije g.
d) Napišite jednadžbu funkcije g.

23. Zadana je funkcija $f(x) = x^2 e^{-x}$. Odredite:

a) intervale monotonosti
b) intervale konveksnosti i konkavnosti
c) ekstreme funkcije
d) točke pregiba funkcije.

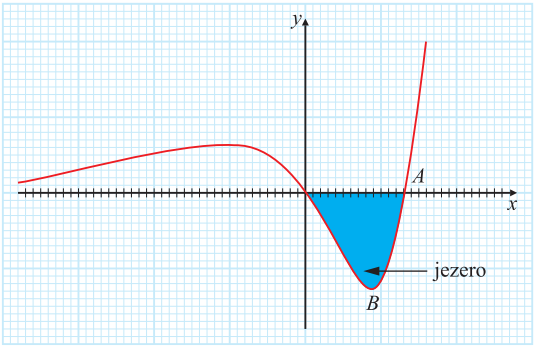
Nacrtajte graf zadane funkcije.

24. Stanovnici malog gradića odlučili su izgraditi novu cestu. Na slici je prikazan položaj željezničke pruge i poštanskog ureda. Odlučeno je da će cesta ići putem zadanim jednadžbom $y = (2x^2 - 3x)e^{ax}$, $a > 0$.



a) Odredite vrijednost parametra a ako cesta prolazi kraj pošte. Svoj odgovor zaokružite na tri decimalna mjesta.

Nakon promišljanja odlučili su se za cestu zadanu jednadžbom s parametrom $a = 1$ koja obilazi jezero, kao što je prikazano na slici.



b) Odredite koordinate točke A gdje cesta presijeca željezničku prugu.
c) Ako je $y_x' = e^x\left(px^2 + qx + r\right)$, odredite točne vrijednosti p, q i r.
d) Odredite koordinate točke B (zaokružujući na tri decimalna mjesta).

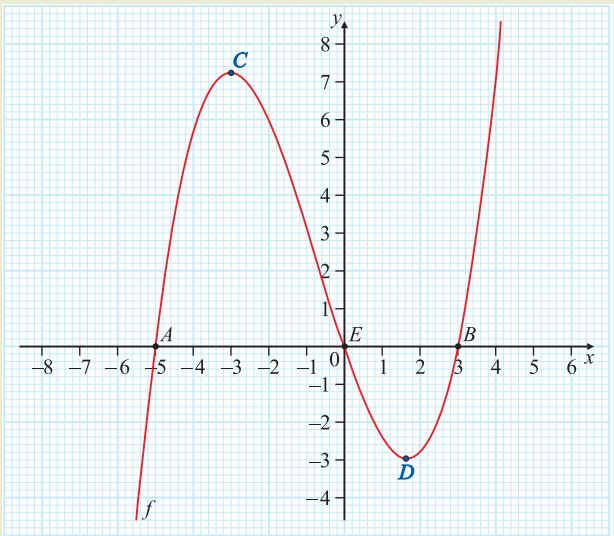
RJEŠENJA

ZADACI KOJI SU SE DOSAD POJAVLJIVALI NA NACIONALNIM ISPITIMA

1. a) $x_1 = -5, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 3$ b) $f'(x) = \frac{1}{5}\left(3x^2 + 4x - 15\right)$

c) Raste na $\langle -\infty, -3\rangle \cup \left\langle \frac{5}{3}, +\infty\right\rangle$, a pada na $\left\langle -3, \frac{5}{3}\right\rangle$. d) $M\left(-3, \frac{36}{5}\right)$, $m\left(\frac{5}{3}, -\frac{80}{27}\right)$

e)



ZADACI VIŠESTRUKOG IZBORA

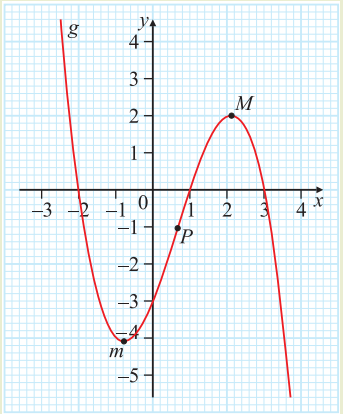
1. a **2.** d **3.** d **4.** c **5.** d **6.** d **7.** d **8.** d **9.** c **10.** b
11. d **12.** c **13.** c **14.** b **15.** b **16.** c **17.** b **18.** c **19.** d

ZADACI KRATKOG ILI PRODUŽENOG ODGOVORA

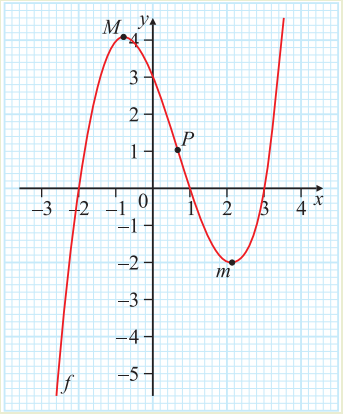
1. $y = 2x - 2$ **2.** $A(-2, -2)$, jednadžba tangente $y = 9x + 16$, jednadžba normale $y = -\frac{1}{9}x - \frac{20}{9}$
3. $c = 2$ **4.** $(-1, 1)$ **5.** $y = \frac{161}{4}x - 79$ **6.** Točka presjeka $S(\ln 2, 2)$, $\varphi = 19° 26' 24''$
7. Tangenta i normala u istoj točki su okomite, pa je kut 90°.
8. a) $f'(x) = 3x^2e^{-2x} - 2x^3e^{-2x}$ b) $y = e^{-2}x$ c) $y = 0$ d) $(0, 0)$ e) $\varphi = 7° 42' 26''$
9. $y = -x^2 + 4$ **10.** a) $x \in \langle 0,1 \rangle$ b) $x \in \langle 1,2 \rangle$ c) $f(1) < f(0.25)$
11. Funkcija raste na cijeloj domeni, $D = \boldsymbol{R} \setminus \{-1\}$
12. a) $f'(x) = 3(x-1)(x+1)$ b) $x_1 = 1$, $x_2 = -1$
c) Funkcija pada na na intervalu $\langle -1,1 \rangle$, a raste na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$.
13. Raste na $\left\langle 0, \frac{\sqrt{2}}{2} \right\rangle$, a pada na $\left\langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \right\rangle$.
14. a) $D(f) = \boldsymbol{R} \setminus \left\{ \frac{3+\sqrt{5}}{4}, \frac{3-\sqrt{5}}{4} \right\}$ b) $x = \frac{3}{2}$ c) $f'(x) = \frac{-16(x^2 - 3x + 2)}{(4x^2 - 6x + 1)^2}$ d) $(1,2)$, $\left(2, \frac{2}{5}\right)$
e)

x	$-\infty$	$\frac{3-\sqrt{5}}{4}$	↗	1	↗	$\frac{3+\sqrt{5}}{4}$	↗	2	↗	$+\infty$
$f'(x)$	−	−	−	stacionarna točka	+	+	+	stacionarna točka	+	+
$f(x)$	$-\infty$	nije definirano	↘	2	↗	nije definirano	↗	$\frac{2}{5}$	↗	$+\infty$

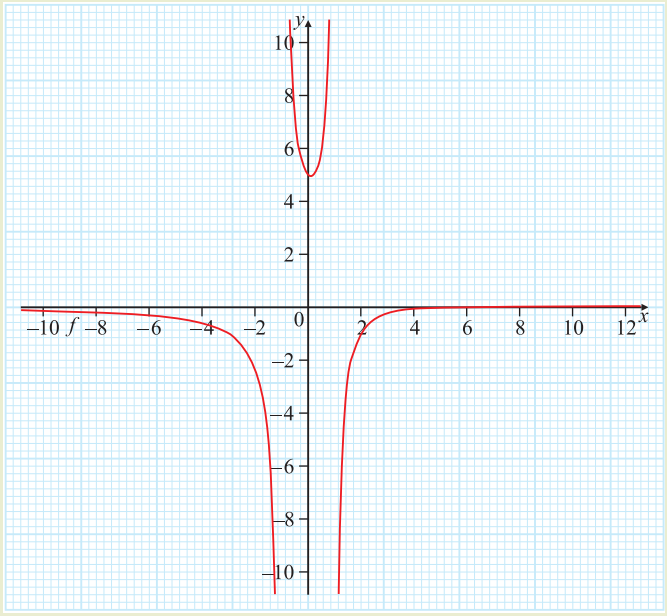
15. a) $u = 3$, $v = -5$ b) $(1, 1)$, $\left(\frac{5}{3}, \frac{23}{27}\right)$ c) $p < \frac{23}{27}$ ili $p > 1$
16. a) $f'(x) = 2\cos x$
b) Minimumi na intervalu $[0, 2\pi]$ su $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$, a maksimumi $(0, 2)$, $(\pi, 2)$, $(2\pi, 2)$.
c) $y = x + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$ d) $y = x - \sqrt{3} - \frac{5\pi}{3}$
17. a) $\left(\frac{\ln 2}{2}, 2 - 2\ln 2\right)$ b) $26° 33' 54''$ c) $x = \frac{\log 5}{\log e^2}$
18. a) $\langle 0, 2]$ b) $f^{-1}(t) = \ln\left(\frac{2}{t}\right)$ c) $b = 4$, $c = -3$ d) $p = 0$, $m = 3$, $n = 4e^{-3}$
e) $3{,}8e^{-3} - 5$ f) $a_1 = 6$, $a_2 = -6$ g) $-6 < a < 6$
19. a) $f'(x) = \frac{4}{(x-11)^2} - \frac{9}{(x+1)^2}$ b) $\left(\frac{31}{5}, \frac{25}{12}\right)$
20. a)



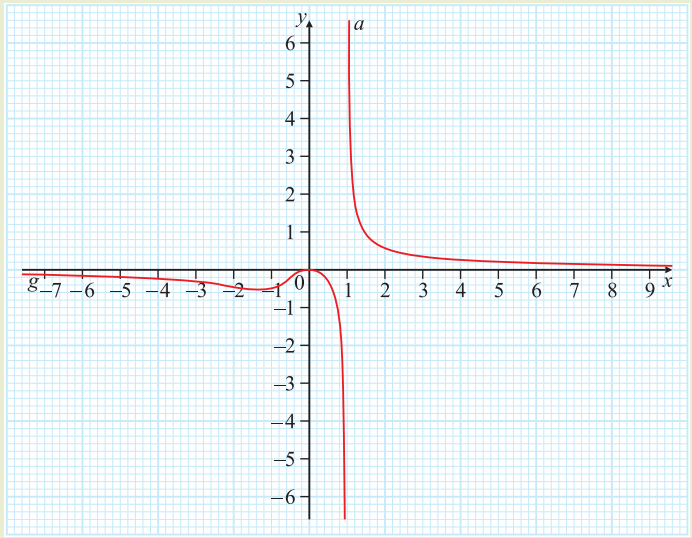
b)



21. a)

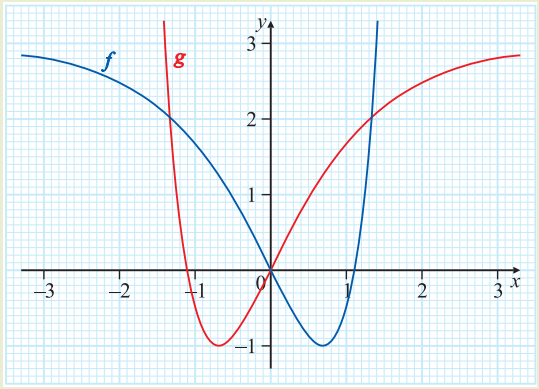

y
x
f
10
8
6
4
2
0
−2
−4
−6
−8
−10
−10
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12

b)


y
x
a
g
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
−6
−7
−6
−5
−4
−3
−2
−1
1
2
3
4
5
6
7
8
9

22. a) $c = \ln 3$ b) $(0, 0)$

c)



d) $g(x) = e^{-2x} - 4^{-x} + 3$

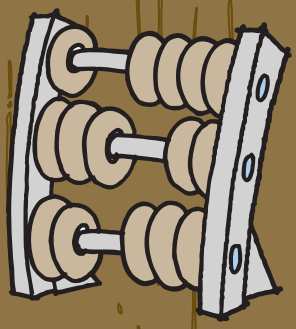
23. a) Funkcija pada na intervalima $\langle -\infty, 0\rangle \cup \langle 2, +\infty\rangle$, a raste na $\langle 0, 2\rangle$.

b) Funkcija je konveksna na intervalima $\left\langle -\infty, 2-\sqrt{2}\right\rangle \cup \left\langle 2+\sqrt{2}, +\infty\right\rangle$, a konkavna na $\left\langle 2-\sqrt{2}, 2+\sqrt{2}\right\rangle$.

c) Minimum funkcije je u točki $m(0, 0)$, a maksimum $M(2, 4e^{-2})$.

d) Točke pregiba su $P_1\left(2-\sqrt{2}, \left(6-4\sqrt{2}\right)e^{\sqrt{2}-2}\right)$ i $P_2\left(2+\sqrt{2}, \left(6+4\sqrt{2}\right)e^{-\sqrt{2}-2}\right)$.

24. a) 0.203 b) $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ c) $p = 2,\ \ q = 1,\ \ r = -3$ d) $B(1, -e) = (1, -2.718)$



PRIMJERI ISPITA

1. ispit (osnovna razina)

1. U kojem su primjeru brojevi zapisani redom od manjeg prema većem?

a) $\sqrt{10}, \frac{22}{7}, \pi, 3.1$ b) $3.1, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{10}$ c) $\pi, \frac{22}{7}, 3.1, \sqrt{10}$ d) $3.1, \pi, \frac{22}{7}, \sqrt{10}$

2. Kolika je vrijednost izraza $3a^0 + a^{\frac{1}{2}} + 8a^{-2}$ za $a = 4$?

a) $\frac{7}{2}$ b) $\frac{11}{2}$ c) $\frac{5}{2}$ d) $\frac{13}{2}$

3. Izračunajte: $\frac{4}{5} - \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{5}$.

a) 5 b) $\frac{11}{20}$ c) $\frac{3}{4}$ d) –5

4. Izraz $\frac{1}{5-\sqrt{13}}$ ekvivalentan je:

a) $\frac{5+\sqrt{13}}{12}$ b) $\frac{5+\sqrt{13}}{-12}$ c) $\frac{5+\sqrt{13}}{8}$ d) $\frac{5+\sqrt{13}}{-8}$.

5. Pet učenika preoblikovalo je izraz $(3-a)^2$. Tko je točno odgovorio?

a) Anita $(3-a)^2 = 3^2 - a^2$
b) Branimir $(3-a)^2 = 9 - 6a - a^2$
c) Cvijeta $(3-a)^2 = 9 - 6a + a^2$
d) Darko $(3-a)^2 = 9 + a^2$

6. Vrijednost izraza $\frac{x^2-16}{2x^2+8x} \cdot \frac{2x}{x^2-8x+16}$ je:

a) $\frac{1}{x+4}$ b) $\frac{1}{x-4}$ c) $x + 4$ d) $x - 4$.

7. Koliko je pola od 2^6 ?

a) 1^3 b) 1^6 c) 2^3 d) 2^5

8. U kojem su intervalu sve točke $T(x)$ koje su od točke $A(-2)$ udaljene više od 8?

a) $-6 < x < 10$ b) $-2 < x < 6$ c) $x < -10$ ili $x > 6$ d) $x < -2$ ili $x > 8$

9. Ako je brzina zvuka u zraku 344 metara u sekundi, kolika je ta brzina izražena u metrima na sat?

a) 20 640 b) 41 280 c) 123 840 d) 1 238 400

10. Lastavice su odletjele na jug u trima jatima. Broj ptica u jatima odnosi se kao 3:10:17. U najvećem jatu lete 72 ptice više nego u oba manja jata zajedno. Koliko je lastavica u najmanjem jatu?

a) 306 b) 206 c) 180 d) 54

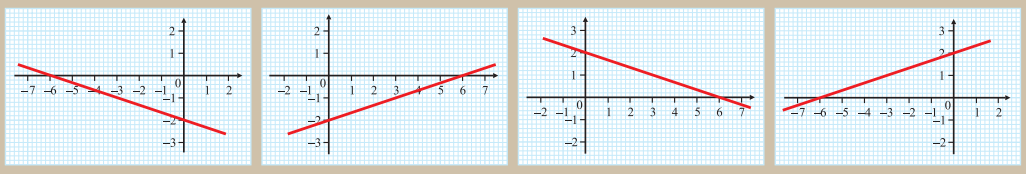
2. ispit (osnovna razina)

1. Koja točka pripada pravcu $y = -2x + 5$?

a) $(0, -5)$ b) $\left(-\frac{5}{2}, 0\right)$ c) $(5, 0)$ d) $\left(\frac{5}{2}, 0\right)$

2. Koji graf prikazuje funkciju $y = \frac{1}{3}x - 2$?

a) b) c) d)



3. Ako je $V = \frac{r^2 \pi v}{3}$, odredite v.

a) $v = \frac{r^2\pi}{3V}$ b) $v = 3V - r^2\pi$ c) $v = \frac{3V}{r^2\pi}$ d) $v = r^2\pi - 3V$

4. Rješenje jednadžbe $\frac{2}{3x} + 5 = \frac{4}{x}$ je:

a) $-\frac{2}{3}$ b) $\frac{2}{3}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$.

5. Rješenje nejednadžbe $\frac{4}{x-2} \geq 0$ je u intervalu:

a) $x \in \langle 2, 6]$ b) $x \in \langle 2, \infty\rangle$ c) $x \in [2, \infty\rangle$ d) $x \in \langle -\infty, 2\rangle$.

6. Rješenje sustava nejednadžbi $3 - 2x \geq 1$, $3x - 1 > -7$ je u intervalu:

a) $\langle -\infty, 1\rangle$ b) $\langle -2, 1\rangle$ c) $\langle -2, 1]$ d) $[-2, \infty\rangle$.

7. Pojednostavnite izraz $\frac{x^2 - 9}{2x^2} \cdot \frac{6x}{9 - 3x}$.

a) $-\frac{x+3}{x}$ b) $\frac{x+3}{x}$ c) $\frac{x-3}{x}$ d) $\frac{x+9}{x}$

8. Tri brata imaju zajedno 63 godine. Koliko godina ima najstariji brat, ako je on od najmlađeg brata stariji dvije godine, a od srednjeg godinu dana?

a) 20 b) 21 c) 22 d) 23

9. Dana je kvadratna jednadžba $ax^2 - 4x + 2 = 0$, $a \in \mathrm{R}$, $a \neq 0$. Za koje realne brojeve a ova jednadžba ima dva različita realna rješenja?

a) $a = 2$ b) $a \in \langle -\infty, 2\rangle$ c) $a \in \langle 2, \infty\rangle$ d) $a \in \langle -2, 2\rangle$

10. Jednadžba $2x^2 - 2x + 2 = 3x$ ima:

a) negativan produkt korijena
b) dvostruki korijen
c) recipročne korijene
d) kompleksne korijene.

3. ispit (osnovna razina)

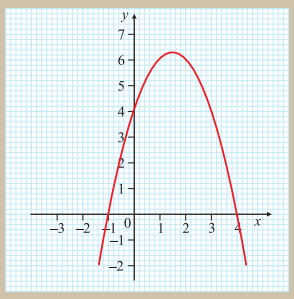
1. U bačvu je utočeno 1 345 l vode. Pritom je 42% bačve ostalo prazno. Koliko litara vode treba uliti da bačva bude puna?

a) 680.63 l b) 967.86 l c) 973.97 l d) 891.85 l

2. Odredite zbroj rješenja jednadžbe $2x^2 + 3x - 2 = 0$.

a) $-\frac{3}{2}$ b) $\frac{3}{2}$ c) $-\frac{5}{2}$ d) $\frac{5}{2}$

3. Graf kvadratne funkcije $f(x) = -x^2 + 3x + 4$ prikazan je na slici. Promatrajući sliku pronađite korijene kvadratne jednadžbe $-x^2 + 3x + 4 = 0$.



a) 4 i 0

b) –1 i 4

c) 6 i $\frac{3}{2}$

d) –1 i 0

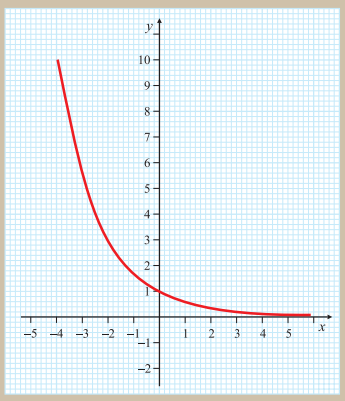
4. Broj $2.15 \cdot 10^{-4}$ jednak je:

a) 0.00215 b) 2.150000 c) 0.000215 d) –21 500.

5. Nakon skraćivanja razlomka $\frac{2x^2 + 5x - 3}{4x - 2}$ dobije se:

a) $\frac{2}{x+3}$ b) $\frac{2x}{x+3}$ c) $\frac{x-3}{2}$ d) $\frac{x+3}{2}$.

6. Za graf na slici vrijedi $f(x) = b^x$. Koja je od sljedećih tvrdnji točna za b?



a) $b > 1$

b) $0 < b < 1$

c) $b < 0$

d) $b < -1$

7. Rješenje jednadžbe $10^x = 0.0001$ je:

a) 3 b) –3 c) 4 d) –4.

8. Kolika je vrijednost funkcije $f(x) = 5x - 2$ za $x = -1$?

a) 3 b) –7 c) –3 d) 7

9. Ako je $R = \frac{2c + b}{3}$, onda je c:

a) $c = \frac{3R + b}{2}$ b) $c = \frac{2R - b}{3}$ c) $c = \frac{3R - b}{2}$ d) $c = 6R - b$.

10. Odredite tjeme parabole $y = x^2 - 4x + 3$.

a) $\left(\frac{1}{2}, 4\right)$ b) (2, –1) c) (–4, –1) d) (–2, –1)

4. ispit (osnovna razina)

1. Koja rečenica opisuje graf $x = 4$?

a) Funkcija prolazi točkom $(0, 4)$.
b) Koeficijent smjera je 4.
c) Paralelan je s y-osi.
d) Paralelan je s x-osi.

2. Izračunajte površinu kruga ako su $A\,(-1, -2)$ i $B\,(4, 2)$ krajnje točke promjera kruga.

a) $\frac{3\pi}{4}$ b) $\frac{23\pi}{4}$ c) $\frac{37\pi}{4}$ d) $\frac{41\pi}{4}$

3. Odredite jednadžbu pravca na kojem leži dužina $\overline{AB}$ ako je $A\,(-2, 4)$ i $B\,(4, -3)$.

a) $y = -\frac{7}{6}x + \frac{5}{3}$ b) $y = -\frac{7}{6}x - \frac{5}{3}$ c) $y = \frac{7}{6}x + \frac{5}{3}$ d) $y = \frac{7}{6}x - \frac{5}{3}$

4. Kako glasi jednadžba pravca koji prolazi točkom $N\,(1, -3)$, a usporedan je s pravcem $2x - 3y + 1 = 0$?

a) $y = -\frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ b) $y = \frac{2}{3}x - \frac{11}{3}$ c) $y = \frac{3}{2}x - \frac{7}{3}$ d) $y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$

5. Odredite udaljenost vrha $A\,(-3, 1)$ od stranice $\overline{BC}$ trokuta ABC ako je $4x + 3y - 8 = 0$ jednadžba pravca na kojem leži stranica $\overline{BC}$.

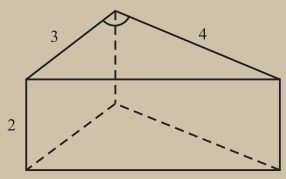
a) 3.4 b) 3.5 c) 3.6 d) 3.7

6. Suma svih unutarnjih kutova pravilnog peterokuta je:

a) 180° b) 360° c) 540° d) 720°.

7. Na slici je komad sira u obliku pravokutne trostrane prizme.
Izračunajte obujam sira ako su mjere na slici zadane u centimetrima.

a) 12 cm^3
b) 18 cm^3
c) 24 cm^3
d) 48 cm^3



8. Kolika je visina pravilne četverostrane piramide osnovnog brida $a = 4.2$ cm i obujma $V = 52.92$ cm^3?

a) 7 cm b) 8.4 cm c) 9 cm d) 12.6 cm

9. Medicinska kapsula je valjak s pola sfere na svakom kraju. Duljina valjka je 12 mm, a polumjer je 2 mm.
Koliko kubičnih milimetara lijeka stane u jednu kapsulu?
(Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj)

a) 120 mm^3 b) 164 mm^3 c) 184 mm^3 d) 210 mm^3

10. Jednadžbe $5x + 2y = 48$ i $3x + 2y = 32$ predstavljaju iznos u kunama dobiven prodajom ulaznica za sportsku priredbu na dvama prodajnim mjestima. Ako x predstavlja cijenu ulaznice za odrasle, a y za djecu, kolika je cijena ulaznice za odrasle?

a) 6 kn b) 8 kn c) 10 kn d) 16 kn

Završni 5. ispit (osnovna razina)

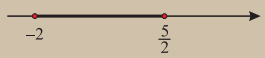
1. Četvorica prijatelja zajedno su uređivali stari automobil. Ivan je radio $\frac{1}{6}$ ukupno utrošenog vremena, Marko $\frac{1}{3}$, Goran $\frac{1}{4}$, a Darko 25% utrošenog vremena. Tko je radio najviše?

a) Ivan b) Marko c) Goran d) Darko

2. Koji interval predstavlja presjek zatvorenih intervala prikazanih na brojevnim pravcima na slici?

a) $[-2,4]$ b) $[-2,-1]$

c) $\left[-1,\frac{5}{2}\right]$ d) $[-1,4]$



3. Pri upisu na fakultet Kristina je za uspjeh u srednjoj školi dobila 240 bodova, a na prijemnom ispitu zaradila je 190 bodova. Ako je maksimalan broj bodova koji je mogla imati 600, koliki postotak bodova ima Kristina?

a) 31.67% b) 40% c) 66.67% d) 71.67%

4. Izraz $(2-3x)^2$ jednak je:

a) $4-6x+9x^2$ b) $4-6x-9x^2$ c) $4-12x+9x^2$ d) $4-12x-9x^2$.

5. Ako je $8x-2y-4=0$, koliko je y?

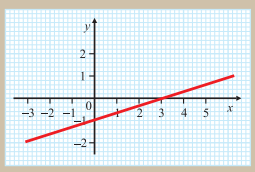
a) $y=4x-2$ b) $y=\frac{1}{4}x-2$ c) $y=-4x+2$ d) $y=-\frac{1}{4}x+2$

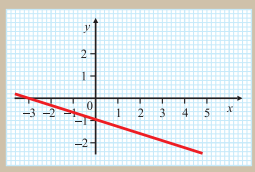
6. Koji je interval rješenje nejednadžbe $2-3x<4$?

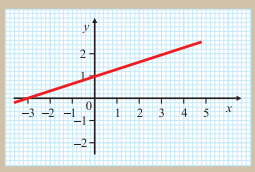
a) $\left\langle -\infty,-\frac{2}{3}\right\rangle$ b) $\left\langle -\frac{2}{3},\infty\right\rangle$ c) $\left\langle -\infty,\frac{2}{3}\right\rangle$ d) $\left\langle \frac{2}{3},\infty\right\rangle$

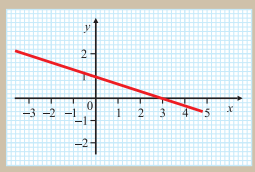
7. Koji graf prikazuje funkciju $f(x)=-\frac{1}{3}x+1$?

a) b) c) d)









8. Koliko je $\frac{1-a}{a}-\frac{1-b}{b}$?

a) $\frac{2-a-b}{ab}$ b) $\frac{2-a+b}{ab}$ c) $\frac{b-a}{ab}$ d) $\frac{-a-b}{ab}$

9. 57.4° jednako je:

a) 57° 20’ b) 57° 24’ c) 57° 36’ d) 57° 40’.

10. Izraz $0.62\cdot 10^3$ jednak je:

a) 0.062 b) 62.000 c) $6.2\cdot 10^4$ d) $6.2\cdot 10^2$.

11. Baza prizme je kvadrat duljine stranice 11 cm, a duljina visine prizme je 20 cm. Koliki je obujam prizme?

a) 2 220 cm^3 b) 220 cm^3 c) 2 420 cm^3 d) 4 400 cm^3

12. U jednadžbi $10\cdot 10^{x-3}=0.001$, nepoznanica x jednaka je:

a) –1 b) – 2 c) –3 d) – 4.

13. Iznajmljivanje čamca naplaćuje se 45 kuna na početku i na kraju još po 15 kuna za svaki započeti sat korištenja. Marin je iznajmio čamac u 11:45, a vratio ga je u 17:20. Koliko je ukupno kuna platio iznajmljivanje čamca?

a) 125 kn b) 140 kn c) 160 kn d) 135 kn

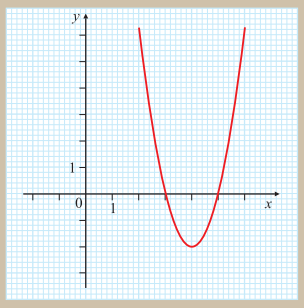
14. Zbroj znamenaka nekog dvoznamenkastoga broja je 11, a razlika 5. Koji je to broj?

a) 29 b) 38 c) 83 d) 92

15. Dvije prijateljice, Ana i Marija, stoje u školskom dvorištu. Ana je visoka 154 cm i pravi sjenu duljine 98 cm. U isto vrijeme Marijina sjena duga je 84 cm. Koliko je visoka Marija?

a) 128 cm b) 132 cm c) 138 cm d) 180 cm

16. Koju funkciju prikazuje graf prikazan na slici?



a) $f(x)=(x+4)^2+2$

b) $f(x)=(x+4)^2-2$

c) $f(x)=(x-4)^2+2$

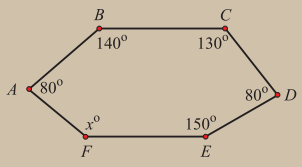
d) $f(x)=(x-4)^2-2$

17. Izračunajte vrijednost izraza $\dfrac{\frac{1}{2}-3\left(\frac{2}{3}+1\right)}{\left(2-\frac{3}{4}\right)+0.1}$.

18. Riješite jednadžbu $\dfrac{3x-1}{2}=\dfrac{1}{2}+x$.

19. Srećko je kupio bon za mobitel u vrijednosti 50 kuna. Koliko će minuta moći razgovarati, ako je cijena razgovora 1.15 kuna po minuti? (Rezultat zaokružite na najbliži cijeli broj.)

20. Odredite vrijednost kuta x u mnogokutu na slici.



21. U koordinatnom sustavu prikažite graf linearne funkcije $f(x)=\dfrac{1}{2}x-3$.

22. Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2+5x+6=0$.

23. U trgovini se prodaju 15-dekagramske vrećice s mješavinom badema i lješnjaka. Jednadžbom $C=2.59b+1.72(8-b)$ određuje se cijena vrećice (u kunama) u ovisnosti o količini badema b u dekagramima. Ako je cijena jedne vrećice 18.11 kuna, koliko dekagrama lješnjaka je u vrećici?

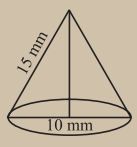
24. Riješite sustav $\begin{cases}5x+4y=2\\7x-3y=-23.\end{cases}$

25. Put s prijeđen konstantnom brzinom v proporcionalan je vremenu t. Dopunite sljedeću tablicu.

vrijeme t	1 h 45 min		2 h 15 min
put s	140 km	280 km	

26. Jeste li znali da, ako bismo izbrojili koliko puta cvrčak zacvrči u minuti, zatim taj broj podijelili s dva, pa dodali devet i opet podijelili s dva, dobili bismo točnu temperaturu na kojoj se cvrčak nalazi izraženu u Celzijevim stupnjevima. Kolika je temperatura ako je cvrčak zacvrčao 86 puta u minuti?

27. Odredite visinu stošca na slici.
(Rezultat zaokružite na dvije decimale.)



28. Loptica za golf ispucana u zrak dostigne visinu modeliranu jednadžbom $h=-16t^2+48t$, gdje je h visina na kojoj se loptica nalazi u metrima, a t vrijeme u sekundama proteklo od ispucavanja loptice.

a) Na kojoj je visini loptica dvije sekunde nakon ispucavanja?

b) Nakon koliko će sekundi loptica pasti na zemlju?

1. ispit (viša razina)

1. U kojem su nizu brojevi zapisani redom od većeg prema manjem?

a) $\sqrt{10}, \frac{22}{7}, \pi, 3.13$ b) $3.13, \frac{22}{7}, \pi, \sqrt{10}$ c) $\pi, \frac{22}{7}, 3.13, \sqrt{10}$ d) $3.13, \pi, \frac{22}{7}, \sqrt{10}$

2. Koliko je jedna trećina od 3^6 ?

a) 1^3 b) 1^6 c) 3^3 d) 3^5

3. Izračunajte: $\left[\left(\left(-4+\frac{7}{5}\right):\left(2-\frac{7}{5}\right)+\left(-\frac{1}{2}+\frac{7}{3}-3\right):\frac{5}{2}\right]:\left(-\frac{7}{15}+1\right)$.

a) 9 b) 11 c) –9 d) –11

4. Izraz $\frac{4}{\sqrt{5}-\sqrt{13}}$ ekvivalentan je:

a) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{-2}$ b) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{13}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{8}$ d) $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{13}}{-8}$.

5. Kompleksni broj $\frac{4i}{2+i}$ jednak je:

a) $\frac{4}{3}-\frac{5}{3}i$ b) $\frac{4}{3}+\frac{5}{3}i$ c) $\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i$ d) $\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$.

6. Vrijednost izraza $\frac{x^2-16}{2x^2+4x}\cdot\frac{x^2+9x+14}{x^2+2x-8}:\frac{x^2+3x-28}{16x-8x^2}$ je:

a) 4 b) 2 c) 0 d) – 4.

7. Odredite vrijednost broja $n \in N$ u jednadžbi $\frac{5!}{6!}=\frac{1}{n+1}$.

a) $\frac{5}{6}$ b) $\frac{1}{5}$ c) $\frac{1}{6}$ d) 5

8. Koji je interval rješenje nejednadžbe $|4x+8|>16$?

a) $-6<x<2$ b) $-2<x<6$ c) $x<-6$ ili $x>2$ d) $x<-2$ ili $x>6$

9. Dario, Sven i Mirna zajedno su kupili bicikl koji košta 750 kuna. Iznose koji su dali Dario i Sven odnose se kao 2:3, a iznose koji su dali Dario i Mirna kao 4:5. Koliko je za bicikl platio Dario?

a) 100 kn b) 150 kn c) 200 kn d) 250 kn

10. Marko radi u agenciji za zaštitu okoliša koja se bavi područjima koja su onečišćena otrovnim otpadom. Onečišćeno tlo obuhvaća površinu od 1.62 hektara (1 hektar = 10 000 kvadratnih metara). Marko je istražio da se mora ukloniti tlo s te površine do dubine 45 cm.

10.1. Kolika je površina onečišćenog tla u kvadratnim metrima?

a) 162 b) 1 620 c) 16 200 d) 162 000

10.2. Kolika je ukupna količina kontaminiranog tla u kubnim metrima?

a) 729 b) 7 290 c) 72 900 d) 729 000

10.3. Ako kamion može natovariti 10 kubičnih metara zemlje, koliko će kamiona biti potrebno za odvoz kontaminiranog tla?

a) 72 900 b) 7 290 c) 729 d) 73

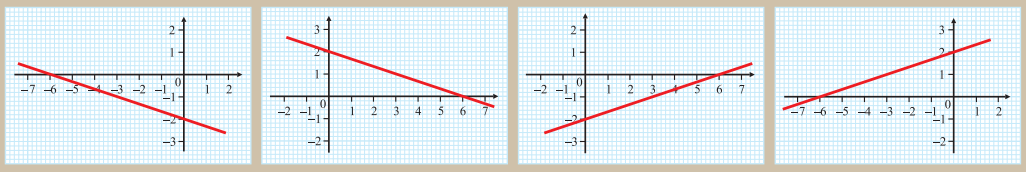
2. ispit (viša razina)

1. Koja točka pripada pravcu $y = -\frac{1}{5}x + 3$?

a) $(0, 15)$ b) $\left(-\frac{3}{5}, 0\right)$ c) $(15, 0)$ d) $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$

2. Koji graf prikazuje funkciju $y = -\frac{1}{3}x - 2$?

a) b) c) d)



3. Ako je $P_i = \frac{\pi\alpha}{360}\left(R^2 - r^2\right)$ odredite formulu za r.

a) $\sqrt{R^2 + \frac{360P_i}{\pi\alpha}}$ b) $R^2 + \frac{360P_i}{\pi\alpha}$ c) $\sqrt{R^2 - \frac{360P_i}{\pi\alpha}}$ d) $\sqrt{360P - R^2\pi\alpha}$

4. Rješenje nejednadžbe $\frac{4}{x-2} \geq 1$ je u intervalu:

a) $x \in \langle 2, 6]$ b) $x \in \langle 2, 6\rangle$ c) $x \in [2, 6]$ d) $x \in [2, 6\rangle$.

5. Rješenje sustava nejednadžbi $-4 \leq 3 - 2x \leq 0$ je u intervalu:

a) $x \in \left\langle -\infty, \frac{7}{2}\right]$ b) $x \in \left\langle -\infty, \frac{3}{2}\right] \cup \left[\frac{7}{2}, +\infty\right\rangle$ c) $x \in \left\langle \frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right\rangle$ d) $x \in \left[\frac{3}{2}, \frac{7}{2}\right]$.

6. Riješite jednadžbu $\frac{2x+1}{x+1} + \frac{2x-1}{1-x} = \frac{-3}{x^2-1}$.

a) $\frac{1}{2}$ b) $-\frac{1}{2}$ c) $\frac{3}{2}$ d) $-\frac{3}{2}$

7. Grupa mladića i djevojaka ide na izlet. U grupi je 30 mladića. Sve djevojke i 28 mladića čine 95% ukupnog broja mladih u grupi. Koliko je djevojaka u grupi?

a) 8 b) 9 c) 10 d) 11

8. Rješenje jednadžbe $\frac{|x|+2}{x-2} = \frac{7}{3}$ je:

a) $x_1 = 2, x_2 = 5$ b) $x = 5$ c) $x = 2$ d) $x = -2$.

9. Graf funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ siječe os apscisa u 5, a os ordinata u -15, te prolazi točkom $A(-1, -6)$. Zbroj svih koeficijenata te funkcije je:

a) -40 b) -20 c) 0 d) 20.

10. Riješite nejednadžbu $3x^2 - 7x + 4 \leq 0$.

a) $\langle -\infty, 1] \cup \left[\frac{4}{3}, \infty\right\rangle$ b) $\langle -\infty, 1]$ c) $x \in \left[1, \frac{4}{3}\right]$ d) $[3, 4]$

3. ispit (viša razina)

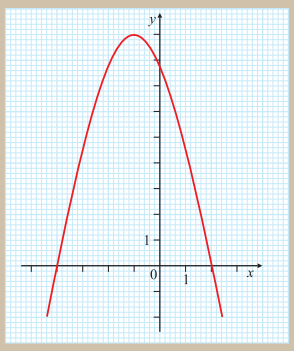
1. Neka su $z_1 = 6i - 2i^2 + i^3$, $z_2 = (2-i)(-1+i)$ i $z_3 = \dfrac{12-i}{1+2i}$. Koji su od zadanih brojeva u drugom kvadrantu?

a) z_1 b) z_2 c) z_3 d) z_2 i z_3

2. Odredite $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2}$ ako su x_1 i x_2 rješenja jednadžbe $2x^2 - 13x + 17 = 0$.

a) $-\dfrac{13}{17}$ b) $\dfrac{13}{17}$ c) $-\dfrac{17}{2}$ d) $\dfrac{17}{13}$

3. Graf kvadratne funkcije $f(x) = ax^2 + bx + c$ prikazan je na slici. Promatrajući sliku odredite njenu jednadžbu.



a) $f(x) = -x^2 - 2x + 8$

b) $f(x) = x^2 - 2x + 8$

c) $f(x) = -x^2 - 2x - 8$

d) $f(x) = x^2 - 2x - 8$

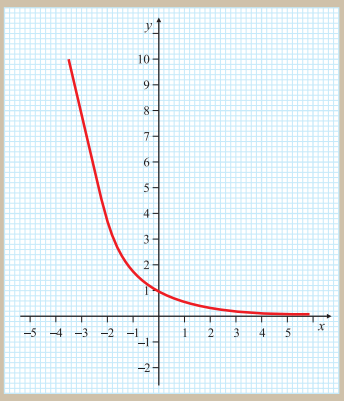
4. Rješenje nejednadžbe $-2x^2 + 3x + 5 > 0$ je:

a) $-1 < x < 2.5$ b) $-2.5 < x < 1$ c) $x < -1$ ili $x > 2.5$ d) $x < -2.5$ ili $x > 1$.

5. Rješenje jednadžbe $e^{2x} - 2e^x - 15 = 0$ je:

a) $\ln 5$ b) -3 c) $x_1 = \ln 5, x_2 = -3$ d) 0.

6. Za graf na slici vrijedi $f(x) = b^x$. Koja je od sljedećih tvrdnji točna za b?



a) $b = -1$

b) $b = 0$

c) $b = \dfrac{1}{2}$

d) $b = 2$

7. Rješenje (zaokruženo na tri decimalna mjesta) jednadžbe $10^x = 5$ je:

a) 0.699 b) 0.698 c) 0.545 d) 1.431.

8. Izraz $y = \log_7 x$ jednak je izrazu:

a) $y = 7^x$ b) $x = 7^y$ c) $x = 7 \log y$ d) $y = \log x^7$.

9. Rješenje jednadžbe $\log_3 (x + 1) = 2$ je:

a) 6 b) 7 c) 8 d) 9.

10. Presjek pravca $3x + y - 3 = 0$ i parabole $y = x^2 - 4x + 3$ je:

a) $(1, 0)$ b) $(0, 3)$ c) $(1, 0), (0, 3)$ d) $(1, 3)$.

4. ispit (viša razina)

1. Točka $A(-2,7)$ jedan je vrh trokuta, a polovište stranice $\overline{AB}$ je $P\left(-\frac{7}{2},\frac{9}{2}\right)$. Odredite vrh B trokuta.

a) $(-5,2)$ b) $(4,-3)$ c) $(5,2)$ d) $(2,-5)$

2. U trokutu ΔABC dani su vrhovi $A(-2,4)$, $B(4,-3)$ i $C(1,5)$. Odredite površinu trokuta.

a) $\frac{23}{2}$ b) $\frac{27}{2}$ c) $\frac{31}{2}$ d) 17

3. Odredite jednadžbu pravca na kojem leži dužina $\overline{BC}$ ako su $B(4,-3)$ i $C(1,5)$.

a) $y=\frac{8}{3}x+\frac{23}{3}$ b) $y=\frac{8}{3}x-\frac{23}{3}$ c) $y=-\frac{8}{3}x+\frac{23}{3}$ d) $y=-\frac{8}{3}x-\frac{23}{3}$

4. Nađite jednadžbu pravca koji prolazi točkom $(4,2)$ i okomit je na pravac $y=-\frac{1}{2}x+3$.

a) $y=-\frac{1}{2}x+4$ b) $y=2x-6$ c) $y=2x+3$ d) $y=-2x-6$

5. Odredite najveći kut trokuta ΔABC ako su vrhovi trokuta $A(-1,-2)$, $B(4,-1)$ i $C(3,2)$.

a) 82° 52’ b) 76° 35’ c) 82° 87’ d) 71° 42’

6. Dva vrha paralelograma su $A(-3,-1)$ i $B(1,-3)$, a sjecište dijagonala je $S\left(-\frac{1}{2},0\right)$. Odredite vrh D.

a) $(2,1)$ b) $(5,2)$ c) $(-2,3)$ d) $(2,3)$

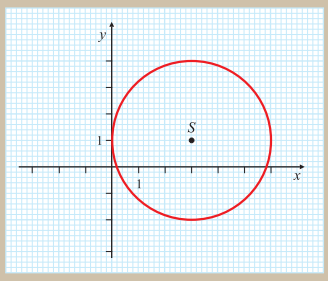
7. Na slici je nacrtan graf krivulje:

a) $(x+3)^2+(y+1)^2=9$

b) $(x-3)^2+(y-1)^2=9$

c) $(x+3)^2+(y-1)^2=3$

d) $(x-3)^2+(y-1)^2=3$.



8. Koja je od navedenih jednadžbi elipsa?

a) $2x^2+4=2y^2$ b) $xy=6$ c) $4x^2+4y^2=25$ d) $7x^2+3y^2=9$

9. Nacrtajte graf parabole zadane jednadžbom $y=x^2-2x-8$ na intervalu $-3\le x\le 5$ i kružnicu sa središtem $(1,-5)$ te polumjerom 4. Koristeći grafove odgovorite u koliko se točaka ova dva grafa sijeku.

a) U jednoj točki. b) U dvjema točkama. c) U trima točkama. d) U četirima točkama.

10. Vakuumom svjetlost putuje brzinom približno $3\cdot 10^8$ m/s.

10.1. Koliki put svjetlost prevali u jednom tjednu?

a) $1.8144\cdot 10^{14}$ m b) $1.8144\cdot 10^{13}$ m c) $1.8144\cdot 10^{12}$ m d) $1.8144\cdot 10^{11}$ m

10.2. Ako je jedna svjetlosna godina udaljenost koju svjetlost prijeđe za godinu dana, koliko kilometara ima u jednoj svjetlosnoj godini?

a) $9.4608\cdot 10^{11}$ km b) $9.4608\cdot 10^{12}$ km c) $9.4608\cdot 10^{13}$ km d) $9.4608\cdot 10^{14}$ km

5. ispit (viša razina)

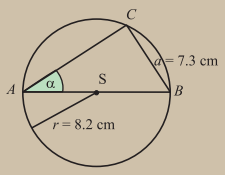
1. Stranice trokuta ΔABC su $a = 3.2$ cm, $b = 5.4$ cm i $c = 6.8$ cm. Stranica b_1 sličnog trokuta $\Delta A_1B_1C_1$ duga je 8.1 cm. Odredite opseg trokuta $\Delta A_1B_1C_1$.

a) 18.3 cm b) 19.9 cm c) 22.5 cm d) 23.1 cm

2. Mjere kutova trokuta su u omjeru 4:2:9, a duljina najkraće stranice je 7 cm. Koliki je opseg trokuta zaokružen na jednu decimalu?

a) 27.8 cm b) 36.2 cm c) 39.1 cm d) 44.4 cm

3. U kružnicu polumjera $r = 8.2$ cm upisan je trokut ΔABC kojem je stranica $a = 7.3$ cm. Odredite kut α.

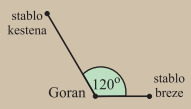


a) 26° 25' 52'' b) 27° 5' 46''
c) 62° 54' 14'' d) 63° 34' 8''

4. Odredite površinu jednakokračnog trapeza ako su mu duljine osnovica 9.4 cm i 6.2 cm, a šiljasti kut 67°.

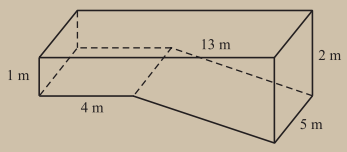
a) 29.4 cm^2 b) 30.2 cm^2 c) 30.9 cm^2 d) 32.3 cm^2

5. Goran stoji u parku na udaljenosti 50 metara od stabla kestena i 30 metara od stabla breze, kao što je prikazano na slici. Ako je tijelom okrenut prema stablu kestena, mora zaokrenuti glavom za 120° da bi gledao u stablo breze. Koliko metara su udaljena stabla kestena i breze?



a) 58.3 m b) 65.2 m c) 70 m d) 75 m

6. Bazen ima oblik kao na slici. Odredite maksimalnu količinu vode koja stane u bazen (u litrama).
(1 litra = 1 dm^3)

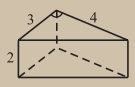


a) 65 500 b) 87 500
c) 105 500 d) 125 500

6.1. Unutrašnjost bazena treba prekriti pločicama kvadratnog oblika stranice 25 cm. Koliko je komada pločica za to potrebno?

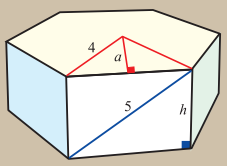
a) 1 445 b) 1 665
c) 1 845 d) 2 045

7. Na slici je komad sira u obliku pravokutne trostrane prizme. Odredite koliko je papira potrebno za pakiranje sira ako su mjere zadane u centimetrima.



a) 18 cm^2 b) 24 cm^2
c) 36 cm^2 d) 48 cm^2

8. Odredite obujam pravilne šesterostrane prizme sa slike.



a) 41.6 cm^2 b) 124.7 cm^2
c) 128.4 cm^2 d) 203.6 cm^2

9. Baza četverostrane piramide je kvadrat stranice 8 cm, a kut koji pobočka zatvara s ravninom baze je 75°. Odredite oplošje ove piramide.

a) 277.9 cm^2 b) 299.3 cm^2 c) 302.9 cm^2 d) 311.2 cm^2

10. Medicinska kapsula je valjak s pola sfere na svakom kraju. Duljina valjka je 12 mm, a polumjer je 2 mm. Ako lijek koji se koristi za popunjavanje kapsule stoji 0.04 kune po kubičnom milimetru, koliki je trošak za količinu lijeka potrebnu za punjenje trideset kapsula? (Rezulltat zaokružite na cijeli broj.)

a) 121 kn b) 188 kn c) 221 kn d) 249 kn

6. ispit (viša razina)

1. Iz točke koja je 100 m iznad razine tla, kut elevacije prema vrhu zgrade je 50°, a kut depresije prema podnožju zgrade je 40°. Kolika je visina zgrade?

a) 212 m b) 222 m c) 232 m d) 242 m

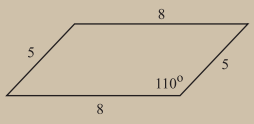
2. Dva vlaka napuste željezničku stanicu u isto vrijeme u dvama različitim smjerovima tračnica koje tvore kut od 156°. Njihove brzine su 13 m/s i 14.5 m/s. Odredite udaljenost vlakova nakon pet minuta.

a) 7.07 km b) 8.07 km c) 9.07 km d) 10.07 km

3. Mario je odlučio iskoristiti betonske pločice oblika paralelograma (na slici) kako bi popločao prilaznu stazu u vrtu. Staza koju treba popločati dugačka je 5 metara, a široka 56 cm. Koliko je betonskih pločica potrebno da bi se staza popločala, ako su mjere pločice dane u centimetrima?

a) 700 b) 724

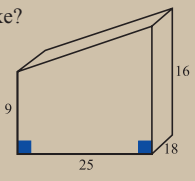
c) 745 d) 775



4. Pod kojim je kutom u odnosu na ravninu osnovke nagnuta gornja strana kutije sa slike?

a) 15° 38' 32'' b) 74° 21' 28''

c) 29° 21' 28'' d) 22° 25' 30''



5. Izraz $\cos(-240^\circ)$ ekvivalentan je izrazu:

a) $\sin 60^\circ$ b) $\cos 60^\circ$ c) $-\sin 60^\circ$ d) $-\cos 60^\circ$.

6. Ako je $\sin x = \frac{4}{5}$, $\frac{\pi}{2} \le x < \pi$, i $\cos y = -\frac{1}{4}$, $\frac{\pi}{2} \le y < \pi$, odredite koliko je $\sin(x-y)$.

a) $\frac{-2+\sqrt{15}}{10}$ b) $\frac{2+\sqrt{15}}{10}$ c) $\frac{-2-\sqrt{15}}{10}$ d) $\frac{2-\sqrt{15}}{10}$

7. Odredite vrijednost kuta α, $\frac{\pi}{2} \le \alpha \le \frac{3\pi}{2}$, koji zadovoljava jednadžbu $2\sin\alpha + 1 = 0$.

a) $\alpha = \frac{2\pi}{3}$ b) $\alpha = \frac{5\pi}{3}$ c) $\alpha = \frac{5\pi}{6}$ d) $\alpha = \frac{7\pi}{6}$

8. Koliko rješenja ima jednadžba $\sin 4x = \sin 2x$ na intervalu $[0, 2\pi\rangle$?

a) 8 b) 6 c) 4 d) 2

9. Sređivanjem izraza $\frac{4\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \cos 2\alpha}{\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha} \cdot ctg\, 4\alpha$ dobiva se:

a) $\sin 4\alpha$ b) $\cos 4\alpha$ c) 1 d) 4.

10. Rješenje nejednadžbe $2\cos 3x \le \sqrt{2}$ na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2}\right\rangle$ je:

a) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right]$ b) $\left[\frac{\pi}{12}, \frac{7\pi}{12}\right]$ c) $\left[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\right]$ d) $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

7. ispit (viša razina)

1. U nekom razredu 16 učenika pjeva u zboru, 7 učenika igra nogomet, 3 učenika i pjeva i igra nogomet, a 9 učenika ne pjeva u zboru i ne igra nogomet. Koliko učenika ima u razredu?

a) 10 b) 26 c) 29 d) 35

2. Skijaški skakač Petar na treningu je skočio četiri puta i dosegnuo ove daljine: 112 m, 127 m, 117 m i 112 m. Koliko metara Petar mora skočiti na treningu u petom skoku da bi mu prosječan skok bio dužine 118 metara?

a) 121 m b) 122 m c) 123 m d) 124 m

3. U aritmetičkom nizu a_1, a_2, 5, a_4, 13,... odredite a_{1234}.

a) 485 b) 3 696 c) 4 929 d) 4 933

4. Drugi član geometrijskog niza je 6, a peti član 162. Odredite sumu prvih petnaest članova toga niza.

a) 14 348 906 b) 4 782 968 c) 9 565 936 d) 9 565 937

5. Domena funkcije $f(x)=\frac{4x}{\sqrt{x-4}}$ je:

a) $x>0$ b) $x<4$ c) $x\geq 4$ d) $x>4$.

6. Koliko je $(f\circ g)(7)$, ako je $f(x)=\frac{3x^2-1}{3-x}$, a $g(x)=\log_7 x^2$?

a) 7 b) 9 c) 11 d) 13

7. Odredite derivaciju funkcije $f(x)=\frac{1}{3}x^4-2x^2+x+1$.

a) $f'(x)=\frac{4}{3}x^3-4x+1$ b) $f'(x)=\frac{4}{3}x^3-4x+x$ c) $f'(x)=\frac{2}{3}x^3-2x+1$ d) $f'(x)=\frac{1}{3}x^3-2x+1$

8. Odredite jednadžbu tangente na graf funkcije $f(x)=2\cos x-\sin x$ u njenoj točki s apscisom $x=\frac{\pi}{2}$.

a) $y=-2x+\pi+1$ b) $y=\frac{1}{4}x-3$ c) $y=2x-\pi-1$ d) $y=-2x+\pi-1$

9. Odredite interval (intervale) rasta funkcije $f(x)=x^4+2x^2-3$.

a) $\langle-\infty,0\rangle$ b) $\langle-\infty,-1\rangle\cup\langle 1,\infty\rangle$ c) $\langle 0,\infty\rangle$ d) $\langle-1,1\rangle$

10. Odredite ekstreme funkcije $f(x)=x^3-3x+2$. Nacrtajte graf funkcije.

a) $M(-1,4)$, $m(1,0)$ b) $M(-2,0)$, $m(1,0)$ c) $M(-1,4)$, $m(0,2)$ d) $m(0,2)$

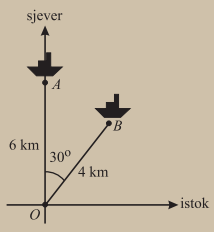
Završni 8. ispit (viša razina)

1. Pogledajte sljedeće nizove brojeva:
1.1, 1.11, 1.111, 1.1111, ….
3, 6, 12, 24, …..
$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots..$
27, 9, 3, 1, …
Koliko je među njima geometrijskih nizova?

A. 0 B. 1 C. 2 D. 3

2. Dva broda promatramo iz točke O. U određenom trenutku njihova pozicija je kao na slici. Udaljenost među brodovima je u tom trenu:

A. 3 km
B. 3.2 km
C. 4.5 km
D. 9.7 km.



3. Bridovi kocke su duljine 4 m. Točka M polovište je brida $\overline{DC}$. Kut $\sphericalangle EMF$ je:

A. 41° 49’ B. 48° 12’ C. 49° 6’ D. 54° 42’.

4. Jednadžba normale na krivulju $y = 2x^{\frac{3}{2}}$ u točki s apscisom 4 dana je jednadžbom:

A. $y = -\frac{1}{16}x + \frac{50}{3}$ B. $y = 6x - 18$ C. $y = 6x - 8$ D. $y = 6x + 40$.

5. Ako je $y = 3a^{2x} + b$, tada je x jednako:

A. $\frac{1}{6}\log_a(y-b)$ B. $\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{y-b}{3}\right)$ C. $\frac{1}{6}\log_a\left(\frac{y}{b}\right)$ D. $\frac{1}{2}\log_a\left(\frac{3y}{b}\right)$.

6. Riješenje jednadžbe $\frac{x-12}{x^2+3x} - \frac{2}{x} = \frac{5}{x+3}$ je:

A. –1 B. nema rješenja C. –3 D. –2.

7. Kolika je najmanja vrijednost polinoma $p(x) = 4x^2 - 3x + 8$?

A. $\frac{119}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. 8 D. 9

8. Pretpostavimo da su x i y različiti brojevi. Njihov zbroj, razliku i umnožak označimo redom sa Z, R i U. Znamo da je $\frac{Z}{R} = 7$ i $\frac{U}{R} = 24$. Kolika je vrijednost U?

A. 42 B. 31 C. 28 D. 48

9. Kolika je vrijednost $81^{-(2^{-2})}$?

A. $\frac{1}{9}$ B. 43 046 721 C. $\frac{1}{3}$ D. 6 561

10. Ako je $4^x = 8^y$ i $3^y = 2 \cdot 3^x$, koliko je y?

A. $\frac{\log 2}{\log 3}$ B. $\frac{2\log 3}{\log 2}$ C. –2 D. $\frac{-2\log 2}{\log 3}$

11. Formula koja se koristi u istraživanju crnih rupa je tzv. Schwarzschild formula $R = \frac{2GM}{c^2}$. Koristeći pravila logaritmiranja, $\log R$ možemo prikazati sa:

A. $2\log G + \log M - \log 2c$ B. $\log 2G + \log M - \log 2c$
C. $\log 2 + \log G + \log M - 2\log c$ D. $2\log GM - 2\log c$.

12. U trokutu ΔABC, mjera kuta kod vrha A je 30°, stranica $a = 14$ i stranica $b = 20$. Kut kod vrha B je:

A. tupi B. šiljasti C. pravi D. može biti i tupi i šiljasti.

13. Ako je $\log_5 x = 2$, vrijednost $\sqrt{x}$ je:

A. $2^{\frac{2}{5}}$ B. $\sqrt{5}$ C. 5 D. 25.

14. Zbroj brojeva $\sqrt{27}$ i $\sqrt{108}$ je:

A. $\sqrt{135}$ B. $9\sqrt{3}$ C. $3\sqrt{3}$ D. $4\sqrt{27}$.

15. Vrijednost d zaokružena na jedno decimalno mjesto iznosi 5.7. Koji interval predstavlja mjesto prave vrijednosti broja d prije zaokruživanja?

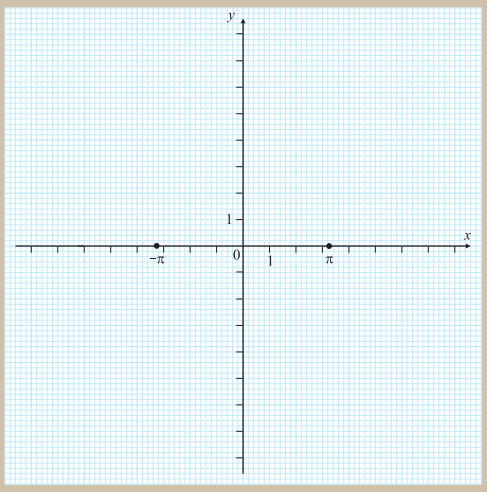
A. $5.65 \le d \le 5.75$ B. $5.65 \le d < 5.75$ C. $5.65 < d \le 5.75$ D. $5.65 \le d \le 5.74$

16. Neka su $f(x) = x^2 + 1$ i $g(x) = 2x + 1$. Odredite $f(g(x))$.

17. Zadana je funkcija $f : [-\pi, \pi] \to R$, $f(x) = 5\cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{3}\right)\right)$.

a) Odredite amplitudu i period funkcije.

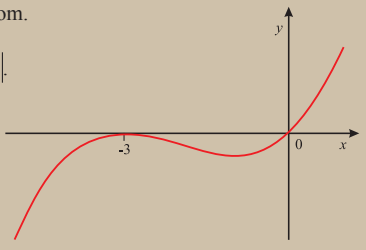
b) Nacrtajte graf funkcije na intervalu $[-\pi, \pi]$ i odredite koordinate nultočaka, točaka minimuma i točaka maksimuma.



18. Graf funkcije $f : [-5, 1] \to R$, gdje je $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$, dan je slikom.

a) U istom koordinatnom sustavu nacrtajte graf funkcije $g(x) = |f(x)|$.

b) U kojem intervalu je slika funkcije $g(x)$ na domeni $[-5, 1]$?



19. Tvornice A, B i C proizvode redom 500, 800 i 1 200 automobila tjedno.

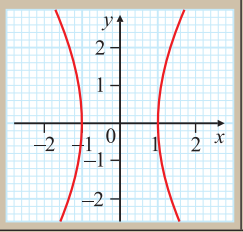
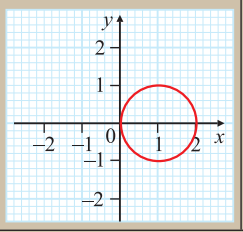
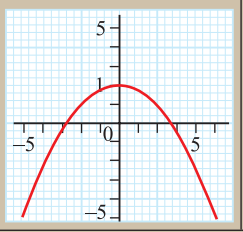
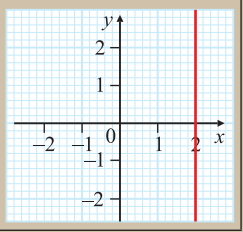
a) Koji će postotak automobila biti proizveden u tvornici A?

b) Koji će postotak automobila biti proizveden u tvornici A, ako udvostruče svoju proizvodnju?

20. Odredite $|z|$ ako je $z = (-1 + 2i)^3$.

21. Odredite koordinate fokusa krivulje $x^2 + 4y^2 = 4$.

22. Povežite napisane jednadžbe s grafom krivulje. Ispod svakog grafa napišite odgovarajuće slovo.

a) $x = 2$	b) $y = -\frac{2}{9}x^2 + 2$	c) $x^2 - \frac{y^2}{5} = 1$	d) $(x-1)^2 + y^2 = 1$
			

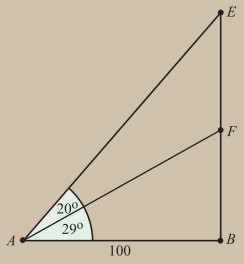
23. Zadani su vektori $\vec{v} = 3\vec{i} - \vec{j}$, $\vec{u} = 2\vec{i} + 5\vec{j}$.

a) Grafički odredite $\vec{v} + \vec{u}$.

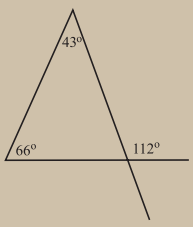
b) Izračunajte $2\vec{v} - 3\vec{u}$.

c) Odredite jedinični vektor iste orijentacije kao vektor $\vec{v}$.

24. Odredite udaljenost točaka E i F na slici.



25. Objasnite što nije točno na slici.



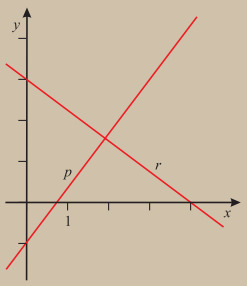
26. Pravci p i r su okomiti.

a) Odredite jednadžbu pravca r.

b) Odredite jednadžbu pravca p.

c) Odredite sjecište ovih dvaju pravaca.

d) Odredite duljinu odsječka kojeg na pravcu r odsijecaju koordinatne osi.



27. Zadana je funkcija $f(x) = -x^2 + 3x + 1$.

a) Izračunajte $f(-2)$.

b) Odredite nultočke funkcije.

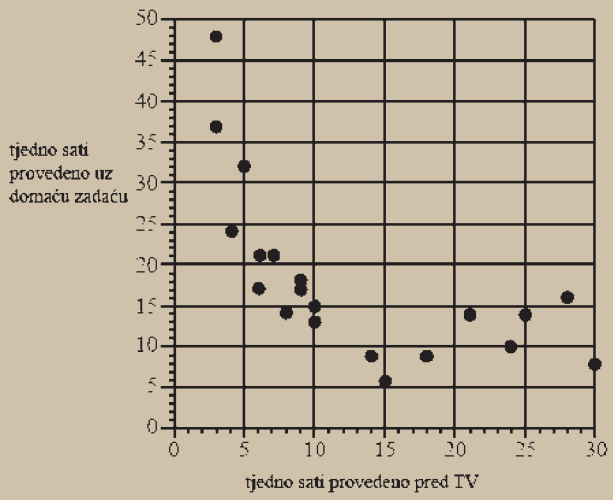
c) Riješite jednadžbu $f(x) = 3$.

d) Riješite nejednadžbu $f(x) \leq 3$.

28. Agencija za iznajmljivanje automobila „Brzo i jeftino“ iznajmljuje automobile uz naknadu od 320 kuna plus 40 kuna po satu, a agencija „Sigurno i jeftino“ ima naknadu od 200 kuna plus 60 kuna po satu. Pod kojim uvjetom će unajmljivanje automobila od agencije „Brzo i jeftino“ biti povoljnije?

29. Broj sati provedenih radeći domaću zadaću (sati uz domaću zadaću) i broj sati provedenih gledajući televiziju (TV sati) zabilježeni su za grupu od 12 studenata. Rezultati su prikazani u tablici i grafom.

TV sati	*sati uz domaću zadaću*
6	17
28	16
14	9
6	21
9	17
30	8
10	15
3	48
3	37
18	9
7	21
9	18
4	24
25	14
8	14
24	10
21	14
5	32
15	6
10	13



a) Koliko studenata provede više od 15 sati tjedno gledajući TV?

b) Koliko studenata provede manje od 10 sati tjedno na pisanje zadaće?

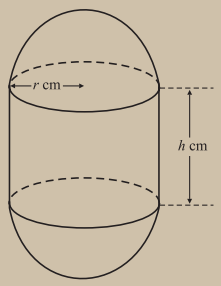
c) Koliko studenata provede podjednako vremena pišući zadaću i gledajući TV?

d) Koliki postotak studenata piše zadaće manje od 5 sati tjedno?

e) Koliki postotak studenata provede manje od 5 sati gledajući TV?

f) Koliko studenata provede gledajući TV između 5 i 10 sati i pišući zadaće između 15 i 20 sati tjedno?

30. Ante želi konstruirati vremensku kapsulu u koju će spremiti neke dragocjenosti. Zamislio je da bi mogla izgledati kao tijelo na slici. Neka je ukupni obujam kapsule V izražen u cm^3.



a) Izrazite obujam V pomoću r i h.

b) Ako je obujam kapsule 8 000 cm^3, izrazite veličinu h pomoću veličine r.

c) Materijal za oblogu valjkastog dijela stoji 2 lipe po cm^2, a materijal za oblogu sferičnog dijela 3 lipe po cm^2. Odredite izraz za L lipa (cijene obloge kompletne kapsule) pomoću veličine r.

d) Odredite derivaciju funkcije L po varijabli r.

e) Odredite za koji će r funkcija L imati najmanju vrijednost.

f) Odredite najmanju cijenu materijala za oblogu kapsule, zaokružujući na kune.

RJEŠENJA ISPITA

1. ISPIT (OSNOVNA RAZINA)

1. d **2.** b **3.** c **4.** a **5.** c **6.** b **7.** d **8.** c **9.** d **10.** d

2. ISPIT (OSNOVNA RAZINA)

1. d **2.** b **3.** c **4.** b **5.** b **6.** c **7.** b **8.** c **9.** b **10.** c

3. ISPIT (OSNOVNA RAZINA)

1. c **2.** a **3.** b **4.** c **5.** d **6.** b **7.** d **8.** b **9.** c **10.** b

4. ISPIT (OSNOVNA RAZINA)

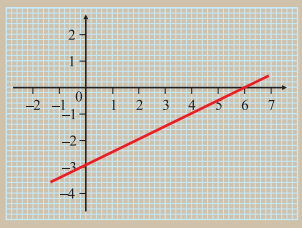
1. c **2.** d **3.** a **4.** b **5.** a **6.** c **7.** a **8.** c **9.** c **10.** b

5. ISPIT ZAVRŠNI (OSNOVNA RAZINA)

1. B **2.** C **3.** D **4.** C **5.** A **6.** B **7.** D **8.** C **9.** B **10.** D

11. C **12.** A **13.** D **14.** C **15.** B **16.** D **17.** $-\frac{10}{3}$ **18.** $x = 2$ **19.** 43 minute

20. 140° **21.**



22. $x_1 = -2, x_2 = -3$ **23.** 10 dag

24. $x = -2, y = 3$

25.

vrijeme t	1 h 45 min	3 h 30 min	2 h 15 min
put s	140 km	280 km	180 km

26. 26 °C **27.** 11.18 mm **28.** a) 32 m b) 3 s

1. ISPIT (VIŠA RAZINA)

1. a **2.** d **3.** c **4.** a **5.** d **6.** d **7.** d **8.** c **9.** c **10.** **1.** c, **2.** b, **3.** c

2. ISPIT (VIŠA RAZINA)

1. c **2.** a **3.** c **4.** a **5.** d **6.** c **7.** c **8.** b **9.** b **10.** c

3. ISPIT (VIŠA RAZINA)

1. b **2.** b **3.** a **4.** a **5.** a **6.** c **7.** a **8.** b **9.** c **10.** c

4. ISPIT (VIŠA RAZINA)

1. a **2.** b **3.** c **4.** b **5.** a **6.** c **7.** b **8.** d **9.** c **10.** b

5. ISPIT (VIŠA RAZINA)

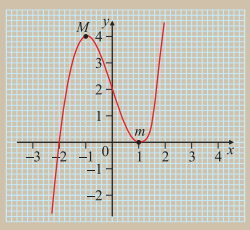
1. d **2.** b **3.** a **4.** a **5.** c **6.** b **6.1.** c **7.** c **8.** b **9.** d **10.** c

6. ISPIT (VIŠA RAZINA)

1. d **2.** b **3.** c **4.** a **5.** d **6.** a **7.** d **8.** a **9.** c **10.** b

7. ISPIT (VIŠA RAZINA)

1. c **2.** b **3.** c **4.** a **5.** d
6. c **7.** a **8.** d **9.** c **10.** a



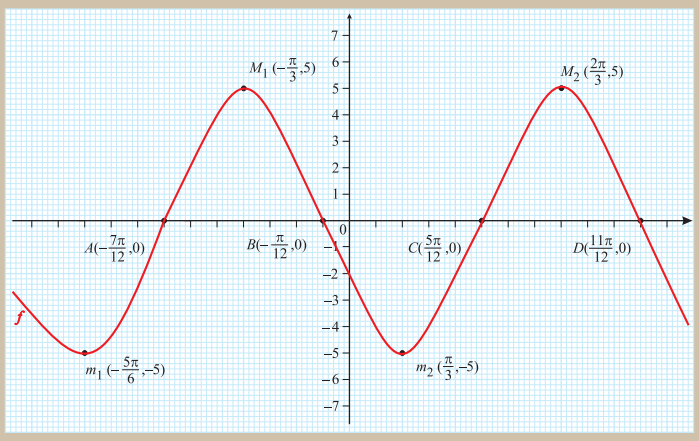
8. ISPIT ZAVRŠNI (VIŠA RAZINA)

1. D **2.** B **3.** A **4.** A **5.** B **6.** B **7.** A **8.** D **9.** C **10.** D

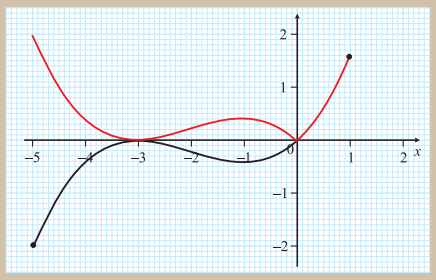
11. C **12.** B **13.** C **14.** B **15.** B **16.** $f\left(g\left(x\right)\right)=f\left(2x+1\right)=\left(2x+1\right)^2+1=4x^2+4x+2$

17. a) Amplituda je 5, period je π.

b)



18. a)



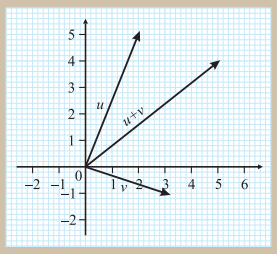
b) $\mathrm{Im}\left(g\right)=\left[0,20\right]$, $g\left(-5\right)=\left|f\left(-5\right)\right|=\left|-20\right|=20$

19. a) $\frac{500}{500+800+1\,200}=\frac{1}{5}=0.2$ U tvornici A proizvode 20% ukupne proizvodnje.

b) $\frac{1\,000}{1\,000+800+1\,200}=\frac{1}{3}=0.\dot{3}$ Ako tvornica A udvostruči proizvodnju, proizvodit će $33\frac{1}{3}\%$ ukupne proizvodnje.

20. $5\sqrt{5}$ **21.** $\frac{x^2}{4}+y^2=1 \Rightarrow e^2=4-1 \Rightarrow e^2=3 \Rightarrow e=\pm\sqrt{3} \Rightarrow F_1\left(-\sqrt{3},0\right),\ F_2\left(\sqrt{3},0\right)$ **22.** c, d, b, a

23. a)



b) $2\vec{v}-3\vec{u}=2\left(3\vec{i}-\vec{j}\right)-3\left(2\vec{i}+5\vec{j}\right)=6\vec{i}-2\vec{j}-6\vec{i}-15\vec{j}=-17\vec{j}$

c) $\left|\vec{v}\right|=\left|3\vec{i}-\vec{j}\right|=\sqrt{10} \Rightarrow \vec{v}_1=\frac{3\vec{i}-\vec{j}}{\sqrt{10}}=\frac{\sqrt{10}}{10}\left(3\vec{i}-\vec{j}\right)$

24. $\cos 29^\circ=\frac{100}{|AF|} \Rightarrow |AF|=\frac{100}{\cos 29^\circ}$

$\sphericalangle\left(AFE\right)=180^\circ-\sphericalangle\left(BFA\right)=180^\circ-61^\circ=119^\circ$

$\sphericalangle\left(FEA\right)=180^\circ-\left(20^\circ+119^\circ\right)=41^\circ$

$\frac{|AF|}{\sin 41^\circ}=\frac{|FE|}{\sin 20^\circ} \Rightarrow |FE|=\frac{\frac{100}{\cos 29^\circ}}{\sin 41^\circ}\cdot\sin 20^\circ=59.6059$

25. Vanjski kut trokuta je 112°, znači da je unutarnji 68°, pa je zbroj kutova u ovom trokutu 177°, umjesto 180°.

26. a) $\frac{x}{4}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow y=-\frac{3}{4}x+3$

b) $k_p=\frac{4}{3},\ y=\frac{4}{3}x-1$

c) $-\frac{3}{4}x+3=\frac{4}{3}x-1 \Rightarrow -9x+36=4x-12 \Rightarrow -13x=-48 \Rightarrow x=\frac{48}{13},\ y=\frac{4}{3}\cdot\frac{48}{13}-1 \Rightarrow$
$y=\frac{51}{13},\ \left(\frac{48}{13},\frac{51}{13}\right)$

d) $\sqrt{4^2+3^2}=5$

27. a) $f(-2)=-(-2)^2+3(-2)+1=-9$

b) $-x^2+3x+1=0,\ x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9+4}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{13}}{-2}$

c) $-x^2+3x+1=3 \Rightarrow -x^2+3x-2=0 \Rightarrow x_{1,2}=\frac{-3\pm\sqrt{9-8}}{-2} \Rightarrow x_1=1,\ x_2=2$

d) Koristeći graf ili neku drugu metodu dobivamo rješenje $x\in\langle-\infty,1]\cup[2,+\infty\rangle$.

28. „Brzo i jeftino“ $y=40x+320$
„Sigurno i jeftino“ $y=60x+200$
$40x+320<60x+200 \Rightarrow -20x<-120 \Rightarrow x>6$
Bit će povoljnije za unajmljivanje automobila na više od 6 sati.

29. a) 6 b) 4 c) Samo 1 (10 sati TV i 13 sati učenja).
d) 15% e) 0% ili niti jedan. f) 3

30. a) $V=V_V+V_K=r^2\pi h+\frac{4}{3}r^3\pi=r^2\pi\left(h+\frac{4}{3}r\right)$

b) $8\,000=r^2\pi\left(h+\frac{4}{3}r\right)\Big/:r^2\pi$

$\frac{8\,000}{r^2\pi}=h+\frac{4}{3}r \quad\Rightarrow\quad h=\frac{8\,000}{r^2\pi}-\frac{4}{3}r$

c) $O=P_V+O_K=2r\pi h+4r^2\pi=2r\pi\left(\frac{8\,000}{r^2\pi}-\frac{4}{3}r\right)+4r^2\pi=\frac{16\,000}{r}-\frac{8r^2\pi}{3}+4r^2\pi$

$L=\left(\frac{16\,000}{r}-\frac{8r^2\pi}{3}\right)\cdot 2+4r^2\pi\cdot 3=\frac{32\,000}{r}-\frac{16r^2\pi}{3}+12r^2\pi=\frac{32\,000}{r}+\frac{20}{3}r^2\pi$

d) $L'(r)=\left(32\,000r^{-1}\right)'+\left(\frac{20}{3}r^2\pi\right)'=-32\,000\cdot r^{-2}+\frac{40}{3}r\pi$

e) $L'(r)=0 \Rightarrow -32\,000\cdot r^{-2}+\frac{40}{3}r\pi=0 \Rightarrow \frac{40}{3}r\pi=\frac{32\,000}{r^2} \Rightarrow 40r^3\pi=96\,000 \Rightarrow r^3\pi=2\,400 \Rightarrow$
$r=\sqrt[3]{\frac{2\,400}{\pi}} \Rightarrow r=9.141562$

f) $L\left(\sqrt[3]{\frac{2\,400}{\pi}}\right)=\frac{32\,000}{\sqrt[3]{\frac{2\,400}{\pi}}}+\frac{20}{3}\sqrt[3]{\frac{2\,400}{\pi}}^2\pi=4\,057.616646$ lipa ≈ 41 kuna

Državna matura 2010. - ljetni rok (osnovna razina)

I. Zadaci višestrukoga izbora

1. Koji je od navedenih brojeva manji od $-\frac{5}{2}$?

A. $-\frac{7}{2}$ B. $-\frac{5}{3}$ C. $-\frac{3}{2}$ D. $-\frac{2}{3}$

2. Prvi set odbojkaške utakmice trajao je 18 minuta. U koliko je sati utakmica započela ako je prvi set završio u 18 sati i 5 minuta?

A. U 17 sati i 43 minute. B. U 17 sati i 47 minuta. C. U 17 sati i 53 minute. D. U 17 sati i 57 minuta.

3. Kolika je vrijednost izraza $\frac{5}{6}-\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}$?

A. $\frac{1}{3}$ B. $\frac{4}{9}$ C. $\frac{7}{12}$ D. $\frac{13}{18}$

4. Masa 256 jednakih olovaka iznosi 4.24 kg. Kolika je masa 20 takvih olovaka?

A. 3.3125 g B. 33.125 g C. 331.25 g D. 3312.5 g

5. Čemu je jednak izraz $\left(\frac{3a+1}{3}\right)^2$?

A. $\frac{3a^2+6a+1}{9}$ B. $\frac{9a^2+6a+1}{9}$ C. $\frac{9a^2+3a+1}{3}$ D. $\frac{3a^2+3a+1}{3}$

6. Brod je isplovio iz luke. Najprije je 2 sata plovio prema istoku brzinom 12 km/h, a onda prema sjeveru 5 sati brzinom 14 km/h. Koliko je nakon tih 7 sati plovidbe bio udaljen od luke?

A. 69 km B. 74 km C. 79 km D. 84 km

7. Koja tablica pripada funkciji $f(x)=4x-x^2$?

A.

x	$f(x)$
–1	5
2	–4
3	3

B.

x	$f(x)$
–1	5
2	4
3	–3

C.

x	$f(x)$
–1	–5
2	3
3	4

D.

x	$f(x)$
–1	–5
2	4
3	3

8. Kolika je vrijednost broja $\frac{\sqrt{28}}{3}$ zaokružena na tri decimale?

A. 1.760 B. 1.763 C. 1.764 D. 1.770

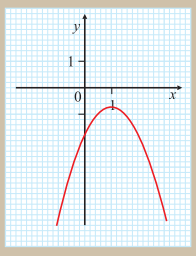
9. Graf funkcije $f(x)=2x-4$ siječe os apscisa u točki A, a os ordinata u točki B. Koje su koordinate A i B?

A. $A(2,0)$, $B(0,-4)$ B. $A(0,2)$, $B(-4,0)$ C. $A(-4,0)$, $B(0,2)$ D. $A(0,-4)$, $B(2,0)$

10. Ljudsko srce tijekom jednoga dana otkuca oko 100 tisuća puta. Koliko puta otkuca srce čovjeka tijekom 70 godina života?

A. $2.6\cdot10^7$ B. $2.6\cdot10^8$ C. $2.6\cdot10^9$ D. $2.6\cdot10^{10}$

11. Na slici je graf funkcije $f(x)=ax^2+bx+c$.
Što od navedenoga vrijedi za vodeći koeficijent a i za diskriminantu D?



A. $a>0, D>0$ B. $a>0, D<0$

C. $a<0, D>0$ D. $a<0, D<0$

12. Ako je $s=\frac{a+b+c}{2}$, čemu je jednako a?

A. $a=\frac{s-b-c}{2}$ B. $a=2(s-b-c)$

C. $a=2s-\mathrm{b}-\mathrm{c}$ D. $a=2s+\frac{b+c}{2}$

13. Cijena c iznajmljivanja bungalova na n tjedana dana je formulom $c = t \cdot n + d$ (t je iznos tjednoga najma, d je sigurnosni depozit). Martina je za 3 tjedna platila 2 092 kn, a Maja za 5 tjedana 3 412 kn. Koliki je sigurnosni depozit?

A. 112 kn B. 224 kn C. 308.70 kn D. 639.80 kn

14. Koji je rezultat oduzimanja $\frac{2x}{x^2-4} - \frac{1}{x-2}$, za $x \neq \pm 2$?

A. $\frac{1}{x+2}$ B. $\frac{2x-1}{x+2}$ C. $\frac{1}{x-2}$ D. $\frac{1}{x^2-4}$

15. Mliječni proizvod dolazi u pakiranju od 330 g ili od 500 g. Trgovac je dobio količinu od 55 550 g toga mliječnoga proizvoda u ukupno 140 pakiranja. Koliko je dobio manjih pakiranja?

A. 35 B. 50 C. 70 D. 85

16. Marin je išao kupiti školski pribor. Trećinu novca potrošio je za bilježnice, onda je četvrtinu ostatka potrošio za olovke i na kraju je polovicu onoga što je ostalo potrošio za pernicu. Preostalo mu je 18 kuna. Koliko je novaca Marin ponio sa sobom?

A. 68 kn B. 72 kn C. 90 kn D. 102 kn

II. Zadaci kratkih odgovora

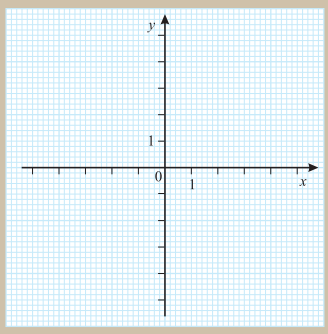
17. Izračunajte broj od kojega 8% iznosi 6.4. Odgovor: _____

18. U sustavu jednadžbi $\begin{cases} x = 2y + 4 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$ izračunajte nepoznanicu x. Odgovor: $x =$ _____

19. Omjer šećera i maslaca u kolaču je 4:3. U kolač smo stavili 15 dag maslaca. Koliko ćemo staviti dekagrama šećera? Odgovor: _____ dag

20. Zadani su brojevi $a = \frac{18}{25}$ i $v = 6.3$. Odredite broj $V = \frac{1}{3}a^2 v$. Odgovor: $V =$ _____

21. Nacrtajte pravac zadan jednadžbom $2x + 3y = 6$.



22. Riješite kvadratnu jednadžbu $x^2 - 2\sqrt{3}x + 2 = 0$.

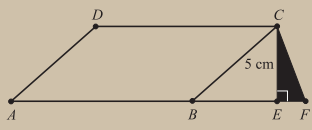
U zapisu rješenja rabite $\sqrt{3}$ ne računajući njegovu vrijednost.

Odgovor: $x_1 =$ _____, $x_2 =$ _____

23. Sljedeća tablica povezuje duljine izražene u stopama i metrima. Popunite vrijednosti koje nedostaju.

Stopa (*foot*)	1	5.8	
Metar (m)	0,3048		1.40208

24. Zadani su paralelogram $ABCD$ i pravokutan trokut ΔCEF.
Kateta $\overline{EF}$ je 7 puta kraća od stranice $\overline{AB}$.
Površina trokuta ΔCEF iznosi 12 cm^2.
Kolika je duljina stranice $\overline{AB}$, a kolika površina paralelograma $ABCD$?



Odgovor: $|AB| =$ _____ cm

$P_{ABCD} =$ _____ cm^2

25.1. Riješite jednadžbu $2(x+1) + 4 = 2 - x$. Odgovor: $x =$ _____

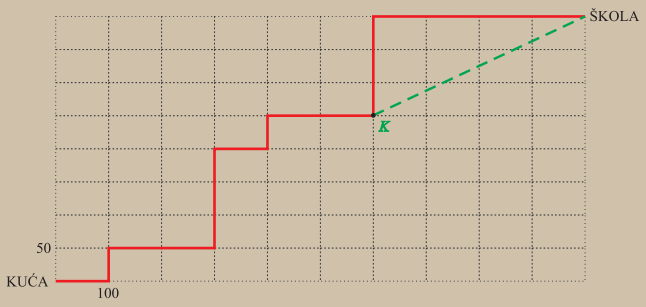
25.2. Riješite nejednadžbu $\frac{5x-3}{6} - \frac{3x}{2} > 1$. Odgovor: _____

26. Za 120 kn mogle su se kupiti dvije čokolade više nego nakon njihova poskupljenja od 25%.

26.1. Koliko se čokolada moglo kupiti prije poskupljenja? Odgovor: _____

26.2. Kolika je cijena jedne čokolade nakon poskupljenja? Odgovor: _____ kn

27. Karmela i Karlo krenuli su skupa od kuće prema školi. Išli su zajedno do mjesta K ucrtanim putem, a onda je Karmela otišla prečicom (iscrtkana crta), a Karlo okolnim putem (puna crta). Koordinate na crtežu dane su u metrima.



27.1. Odredite koordinate točke K. Odgovor: K (_____,_____)

27.2. Odredite koliki je ukupni put prešao Karlo od kuće do škole. Odgovor: _____ m

27.3. Za koliko je Karmela prešla kraći put od Karla, hodajući od kuće do škole? Odgovor: _____ m

28. U posudici u kojoj se smrzava voda nastaje led oblika kvadra dimenzija 3.5 cm × 3 cm × 2 cm. Pri smrzavanju obujam vode poveća se za 5%.

28.1. Koliko je vode potrebno za jedan takav oblik leda? Odgovor: _____ cm^3

28.2. Koliko se takvih oblika leda može napraviti od 1 litre vode? (Napomena: 1 litra = 1 dm^3.) Odgovor: _____

Državna matura 2010. - ljetni rok (viša razina)

I. Zadaci višestrukoga izbora

1. Koja je od navedenih tvrdnji istinita?

A. $-1.5 \in \boldsymbol{Z}$ B. $\sqrt{2} \in \boldsymbol{Q}$ C. $\frac{1}{2} \in \boldsymbol{R}$ D. $\pi \in \boldsymbol{N}$

2. Mjera kuta je 162°. Koliko je to radijana?

A. $\frac{9\pi}{10}$ B. $\frac{10\pi}{9}$ C. $\frac{9\pi}{20}$ D. $\frac{20\pi}{9}$

3. Koje je rješenje jednadžbe $x-\left[3x-(5+x)\right]-8=3(x+2)-1$?

A. -3 B. -2 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{4}{3}$

4. Duljine stranice trokuta ABC su $a = 12$ cm i $c = 9$ cm, a kut između njih je $\beta = 82°17'$.
Kolika je duljina stranice b ?

A. 14 cm B. 14.5 cm C. 15.5 cm D. 16 cm

5. Točka $S(-2, 3)$ je središte kružnice koja prolazi ishodištem koordinatnoga sustava.
Kako glasi jednadžba te kružnice?

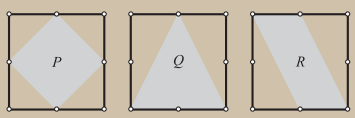
A. $(x+2)^2+(y-3)^2=13$ B. $(x+2)^2+(y-3)^2=5$

C. $(x-2)^2+(y+3)^2=13$ D. $(x-2)^2+(y+3)^2=5$

6. Pri penjanju na neku planinu izmjereno je da na svakih 100 metara visine temperatura zraka pada za 0.7 °C. Na vrhu planine temperatura je iznosila 14.8 °C. Istodobno je bila 26 °C pri tlu na 0 m nadmorske visine.
Kolika je visina te planine?

A. 1 500 m B. 1 600 m C. 1 700 m D. 1 800 m

7. Na slikama su tri sukladna kvadrata s označenim polovištima stranica.
Koji odnos vrijedi za površine P, Q, R osjenčanih likova?



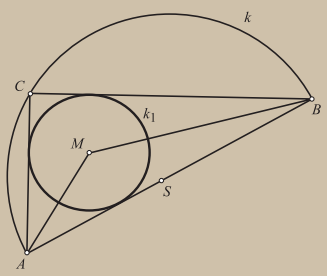
A. $P < Q = R$ B. $P < Q < R$

C. $P = Q < R$ D. $P = Q = R$

8. Koji je skup domena funkcije $f(x) = \log(2x + 4)$?

A. $R \setminus \{-2,0\}$ B. $\langle -\infty, -2\rangle$ C. $\langle -2, +\infty\rangle$ D. $R \setminus \{-2\}$

9. Promjer kružnice k hipotenuza je trokuta ΔABC. U trokut ΔABC upisana je kružnica k_1 sa središtem M. Kolika je mjera kuta AMB?



A. 120° B. 125°

C. 130° D. 135°

10. Koliko iznosi modul (apsolutna vrijednost) kompleksnoga broja $(1-i)^6$?

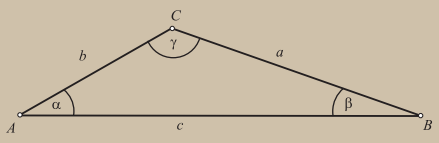
A. $\sqrt{8}$ B. $\sqrt{32}$

C. 8 D. 32

11. Koliki je zbroj rješenja jednadžbe $5^{x+2}+\left(\frac{1}{5}\right)^{x+1}=6$?

A. -3 B. -2 C. -1 D. 0

12. U trokutu ΔABC sa slike omjer kutova je $\alpha : \beta : \gamma = 3 : 2 : 13$.
Za duljine stranica vrijedi $a - b = 3$ cm.
Kolika je duljina najkraće stranice toga trokuta?



A. 2.19 cm B. 4.23 cm

C. 6.49 cm D. 8.92 cm

13. Što je rezultat sređivanja izraza $\left(\frac{1+a^{-1}+a^{-2}+a^{-3}}{a}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a}{1-a^3}$ za $a \neq 0.1$?

A. $\frac{a^2+a+1}{a^5}$ B. $\frac{a^2-a+1}{a^5}$ C. $\frac{a^5}{a^2+a+1}$ D. $\frac{a^5}{a^2-a+1}$

14. Puna metalna kocka brida a pretopljena je u kuglu. Koliki je promjer te kugle?

A. $0.98a$ B. $1.24a$ C. $1.33a$ D. $1.64a$

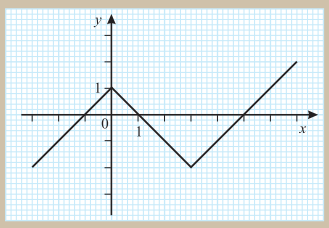
15. Uz koji uvjet za realni broj $m \neq 0$ jednadžba $m\sin x - 1 = 0$ ima rješenja?

A. $m \in \boldsymbol{R} \setminus \{0\}$ B. $m \in \boldsymbol{R} \setminus [-1, 1]$ C. $m \in \boldsymbol{R} \setminus \langle -1, 1 \rangle$ D. $m \in [-1, 1] \setminus \{0\}$

II. Zadaci kratkih odgovora

16. Izračunajte $36^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 9^{-\frac{1}{2}}$ i rezultat napišite kao razlomak. Odgovor:_____

17. Na slici je graf funkcije f. U istome koordinatnome sustavu nacrtajte graf funkcije g takve da je $g(x) = f(x) + 1$.



18.1. Odredite koeficijent smjera (nagib) pravca $\frac{x}{-2}+\frac{y}{3}=1$. Odgovor: _____

18.2. Zadana je točka $A\,(1, 2)$ i usmjerena dužina $\overrightarrow{AB} = 4\vec{i} - 4\vec{j}$.
Odredite jednadžbu pravca kojemu pripada ta dužina. Odgovor: _____

19.1. Odredite zbroj rješenja jednadžbe $x^2 + x - 6 = 0$. Odgovor: _____

19.2. Napišite oba rješenja jednadžbe $\left|\frac{2x-1}{5}\right| = 1$. Odgovor: x_1 = _____,
x_2 = _____

20.1. Neka je $z = 3 + 2i$. Koliko je $\left(\text{izz}\right)^4$? Odgovor:_____

20.2. Kompleksan broj $z = 2i$ prikažite u trigonometrijskome obliku.
Odgovor: z = _____

21. Škola je za odlazak svojih 708 učenika na izlet osigurala 15 autobusa. Neki su autobusi imali 52, a neki 43 sjedala. U svim autobusima sva sjedala bila su popunjena i na svakome je sjedio samo jedan učenik.

21.1. Koliko je bilo autobusa s 52 sjedala? Odgovor: _____

21.2. Koliko je ukupno učenika prevezeno autobusima s 43 sjedala? Odgovor: _____

22.1. Riješite nejednadžbu $x^2 + 7x + 12 \geq 0$. Rješenje zapišite pomoću intervala.
Odgovor: _____

22.2. Neka je a zadani realni broj. U sustavu jednadžbi $\begin{cases} 2x + 3y = a \\ x + 2y + 2a = 0 \end{cases}$ odredite nepoznanicu y.
(U rješenju će se pojaviti broj a.)

Odgovor: y = _____

23.1. Pojednostavnite $\sin(3960° + \alpha)$. Odgovor: $\sin(3960° + \alpha) =$ _____

23.2. Koje je rješenje jednadžbe $\sin(x - \pi)\sin(x + 2\pi) = 3\cos(x + 3\pi)\cos(x - 4\pi)$ iz intervala $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$?

Odgovor: _____

24.1. U aritmetičkome nizu $-12, -5, 2, \ldots$ odredite zbroj prvih 50 članova. Odgovor: _____

24.2. Tri pozitivna broja čine geometrijski niz. Umnožak prvoga i trećega člana je 1.44. Koji je drugi član toga niza?

Odgovor: _____

25.1. Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2px$ prolazi točkom $T(3, 3)$. Odredite p. Odgovor: $p =$ _____

25.2. Parabola je zadana jednadžbom $y^2 = 12x$.
Kolika je udaljenost fokusa te parabole od pravca $y = 2x + 5$? Odgovor: _____

25.3. Parabola zadana jednadžbom $y^2 = 2px$ ima fokus $F(1, 0)$ i prolazi točkom $A(x, -3)$. Odredite jednadžbu tangente na tu parabolu u njezinoj točki A.

Odgovor: _____

26. Povećanje troškova života u travnju u odnosu na ožujak je 4.2%, a u svibnju u odnosu na travanj je 3.5%. Koliki je postotak povećanja troškova života u svibnju u odnosu na ožujak?

Odgovor: _____ %

Povećanje troškova života u listopadu u odnosu na rujan je 3.8%. Za koliko bi se posto morali smanjiti troškovi života u studenome da bi se vratili na stanje u rujnu?

Odgovor: _____ %

27. Riješite nejednadžbu $\log_2(x - 1) + \log_2(x - 3) \leq 3$. Rješenje zapišite pomoću intervala.

Odgovor: _____

28. Kabelska televizija započela je s radom. Pokazalo se da su prve godine rada broj njezinih korisnika K i broj mjeseci t od početka emitiranja povezani formulom $K = \frac{20000(4t + 1)}{t + 1}$.

28.1. Koliki je broj korisnika bio u trenutku početka rada ove kabelske televizije?

Odgovor: _____

28.2. Nakon koliko je mjeseci broj korisnika bio 70 000?

Odgovor: _____

28.3. Napišite formulu ovisnosti broja mjeseci o broju korisnika.
(Izrazite t pomoću K.) Odgovor: _____

III. Zadaci produženih odgovora

29. Zadana je funkcija $f(x) = -\frac{1}{4}(x^2 - 16)(x + 1)$.

29.1. Odredite koordinate sjecišta grafa funkcije s osi apscisa.

Odgovor: _____

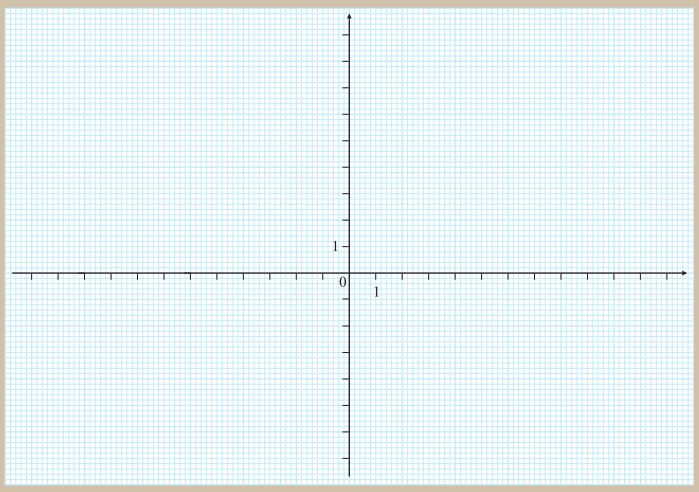
29.2. Derivirajte funkciju f. Odgovor: _____

29.3. Odredite interval/intervale rasta funkcije f.

Odgovor: _____

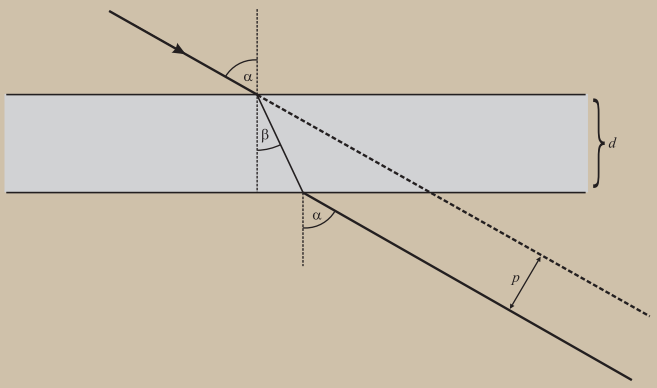
29.4. Odredite lokalne ekstreme funkcije f. Odgovor: _____

29.5. Nacrtajte graf te funkcije rabeći rezultate prethodnih podzadataka.
(Napomena: Točke koje nemaju cjelobrojne koordinate ucrtajte približno.)



30. Na planparalelnu staklenu ploču debljine $d = 40$ mm pada zraka svjetlosti pod kutom prema okomici $\alpha = 60°$. Indeks loma n iznosi $\frac{3}{2}$. Koliki je paralelni pomak p zrake svjetlosti?

Napomena:
Zraka svjetlosti lomi se pod kutom prema okomici β i izlazi iz ploče pod kutom prema okomici α.
Indeks loma definiran je jednakošću $n = \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$.



Odgovor: _____ mm

FORMULE (osnovna razina)

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$a^m : a^n = a^{m-n} \ (a \neq 0)$

$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \ (a \neq 0)$

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

• Kvadratna jednadžba $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

• Tjeme parabole $T\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$

• Površina trokuta $P = \frac{a \cdot v_a}{2}$

• Površina paralelograma $P = a \cdot v$

• Površina kruga $P = r^2 \pi$ • Opseg kruga $O = 2r\pi$

B... površina osnovke (baze) P... površina pobočja h... duljina visine r... polumjer kugle

• Obujam (volumen) prizme i valjka $V = B \cdot h$
• Oplošje prizme $O = 2B + P$

• Obujam (volumen) piramide i stošca $V = \frac{1}{3} B \cdot h$ • Oplošje piramide $O = B + P$

• Obujam (volumen) kugle $V = \frac{4}{3} r^3 \pi$

• Udaljenost točaka T_1 i T_2 $d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

• Jednadžba pravca $y - y_1 = k(x - x_1), k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

• Uvjet usporednosti pravaca $k_1 = k_2$

FORMULE (viša razina)

• Kompleksan broj $i^2=-1$ $z=a+bi$ $\bar{z}=a-bi$ $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ $a,\ b\in R$

$z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$z_1\cdot z_2=r_1r_2\left(\cos(\varphi_1+\varphi_2)+i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right)$ $\quad \frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right)$

$z^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$ $\quad \sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)+i\sin\left(\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right)\right),\ k=0,1,\ldots n-1$

$a^m\cdot a^n=a^{m+n}$ $\quad (a\pm b)^2=a^2\pm 2ab+b^2$ $\quad (a\pm b)^3=a^3\pm 3a^2b+3ab^2\pm b^3$

$a^m:a^n=a^{m-n}\ (a\neq 0)$ $\quad a^2-b^2=(a-b)(a+b)$ $\quad a^3\pm b^3=(a\pm b)(a^2\mp ab+b^2)$

$a^{-m}=\frac{1}{a^m}\ (a\neq 0)$

$\sqrt[m]{a^n}=a^{\frac{m}{n}}$

$$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b^1+\binom{n}{2}a^{n-2}b^2+\ldots\binom{n}{k}a^{n-k}b^k+\ldots+\binom{n}{n-1}a^{n-(n-1)}b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$$

• Kvadratna jednadžba $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ $\quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

• Viètеove formule $x_1+x_2=-\frac{b}{a}$ $\quad x_1\cdot x_2=\frac{c}{a}$

• Tjeme parabole $T\left(-\frac{b}{2a},\frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

$b^x=y \iff x=\log_b y$ $\quad \log_b b^x=x=b^{\log_b x}$ $\quad \log_b x^y=y\log_b x$

$\log_b(xy)=\log_b x+\log_b y$ $\quad \log_b\left(\frac{x}{y}\right)=\log_b x-\log_b y$ $\quad \log_a x=\frac{\log_b x}{\log_b a}$

• Površina trokuta $P=\frac{a\cdot v_a}{2}$ $\quad P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ $\quad s=\frac{O}{2}=\frac{a+b+c}{2}$

$P=\frac{ab\sin\gamma}{2}$ $\quad P=r_u s$ $\quad P=\frac{abc}{4r_o}$

• Jednakostraničan trokut $P=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad v=\frac{a\sqrt{3}}{2}$ $\quad r_o=\frac{2}{3}v$ $\quad r_u=\frac{1}{3}v$

• Površina paralelograma $P=a\cdot v$ $\quad$ • Površina trapeza $P=\frac{a+c}{2}\cdot v$

• Površina kruga $P=r^2\pi$

• Opseg kruga $O=2r\pi$

• Površina kružnog isječka $P=\frac{r^2\pi\alpha}{360^\circ}$ $\quad$ • Duljina kružnog luka $l=\frac{r\pi\alpha}{180^\circ}$

B... površina osnovke (baze) $\quad P$... površina pobočja $\quad h$... duljina visine $\quad r$... polumjer osnovke stošca

• Obujam (volumen) prizme i valjka $V=B\cdot h$ $\quad$ • Oplošje prizme i valjka $O=2B+P$

• Obujam (volumen) piramide i stošca $V=\frac{1}{3}B\cdot h$ $\quad$ • Oplošje piramide $O=B+P$

• Oplošje stošca $O=r^2\pi+r\pi v$

• Obujam (volumen) kugle $V=\frac{4}{3}r^3\pi$ $\quad$ • Oplošje kugle $O=4r^2\pi$, r... polumjer kugle

• Aritmetički niz $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad S_n=\frac{n}{2}(a_1+a_n)$

• Geometrijski niz $a_n=a_1\cdot q^{n-1}$ $\quad S_n=a_1\frac{q^n-1}{q-1}$

• Geometrijski red $S=\frac{a_1}{1-q},\ |q|<1$

• Udaljenost točaka T_1 i T_2 $\quad d(T_1,T_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

• Polovište dužine $P\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$

• Vektor $\overrightarrow{T_1T_2}$ $\quad \overrightarrow{T_1T_2} = \vec{a} = (x_2 - x_1)\vec{i} + (y_2 - y_1)\vec{j} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j}$

• Skalarni umnožak vektora $\quad \vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = a_xb_x + a_yb_y$

• Jednadžba pravca $\quad y - y_1 = k(x - x_1), \quad k = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad$ • Kut α između dvaju pravaca $\quad tg\alpha = \left|\dfrac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}\right|$

• Udaljenost točke $T(x_1, y_1)$ i pravca $Ax + By + C = 0 \quad d(T, p) = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

• **Krivulja drugoga reda**	• **Jednadžba**	• **Tangenta u točki krivulje** (x_1, y_1)
• **Kružnica** (središte $S(p, q)$)	$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$	$(x_1 - p)(x - p) + (y_1 - q)(y - q) = r^2$
• **Elipsa**		
fokusi $F_{1,2}(\pm e, 0) \quad e^2 = a^2 - b^2$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x_1x}{a^2} + \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$
• **Hiperbola**		
fokusi $F_{1,2}(\pm e, 0) \quad e^2 = a^2 + b^2$	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	$\dfrac{x_1x}{a^2} - \dfrac{y_1y}{b^2} = 1$ asimptote $y = \pm\dfrac{b}{a}x$
• **Parabola** (fokus $F\left(\dfrac{p}{2}, 0\right)$)	$y^2 = 2px$	$y_1y = p(x + x_1)$

• Uvjet dodira pravca $y = kx + l$ i kružnice $\quad r^2(k^2 + 1) = (q - kp - l)^2$

• U pravokutnom trokutu

$$\text{sinus kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{hipotenuza}} \qquad \text{kosinus kuta} = \frac{\text{priležeća kateta}}{\text{hipotenuza}} \qquad \text{tangens kuta} = \frac{\text{nasuprotna kateta}}{\text{priležeća kateta}}$$

• Poučak o sinusima $\quad \dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma}$ $\quad$ • Poučak o kosinusima $\quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin 2x = \sin(x + x) = 2\sin x \cdot \cos x$

$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$$\sin(x \pm y) = \sin x\cos y \pm \cos x\sin y$$
$$\cos(x \pm y) = \cos x\cos y \mp \sin x\sin y$$
$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg}x \pm \operatorname{tg}y}{1 \mp \operatorname{tg}x \cdot \operatorname{tg}y}$$

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\sin x - \sin y = 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$
$$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x+y) + \sin(x-y))$$
$$\cos x \cdot \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x+y) + \cos(x-y))$$
$$\sin x \cdot \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x-y) - \cos(x+y))$$

$c' = 0 \qquad (x^n)' = n \cdot x^{n-1},\ n \neq 0 \qquad (\sin x)' = \cos x \qquad (\cos x)' = -\sin x \qquad (\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

• Derivacija umnoška $\quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$ $\quad$ • Derivacija kvocijenta $\quad \left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$

• Derivacija kompozicije $\quad (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

• Tangenta na graf funkcije f u $T(x_0, y_0) \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)$

ISBN 978-953-12-1227-4